

**О. Титъенс**

**Гидро- и аэромеханика**

**По лекциям профессора Л. Прандтль. Том 2**

**Москва**  
**«Книга по Требованию»**

УДК 62  
ББК 30.6  
О-11

0-11 **О. Титъенс**  
Гидро- и аэромеханика: По лекциям профессора Л. Прандтль. Том 2 / О. Титъенс – М.: Книга по Требованию, 2024. – 284 с.

**ISBN 978-5-458-50671-7**

В своих лекциях Людвиг Прандтль дает в простом, ясном и строго научном изложении те части гидромеханики, которые, главным образом необходимы для научной разработки вопросов воздухоплавания и гидравлики. В книге славного геттингенского профессора инженеры найдут надежный фундамент в своей практической деятельности, а научные работники получат прекрасное руководство к дальнейшим научным изысканиям.

**ISBN 978-5-458-50671-7**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2024  
© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



## ОГЛАВЛЕНИЕ.

	<i>Стр.</i>
Предисловие к немецкому изданию . . . . .	3
От переводчика . . . . .	4
Введение . . . . .	9
Проблема сопротивления жидкости (9).	
I. Основные понятия гидродинамики . . . . .	11
1. Уравнение Эйлера для одномерных течений (11). — 2. Уравнение Бернулли для одномерных течений (12). — 3. Определение вязкости (13).	
II. Законы подобия . . . . .	15
4. Закон подобия при учете сил инерции и вязкости (15). — 5. Закон подобия при учете сил инерции и тяжести (18). — 6. Вывод закона подобия Рейнольдса из уравнения Навье-Стокса (20). — 7. Связь между соображениями о подобии и соображениями о размерностях (22).	
III. Течение в трубах и каналах . . . . .	24
A. Ламинарное течение . . . . .	
8. Общие сведения (24). — 9. Фундаментальное исследование Гагена (25). — 10. Исследования Пуазейля (26). — 11. Закон Гагена-Пуазейля (27). — 12. Вывод закона Гагена-Пуазейля из закона трения Ньютона (29). — 13. Пределы применимости закона Гагена-Пуазейля (30). — 14. Явления, происходящие в начальном участке ламинарного течения (31). — 15. Длина начального участка ламинарного течения (32). — 16. Изменение давления в начальном участке ламинарного течения (32). — 17. Поправочный член, учитывающий живую силу (33). — 18. Распределение скоростей в начальном участке ламинарного течения (34). — 19. Потеря давления в начальном участке ламинарного течения (36). — 20. Значение потери давления в начальном участке ламинарного течения для определения вязкости путем измерения количества вытекающей жидкости (37).	
B. Переход ламинарного течения в турбулентное . . . . .	
21. Первые факты, установленные Гагеном (38). — 22. Фундаментальное исследование Рейнольдса (39). — 23. Критическое число Рейнольдса (41). — 24. Зависимость критического числа Рейнольдса от возмущений у входа в трубу (42). — 25. Состояние течения при переходе ламинарного режима в турбулентный (44). — 26. Перемежающееся возникновение турбулентности (45). — 27. Измерение падения давления при переходе ламинарного течения в турбулентное (47). — 28. Независимость критического числа Рейнольдса от длины трубы (48).	
C. Турбулентное течение . . . . .	
29. Старые формулы для падения давления. (49). — 30. Формула сопротивления Блазиуса для гладких труб (51). — 31. Закон сопротивления для случая шероховатых стенок (52). — 32. Угловатая и в листая	

