А.Г. Вебстер

Механика материальных точек твердых, упругих и жидких тел

лекции по математической физике

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
А11

А.Г. Вебстер

А11 Механика материальных точек твердых, упругих и жидких тел: лекции по математической физике / А.Г. Вебстер – М.: Книга по Требованию, 2021. – 635 с.

ISBN 978-5-458-26340-5

Эта книга создалась из лекций, которые я в продолжение последнихчетырнадцати лет читал в Clark University, главным образом, для моих слушателей курса физики. Очевидно, что она не подготовляет читателя ни к какому определенному экзамену, от которых мы в Америке в значительной мере свободны. Текст не прерываетсязадачами, предназначенными для упражнения изучающего, которыевстречаются в большинстве обычных курсов и к которым я с трудом мог бы что-либо прибавить. Я сделал попытку изложить то, что существенно для понимания физических явлений, оставляя в стороне все то, что представляет лишь математический интерес. Такнапример, кинематика не трактуется самостоятельно, но приведена в связь с каждым из отделов динамики. Со стороны изучающего предполагается хорошее знакомство с дифференциальным и интегральным исчислениями, но не с дифференциальными уравнениями и высшими отделами анализа. Поэтому оказалось необходимымзначительное число пояснений, некоторые из которых даны в формеприбавлений.

ISBN 978-5-458-26340-5

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА.

Предмет механики может пониматься различно. В значительном большинстве университетов как Европы так и Америки она читается специалистами математиками и считается существенной частью цикла математических дисциплин. На самом деле она представляет только приложение математики к самым основным законам природы, и как таковое является весьма важной для физиков. Вся современная физика пытается „объяснить" или описать явления при помощи движения, с заметным успехом в области учения о свете и электричестве и в кинетической теории газов. Отсюда ясно, что существенное продвижение наших познаний в физике невозможно без знания основ механики. И приходится жалеть о том, что этот предмет часто пренебрегается студентами-физиками, отчасти в силу его трудности, а отчасти в силу того, что существующие в большом числе прекрасные курсы механики предназначаются, главным образом, для математиков и часто, кажется, придают больше значения примерам, относящимся к анализу и тригонометрии, чем разъяснению физических законов.

Цель предлагаемой книги дать в сжатой форме изложение всего того из основ механики, что должно быть известно всякому студенту-физику, и на мой взгляд не меньше того, что достаточно для студента-математика.

Эта книга создалась из лекций, которые я в продолжение последних четырнадцати лет читал в Clark University, главным образом, для моих слушателей курса физики. Очевидно, что она не подготовляет читателя ни к какому определенному экзамену, от которых мы в Америке в значительной мере свободны. Текст не прерывается задачами, предназначенными для упражнения изучающего, которые встречаются в большинстве обычных курсов и к которым я с трудом мог бы что-либо прибавить. Я сделал попытку изложить то, что существенно для понимания физических явлений, оставляя в стороне все то, что представляет лишь математический интерес. Так например, кинематика не трактуется самостоятельно, но приведена в связь с каждым из отделов динамики. Со стороны изучающего предполагается хорошее знакомство с дифференциальным и интегральным исчислениями, но не с дифференциальными уравнениями и высшими отделами анализа. Поэтому оказалось необходимым значительное число пояснений, некоторые из которых даны в форме прибавлений.