шероховатость (53). — <b>33.</b> Измерение средних значений скорости турбулентного течения при помощи трубы Пито (54). — <b>34.</b> Турбулентное распределение скоростей (56). — <b>35.</b> Распределение скоростей в начальном участке турбулентного течения (57). — <b>36.</b> Потеря давления в начальном участке турбулентного течения (58). — <b>37.</b> Сходящиеся и расходящиеся течения (60).	
<b>IV. Дифференциальное уравнение движения вязкой жидкости . . . . .</b>	65
38. Основное уравнение гидродинамики (65). — <b>39.</b> Равложение поверхности результирующей силы на элементы аффинора напряжений (66). — <b>40.</b> Связь между элементами аффинора напряжений и соответствующими скоростями деформаций (67) — <b>41.</b> Связь между аффинором напряжений и аффинором скоростей (71). — <b>42.</b> Уравнение Навье-Стокса (72). — <b>43.</b> Замечания по поводу уравнения Навье-Стокса (73). — <b>44.</b> Дифференциальное уравнение ползущего движения (74). — <b>45.</b> Поправка Озина (77).	
<b>V Пограничные слои . . . . .</b>	79
46. Область действия вязкости при больших числах Рейнольдса (79). — <b>47.</b> Порядок величины отдельных членов, входящих в уравнение Навье-Стокса, при больших числах Рейнольдса (80). — <b>48.</b> Дифференциальное уравнение пограничного слоя (83). — <b>49.</b> Определение толщины пограничного слоя (85). — <b>50.</b> Оценка порядка толщины пограничного слоя для течения вдоль пластинки (86). — <b>51.</b> Сопротивление трения в ламинарном пограничном слое (87). — <b>52.</b> Возвратное течение в пограничном слое как причина образования вихрей (83). — <b>53.</b> Турбулентные пограничные слои (90). — <b>54.</b> Закон корня седьмой степени для турбулентного распределения скоростей (90). — <b>55.</b> Напряжение сдвига на стенке при турбулентном пограничном слое и толщина этого слоя (94). — <b>56.</b> Сопротивление трения при турбулентном пограничном слое (96). — <b>57.</b> Ламинарный пограничный слой внутри турбулентного пограничного слоя (98). — <b>58.</b> Способы для предупреждения образования свободных поверхностей раздела и возникающих из них вихрей (100). — <b>59.</b> Действие на течение частичного отсекаивания пограничного слоя (101). — <b>60.</b> Вращающийся цилиндр; эффект Магнуса (101).	
<b>VI. Сопротивление обтекаемых тел . . . . .</b>	105
61. Основные положения (105). — <b>62.</b> Закон сопротивления Ньютона (105). — <b>63.</b> Современное понимание сущности сопротивления жидкости (106). — <b>64.</b> Сопротивление деформации при очень малых числах Рейнольдса (107). — <b>65.</b> Значение вязкости, даже очень малой, для сопротивления (108). — <b>66.</b> Зависимость сопротивления давления и сопротивления трения от формы тела (109). — <b>67.</b> О зависимости сопротивления от числа Рейнольдса (110). — <b>68.</b> Законы сопротивления давления, сопротивления трения и сопротивления деформации (112). — <b>69.</b> Об экспериментальных результатах (114). — <b>70.</b> Зависимость $c = f(R)$ для бесконечного цилиндра (114). — <b>71.</b> Область сверхкритического сопротивления (116). — <b>72.</b> Кривая сопротивления для цилиндра конечной длины, для шара и для тела с профилем стойки (118). — <b>73.</b> Сопротивление в жидкости со свободной поверхностью; волновое сопротивление (120). — <b>74.</b> Общий закон сопротивления (121). — <b>75.</b> Сопротивление при потенциальном течении (122). — <b>76.</b> Сопротивление шара при равномерном потенциальном течении (122). — <b>77.</b> Сопротивление шара при неравномерном потенциальном течении (124). — <b>78.</b> Применение теоремы импульсов (125). — <b>79.</b> Взаимодействие нескольких движущихся в жидкости тел (126). — <b>80.</b> Сопротивление при разрывном потенциальном течении (127). —	

Стр.

81. Закон сопротивления Стокса (129). — 82. Экспериментальное подтверждение закона Стокса для движения в жидкостях; влияние стенок сосуда (131). — 83. Экспериментальное подтверждение закона Стокса для движения в газах (133). — 84. Поправка Озина к закону Стокса (134). — 85. Сопротивление тел в жидкостях с очень малой вязкостью (135). — 86. Сопротивление полутела (135). — 87. Импульс источника (137). — 88. Определение сопротивления тела при помощи теоремы импульсов (139). — 89. Способ Бетца для определения сопротивления при помощи измерений в кильватерном течении (141). — 90. Вихревая дорожка Кармана (145). — 91. Применение теоремы импульсов к вихревой дорожке Кармана (147). — 92. Тела с малым сопротивлением (150). — 93. Сравнение вычисленного распределения давления с экспериментальным (151). — 94. Сопротивление трения для плоских пластинок (153).	
VII Теория крыла . . . . .	157
А Экспериментальные результаты . . . . .	57
95. Подъемная сила и лобовое сопротивление (157). — 96. Отношение подъемной силы к лобовому сопротивлению; качество крыла (157). — 97. Коэффициенты подъемной силы и лобового сопротивления (159). — 98. Поляра и моментная кризиса крыла (160). — 99. Связь между полетными свойствами крыла и формой профиля (162). — 100. Полетные свойства разрезных крыльев (166). — 101. Принцип действия разрезных крыльев (167). — 102. Распределение давления по крылу (169).	
В. Бесконечно длинное крыло (плоское течение) . . . . .	171
103. Связь между подъемной силой и циркуляционным течением (171). — 104. Интеграл давления, взятый по поверхности крыла (172). — 105. Вывод формулы Кутта-Жуковского для подъемной силы (174). — 106. Другой вывод формулы Кутта-Жуковского (175). — 107. Возникновение циркуляции (176). — 108. Сопротивление в начальный период движения (181). — 109. Поле скоростей в окрестности крыла (182). — 110. Применение конформных отображений к течениям вокруг плоских и изогнутых пластинок (184). — 111. Наложение циркуляционного течения на параллельные (186). — 112. Определение напряженности циркуляционного течения (188). — 113. Метод отображения Жуковского (190). — 114. Отображение окружности в крылообразный профиль с конечным краевым углом (191).	
С. Крыло конечного размаха (трехмерное течение) . . . . .	194
115. Продолжение циркуляции крыла концевыми вихрями (194). — 116. Передача веса аэроплана на поверхность земли (195). — 117. Зависимость лобового сопротивления от относительного размаха (197). — 118. Суммарная оценка сопротивления (197). — 119. Скачок потенциала позади крыла (198). — 120. Вихревая поверхность позади крыла у которого подъемная сила убывает к концам (203). — 121. Скорость нисходящего движения, обусловленного сбегающей с крыла прямолинейно вихревою нитью (205). — 122. Определение индуктивного сопротивления при заданном распределении подъемной силы (206). — 123. Минимум индуктивного сопротивления; распределение подъемной силы для крыла заданной формы и при заданном угле атаки (211). — 124. Формулы пересчета (213). — 125. Взаимное влияние несущих вихревых систем. Биплан без выноса (217). — 126. Биплан с выносом (220). — 127. Полное индуктивное сопротивление биплана (223). — 128. Теорема о минимуме индуктивного сопротивления для полиплана (225). — 129. Влияние стенок и свободных границ (228). — 130. Определение влияния стенок трубы и границ свободной струи с круглым поперечным сечением (230).	

Стр.

VIII. Методы экспериментальных исследований и экспериментальные приспособления . . . . .	232
А. Измерение давления и скорости в текущей жидкости . . . . .	232
131. Принципиальные соображения об измерении давления в текущих жидкостях и газах (232). — 132. Статическое давление (232). — 133. Полное давление (234). — 134. Приборы для измерения динамического давления; измерение скорости (234). — 135. Определение направления скорости (237). — 136. Манометры с жидкостью (233). — 137. Микроманометры (240) — 138. Вертушки (245). — 139. Электрические способы измерения скорости (246). — 140. Измерение скоростей в трубах и каналах (248). — 141. Трубка Вентури (249). — 142. Насадки и диафрагмы (250). — 143. Измерение расхода при помощи водослива (251). — 144. Другие способы измерения расхода (251).	
В. Измерение сопротивления обтекаемых тел . . . . .	251
145. Методы измерения сопротивления (251). — 146. Способ буксировки (252). — 147. Измерение сопротивления тела при падении (252). — 148. Ротативный способ измерения сопротивления (254). — 149. Измерение сопротивления на естественном ветре (255). — 150. Преимущества измерения сопротивления в искусственном потоке воздуха (256).	
С. Аэродинамические трубы . . . . .	256
151. Первые открытые аэродинамические трубы Стантона и Рябушинского (256). — 152. Первые замкнутые трубы: геттингенская и Стантона (257). — 153. Первая аэродинамическая труба со свободной струей (259). — 154. Новые английские аэродинамические трубы (260). — 155. Большая аэродинамическая труба Прандтля в Геттингена (261). — 156. Аэродинамические трубы в других странах (263). — 157. Укрепление моделей и измерение сил (265). — 158. Геттингенские трехкомпонентные весы (267). — 159. Аэродинамические весы Эйфеля (268).	
Д. Способы для придания течениям видимости . . . . .	269
160. Принципиальные трудности (269). — 161. Примешивание дыма к течениям газа (270). — 162. Движение в пограничном слое (271). — 163. Трехмерные движения жидкости (271). — 164. Двухмерные течения жидкости (273). — 165. Преимущества фотографических снимков перед наблюдением (275). — 166. Линии тока, траектории (275). — 167. Ускоренная и замедленная кинематографическая съемка (276). — 168. Кинематографическая съемка с большой экспозицией (277). — 169. Технические детали (278).	
Предметный указатель . . . . .	281
Добавление: таблицы 1-28. . . . .	285