В разные времена проявлялись два противоположных направления в изложении механики, оба направления были очень плодотворны. Лагранж в предисловии к своему великому творению — „Аналитической механике"—гордо заявляет: „В этом сочинении не встречается чертежей. Методы, которыми я пользуюсь, не требуют ни построений ни геометрических или механических соображений, но исключительно алгебраических операций, выполняемых по определенному правилу и единообразно. Те, кто любит анализ, с удовольствием увидят, что механика стала его новой ветвью и будут мне благодарны за расширение области анализа". Гордость Лагранжа по отношению к тому, что он сделал механику ветвью анализа, в широкой степени оправдалась результатами, полученными при помощи его общего метода в решении механических задач, и его радость увеличилась бы еще более, если бы он мог предвидеть результаты от распространения его метода на еще более широкие области трудами Максвелла, Гельмгольца и Дж. Дж. Томсона. Тем не менее, пытаясь обходиться без чертежей или их мысленных представлений, мы лишаем сами себя драгоценного вспомогательного средства. Так, говоря о движении волчка, Максвелл выражается следующим образом: „Пуансо подверг вопрос более действительному анализу, чем тот, на который способно исчисление, анализу, в котором представления занимают место символов и легко понимаемые предложения преобладают над уравнениями". Не может быть никакого сомнения в том, что возможность оперировать непосредственно с представлениями, а не с символами, дает большие преимущества, в особенности для физиков. Введенное Гамильтоном понятие векториальных величин было крупным шагом в этом направлении, имеющим особенно большое значение для физиков; Максвелл намекал на частный случай именно этого вопроса,— на идею момента количества движения, или, по терминологии Пуансо, импульсивной пары. О важности этого физического или геометрического представления можно судить по тому применению этого понятия, которым, под названием импульса, Клейн и Зоммерфельд воспользовались в их чрезвычайно интересной работе о волчке. С другой стороны, это понятие импульса, который в данном случае является вектором, можно рассматривать как некоторый частный вид более общего понятия количества движения в обобщенных координатах Лагранжа. Не представит ли поэтому преимущества то, что, сохраняя оба способа выражения, и аналитический и геометрический, мы попытаемся ввести в аналитический метод Лагранжа геометрические аналогии и терминологию? Это вполне возможно сделать, потому что, как это выясняется работами Бельтрами и великолепно во всех деталях разработанным трудом Герца, свойства уравнений Лагранжа связаны со свойствами некоторой квадратичной формы точно такого же вида, какой в геометрии выражается дуга кривой.

С аналитической точки зрения не имеет значения, будет ли число переменных больше или меньше трех; поэтому-то такой естественной представляется здесь геометрическая терминология, дающая более определенную картину рассматриваемых величин. По этой причине я надеюсь, что ни один физик не поставит мне в вину, что я ввел в физический трактат понятие о многомерном пространстве.

Я настаиваю на том, что все введенное мною является просто способом выражения; его преимущество заключается в логической согласованности с результатами геометрии, которая для большинства из нас относится к физике. Во всяком случае весь этот материал введен таким образом, что легко может быть пропущен теми, кому такие аналогии не нравятся. Преимущество хорошей терминологии, равно как ясных физических представлений, должно быть понятно всем, и каждый физик должен признать, сколь многим обязана в этом отношении наша наука Томсону и Тэту.

Предлагаемый труд естественным образом распадается на три части. Первая часть посвящена законам движения вообще и тем методам, которые применимы к системам любого вида. Хотя мы и не имеем в виду студентов, только что приступающих к изучению механики, тем не менее нам казалось необходимым начать с начала и дать изложение Ньютоновых законов движения в математической форме. При этом начало Гамильтона по своему применению является настолько общим, что мы сочли необходимым поместить его ближе к началу; ему уделено много внимания. Я считаю, что как это начало, так и уравнения Лагранжа имеют большое практическое значение, и особенно важны для изучающих физику. То же может быть сказано и относительно энергии,— понятия, которое пытались даже положить в основу всех законов физики. Хотя эти попытки, повидимому, обречены на неудачу, по той причине, что принцип энергии, хотя и дает интеграл, недостаточен для вывода дифференциальных уравнений, понятие энергии должно остаться одним из важнейших понятий механики и поэтому рассматривается в каждой задаче. За этим следует изложение вопросов колебаний, имеющих вместе с сопровождающими их явлениями резонанса большой физический интерес. Далее рассматриваются так называемые циклические системы, от которых, после работ Гельмгольца и Герца, физик, повидимому, может так много ждать. Действительно, в этом направлении были сделаны первые шаги для объяснения природы потенциальной энергии при помощи движения, к этому, быть может, и стремится вся физика. В связи с этим, мы опять упомянем сочинение лорда Кельвина, составляющее эпоху как в механике, так и в теории света.

Вторая часть посвящена движению твердых тел, в частности вращательному движению. Это вопрос чрезвычайной практической важности, в особенности для инженеров, но изучающие физику его часто избегают. Еще Максвелл обращал внимание физиков на этот вопрос и создал чудесный прибор для демонстрации соответствующих явлений — свой знаменитый динамический волчок. Автор рискнул прибавить к нему небольшую деталь, которая позволяет произвести еще некоторые добавочные весьма интересные опыты. Сюда включено также некоторое число практических иллюстраций, представляющих интерес для физика и для инженера.