## Введение.

**Проблема сопротивления жидкости.** Жидкость, совершенно не обладающая трением, служившая предметом изучения в третьем отделе первого тома, должна рассматриваться только как идеализированное представление действительной, реальной жидкости<sup>1)</sup>. Поэтому результаты, полученные при полном пренебрежении внутренним трением, являются в лучшем случае только приближением к действительным движениям жидкости, а именно — теоретически определенные течения в общем случае тем более соответствуют действительным течениям реальных жидкостей, чем меньше вязкость рассматриваемой жидкости, однако, с одним существенным ограничением (см. № 55 первого тома): такое приближенное изучение движения реальной жидкости при помощи замены ее жидкостью, совершенно не обладающей трением, возможно только в тех случаях, когда образующийся под влиянием вязкости пограничный слой не отрывается от тела. В тех же случаях, когда пограничный слой с течением времени отрывается от обтекаемого жидкостью тела или от стенок, ограничивающих жидкость, — а это происходит в громадном большинстве случаев, — теоретическое рассмотрение на основе предположения о полном отсутствии внутреннего трения приводит к результатам, совершенно не совпадающим с действительными явлениями.

Классическим примером является проблема сопротивления равномерно движущегося в жидкости твердого тела, например шара. Теоретическое исследование этого случая, произведенное в предположении жидкости без трения, приводит, как мы увидим это в № 76, к результату, что сопротивление равномерно движущегося относительно окружающей жидкости шара равно нулю, что находится в противоречии с опытом. В этом случае, как это будет показано ниже, как раз и происходит вышеупомянутое отрывание пограничного слоя, придающее действительной картине течения характер, совершенно отличный от того, который соответствует теоретической картине.

Так как гидродинамика жидкости, не обладающей трением, совершенно бессильна для решения проблемы сопротивления реальных жидкостей (умеренная вязкость), а учет вязкости приводит к до сих пор еще недостаточноенным математическим трудностям, то пока исследование законов сопротивления жидкостей возможно только эмпирическим путем — при помощи экспериментальных данных.

---

<sup>1)</sup> В тех случаях, когда мы говорим просто о жидкостях, мы подразумеваем жидкости и газы с незначительным внутренним трением, такие, как, например, вода или воздух. Говоря же о вязких жидкостях, мы имеем в виду жидкости с большим внутренним трением, вроде глициерина или патоки.

Для этой цели были произведены и производятся до настоящего времени многочисленные экспериментальные исследования, причем особенно много — для воздуха и воды. Могучий толчок эти исследования получили в начале настоящего столетия благодаря быстрому развитию авиации и воздухоплавания, крайне заинтересованных в том, чтобы заранее можно было определять то сопротивление воздуха, которое должна испытывать в полете та или иная конструкция аэроплана или дирижабля. Так как эти исследования производились обыкновенно в искусственно создаваемом потоке воздуха, в котором подвешивались модели аэроплана или дирижабля, и затем измерялись их подъемная сила и лобовое сопротивление, то оказалось необходимым внести ясность в вопросы механического подобия этих явлений по сравнению с явлениями в натуральную величину.

Однако, прежде чем заняться подробнее законами механического подобия, остановимся вкратце на некоторых основных понятиях гидродинамики, а также на понятии внутреннего трения жидкости, имея в виду тех читателей, которые не читали первого тома.

---

## I. Основные понятия гидродинамики.

**1. Уравнение Эйлера для одномерных течений.** Будем исходить из понятия линий тока жидкости, находящейся в движении. Под линиями тока мы понимаем те кривые, направление которых в каждой точке совпадает с направлением скорости в рассматриваемой точке. Совокупность линий тока, проходящих через небольшую замкнутую кривую, образует — при условии непрерывности скоростного поля — так называемую трубку тока.

Если при движении жидкости состояние ее, т. е. скорость, давление, плотность и т. д., в каждой точке занимаемого ею пространства остается все время постоянным, то остается постоянной и картина (спектр) линий тока. Такое течение называется установившимся.

Так как линии тока всюду имеют направление скоростей, то в случае установившегося движения трубку тока можно рассматривать как жесткую трубку, внутри которой течет жидкость. Из этого, вследствие постоянства материи, следует, что секундное количество жидкости, протекающей через трубку тока, постоянно для каждого поперечного сечения. Если через  $F$  обозначить поперечное сечение трубы тока, через  $\rho$  — плотность (которая не должна быть обязательно постоянной) и через  $w$  — скорость, то так называемое уравнение непрерывности для трубы тока (фиг. 1) будет иметь вид:

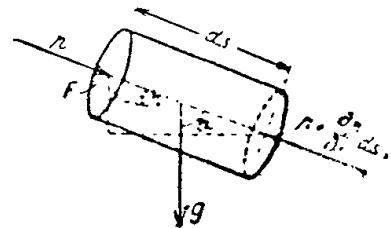
$$\rho F w = \text{const.} \quad (1)$$

Перейдем теперь к выводу важного динамического соотношения для того случая, когда дело идет о жидкости, не обладающей трением. Для этой цели рассмотрим элемент жидкости в форме бесконечно малого цилиндра внутри трубы тока (фиг. 2). Для каждой отдельной частицы жидкости должен быть справедлив основной закон механики: произведение массы на ускорение равно сумме сил, действующих на частицу жидкости. Поэтому, прилагая этот закон к элементу жидкости, изображенному на фиг. 2, и пользуясь указанными там обозначениями ( $\rho$  — плотность,  $g$  — ускорение силы тяжести), получаем:

$$\underbrace{\rho dF ds \cdot \frac{Dw}{dt}}_{\text{масса ускорение}} = \underbrace{g \rho dF ds \cos \alpha}_{\text{сила тяжести}} + \underbrace{dF \left[ p - \left( p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) \right]}_{\text{сила давления}}.$$



Фиг. 1. Трубка тока.



Фиг. 2. Силы, приложенные к элементу жидкости, не обладающей трением

Продольное субстанциальное ускорение  $\frac{Dw}{dt}$  частицы жидкости складывается в самом общем случае из двух частей:

1) из изменения скорости в единицу времени  $\frac{dw}{dt}$ , обусловленного тем, что скорости в отдельных точках пространства меняются соответственно зависимости скоростного поля от времени (локальная производная);

2) из изменения скорости в единицу времени, обусловленного тем, что частица жидкости при своем движении попадает в места с другими скоростями (конвективная производная). Выражением изменения скорости от места является  $\frac{dw}{ds}$ ; изменение же места в единицу времени выражается скоростью  $w$  частицы жидкости; поэтому конвективная производная равна  $w \frac{dw}{ds}$ , и, следовательно, субстанциальной производной скорости, т. е. субстанциальным ускорением, будет

$$\frac{Dw}{dt} = \frac{dw}{dt} + w \frac{dw}{ds} \text{ *)}.$$

Подставляя это выражение для ускорения частицы жидкости в вышеннаписанное уравнение, получаем после деления обеих частей уравнения на  $\rho dF$ :

$$\frac{dw}{dt} ds + w \frac{dw}{ds} ds = g ds \cos \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} ds.$$

Это есть так называемое уравнение Эйлера (умноженное на элемент пути  $ds$ ) для одномерного течения.

**2. Уравнение Бернулли для одномерных течений.** Предположим теперь, что 1) течение установившееся, т. е.  $\frac{dw}{dt} = 0$ , и что 2) жидкость однородная и несжимаемая, т. е.  $\rho = \text{const.}$ ; тогда интегрирование уравнения Эйлера по  $ds$ , т. е. вдоль линии тока (если при этом положить  $ds \cos \alpha = -dh$ , см. фиг. 2), приводит к важному соотношению:

$$\frac{w^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = \text{const.} \quad (2a)$$

Это фундаментальное для динамики жидкости без трения уравнение устанавливает связь между скоростью, положением и давлением тех частиц жидкости, которые находятся на одной и той же линии тока, и называется уравнением Бернулли. Так как мы предположили, что плотность  $\rho$