Третья часть сама собой выделяется среди двух других благодаря тому обстоятельству, что применяемые в ней дифференциальные уравнения являются уравнениями с частными производными, тогда как в других частях мы имели обыкновенные дифференциальные уравнения. Рассмотрению этого вопроса предшествует теория потенциальной функции; эта теория вводит важнейшие математические теоремы и тем самым подготовляет к следующим главам. Многое из этой главы уже вошло в труд автора по теории электричества и магнетизма, но кое-что, касающееся в особенности приложений к геодезии, прибавлено вновь. Далее следует вопрос о деформациях и напряжениях, с приложениями к простейшим задачам теории упругости, включая задачу Сен-Венана по изгибу и кручению призм. Наконец, в гидродинамике излагаются главные вопросы волнового и вихревого движения, с кратким очерком явлений приливов и вязкости жидкости. Таким образом, студент подготовляется к изучению звука, света и электричества.

I. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ.

Глава I.

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ. ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ.

1. **Механика.** Механикой называется наука о движении. Она служит основой физики, поскольку целью ученых является сведение характеристики всех физических явлений к описанию различных состояний движения. По Кирхгоффу [1]), задача механики состоит в том, чтобы вполне и простейшим способом описывать все движения, встречающиеся в природе. Наконец, нашей целью является их классифицирование и обоснование на возможно простых законах. Успех в приближении к этой цели, достигнутый усилиями физиков, математиков и астрономов со времени Галилея и Ньютона, в эпоху Лагранжа и Лапласа и вплоть до Гельмгольца и Кельвина, представляет один из величайших триумфов человеческого интеллекта.

2. **Кинематика.** То, что движется, есть *материя*. Свойства материи мы рассмотрим в дальнейшем. Но мы можем описывать движения, не вникая в природу того, что движется, — такое описание движений составляет особую часть нашего предмета, известную под именем *кинематики*.

Кинематика представляет только обобщение геометрии и может быть названа геометрией движения, потому что, рассматривая в геометрии свойства пространства, в кинематике мы вводим понятие времени, дающее нам новую переменную. Так как положение точки в пространстве известно, коль скоро заданы ее три прямоугольные Декартовы координаты по отношению к определенной системе осей, то ее движение будет вполне определено, если ее координаты будут заданы для любого момента времени, т. е. будут известными функциями времени. Аналитически это представится уравнениями:

$$x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t). \qquad 1$$

Функции f_1, f_2, f_3 должны быть непрерывны, так как ни в каком действительном движении точка не исчезает из одного положения с тем, чтобы появиться через бесконечно малый промежуток времени в новом положении на конечном расстоянии от прежнего. Мы предполагаем также, что эти функции имеют определенные производные для всех значений t.

---

[1]) *Kirchhoff*, Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik, стр. 1.

Так как понятие движения точки заключает в себе четыре переменных, то Лагранж назвал кинематику геометрией четырех измерений. Здесь мы не будем разбирать ни вопроса о природе времени ни способов его измерения, оставляя последний вопрос до рассмотрения тех движений, которые действительно встречаются в природе и на которых основываются все методы измерения времени.

Мы примем как факт, что понятие времени, подобно понятию пространства, является для нас интуитивным. Его точное определение связано с механикой.

3. Скаляры и векторы. В математике нам приходится рассматривать два рода величин: величины, не заключающие понятия направления, названные Гамильтоном *скáлярами* (так как они могут быть охарактеризованы числами, отмеченными на скале), и величины, которые заключают в себе понятие направления и которые называются *векторами*. Расстояние между двумя точками x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad 2$$

представляет скаляр, тогда как разница в геометрическом положении двух точек определяется заданием не только длины, но и направления соединяющего их отрезка прямой. Это обычно достигается заданием его длины s и косинусов углов λ, μ и ν, образуемых этой линией с тремя прямоугольными осями,

$$\cos\lambda, \ \cos\mu, \ \cos\nu,$$

которые в силу тождественного соотношения

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1 \qquad 3$$

дают всего две ~~три~~ независимых данных. С другой стороны, мы можем определить вектор, задав три проекции этого отрезка на координатные оси:

$$\begin{aligned} s_x &= s\cos\lambda = x_2 - x_1, \\ s_y &= s\cos\mu = y_2 - y_1, \\ s_z &= s\cos\nu = z_2 - z_1. \end{aligned} \qquad 4$$