\*) Это выражение можно также получить, если положить  $w = f(t, s)$ ; тогда полным дифференциалом  $w$  будет:

$$Dw = \frac{dw}{dt} dt + \frac{dw}{ds} ds,$$

откуда, после деления на  $dt$ , получается:

$$\frac{Dw}{dt} = \frac{dw}{dt} + \frac{dw}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dw}{dt} + w \frac{dw}{ds}.$$

во всей жидкости постоянна, то это уравнение для того случая, когда нет свободной поверхности, может быть упрощено, если только под  $p$  понимать не абсолютное давление, а разность абсолютного давления и того давления, которое было бы в рассматриваемой точке в случае покоящейся жидкости. Тогда уравнение Бернулли принимает форму:

$$\frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const.}, \quad (2b)$$

причем особо следует подчеркнуть, что в общем случае постоянная отнюдь не одинакова для различных линий тока.

До сих пор мы не учитывали внутреннего трения, или вязкости, которой обладает в большей или меньшей степени всякая жидкость, и на основе этого предположения вывели уравнение движения для одномерного течения жидкости. Но даже в жидкостях с очень незначительной вязкостью, которые практически можно рассматривать как не обладающие трением, так как для них в широкой мере удовлетворяется вышеприведенное уравнение движения и выведенное из него уравнение Бернулли,—даже и в таких жидкостях могут быть области, где силы трения настолько дают себя знать, что предположение об отсутствии трения не оправдывается даже приближенно. Такие области имеются всегда в непосредственной близости тел, вдоль которых жидкость течет. Здесь, кроме сил инерции (масса, умноженная на ускорение), приходится вводить в рассмотрение еще силы трения, чем мы в дальнейшем и займемся.

**3. Определение вязкости.** Чтобы нагляднее представить себе сущность трения жидкости, рассмотрим движение жидкости, получающееся в том случае, если одну из двух плоских параллельных пластинок, между которыми находится жидкость, начать передвигать в своей плоскости относительно другой пластиинки.

Будем считать, что нижняя пластиинка неподвижна, а верхняя — движется слева направо со скоростью  $u_1$  (фиг. 3). Экспериментальное наблюдение того движения жидкости, которое при этом устанавливается, показывает, что:

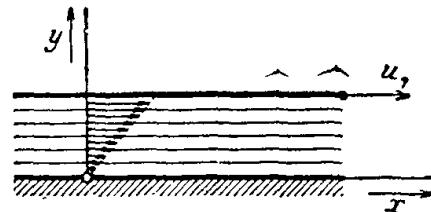
1) жидкость прилипает к поверхностям пластиинок, так что те частицы жидкости, которые непосредственно прилегают к пластиинкам, обладают теми же скоростями, что и пластиинки;

2) изменение скорости между пластиинками совершается по линейному закону, т. е. в нашем случае покоящейся нижней пластиинки скорость в какой-нибудь точке между пластиинками пропорциональна расстоянию этой точки от покоящейся, пластиинки (фиг. 3);

3) внутреннее трение жидкости оказывает движению верхней пластиинки сопротивление, которое для единицы площади пропорционально градиенту скорости; следовательно, возникает напряжение сдвига

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}, \quad (\text{закон трения Ньютона})$$

где  $\mu$  есть множитель пропорциональности, являющийся мерою вязкости;



Фиг. 3. Распределение скоростей вязкой жидкости, находящейся между двумя пластиинками, из которых верхняя движется относительно нижней.

он представляет собой материальную постоянную, сильно зависящую от температуры, и называется коэффициентом вязкости или просто вязкостью.

В то время как в упругом континууме (сплошной среде) напряжение сдвига пропорционально деформации (изменению угла)  $\gamma$ , именно:

$$\tau = G\gamma,$$

причем

$$\gamma = \frac{d\xi}{dy}$$

( $G$  — модуль сдвига,  $\xi$  — перемещение точки в направлении  $x$ ), в жидком континууме, как показывает экспериментальное наблюдение, имеет место пропорциональность напряжения сдвига скорости деформации  $\frac{d\gamma}{dt}$ .

В самом деле, если в равенство

$$\tau = \mu \frac{d\gamma}{dt} = \mu \frac{d \frac{d\xi}{dy}}{dt} = \mu \frac{d}{dy} \left( \frac{d\xi}{dt} \right)$$

подставить

$$\xi = ut,$$

следовательно,

$$\frac{d\xi}{dt} = u,$$

то получается соотношение:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}, \quad (3)$$

которое, как мы увидим ниже, в № 12, подтверждается экспериментом.

—