Возводя в квадрат и складывая, мы получим в силу соотношения 3

$$s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = s^2. \qquad 5$$

Под вектором AB мы подразумеваем отрезок прямой в направлении от A к B; его проекции на координатные оси имеют знаки разностей между координатами точек B и A. Вектор определяется как то, что *переносит* нас из точки A в точку B. Символически мы можем написать

$$pt\ A + \overline{AB} = pt\ B,$$

$$\overline{AB} = pt\ B - pt\ A \ [1]).$$

Символ $\overline{AB}$ означает *вектор* AB. Подобным же образом, когда мы хотим отметить, что отрезок s рассматривается как вектор (т. е. что

---

[1]) *pt* сокращенное point — точка. *Прим. перев.*

принимается во внимание как его длина, так и направление), мы будем писать $\bar{s}$.

Из 4 и 5 мы имеем

$$
\begin{aligned}
\cos\lambda &= \frac{s_x}{s} = \frac{s_x}{\sqrt{s_x^2+s_y^2+s_z^2}}, \\
\cos\mu &= \frac{s_y}{s} = \frac{s_y}{\sqrt{s_x^2+s_y^2+s_z^2}}, \\
\cos\nu &= \frac{s_z}{s} = \frac{s_z}{\sqrt{s_x^2+s_y^2+s_z^2}}.
\end{aligned}
\qquad 6
$$

Точно так же, умножая уравнения 4 соответственно на $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ и складывая, мы получим

$$s_x\cos\lambda + s_y\cos\mu + s_z\cos\nu = s. \qquad 7$$

Всякие величины, необходимые для полного определения какой бы то ни было другой величины, называются ее координатами. Точка имеет три координаты; мы видим, что и вектор имеет три, за которые могут быть взяты s_x, s_y, s_z. В этом смысле могут рассматриваться как равные между собой все векторы, имеющие одинаковую длину и направление независимо от абсолютного положения их концов[1]). Однако в некоторых случаях необходимо различать векторы, равные в этом смысле, но концы которых соответственно не совпадают между собой. Для определения такого вектора мы должны знать не только его длину и направление, но также и положение одного из его концов. Такой вектор определится шестью координатами, за которые могут быть взяты три координаты одного из его концов x_1, y_1, z_1, вместе с его проекциями s_x, s_y, s_z или координаты обоих его концов x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2. В обоих случаях будет шесть координат. Такой вектор в отличие от обыкновенного или свободного называется определенным вектором.

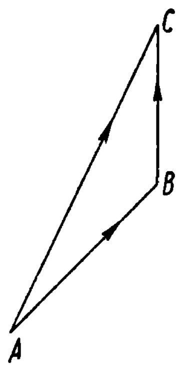

Рис. 1.

4. Сложение векторов. Сложить два вектора значит последовательно выполнить перемещения, определяемые ими, их сумма будет представлять перемещение, эквивалентное этим двум. Например (рис. 1):

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ называются *слагаемыми* вектора $\overline{AC}$, который называется их *геометрической суммой.*

---

[1]) Такие векторы называются свободными в отличие от определенных, определяемых ниже, и от скользящих, могущих быть передвигаемыми вдоль прямых, на которых они расположены. *Прим. Н. Р.*

Мы можем установить следующее правило: при сложении двух векторов надо совместить начальную точку второго с конечной точкой первого, и геометрическая сумма представится вектором, идущим от начала первого слагаемого к концу второго. Это построение дает нам так называемый *треугольник* векторов. Продолжая этот процесс, можно сложить любое число векторов, при этом получается *многоугольник* векторов.

По самой природе построения видно, что геометрическая сумма не зависит от порядка, в котором берутся слагаемые.

Так как отрицательная величина определяется как такая, которая, будучи сложена с соответственной положительной величиной, дает нуль, то вектором отрицательным [1] по отношению к $\overline{AB}$ должен быть вектор $\overline{BA}$, так как по высказанному выше правилу

$$A+\overline{AB}=B,$$

$$B+\overline{BA}=A,$$

откуда

$$A+\overline{AB}+\overline{BA}=A,$$

$$\overline{AB}+\overline{BA}=0,$$

$$\overline{BA}=-\overline{AB}.$$

Также и координаты вектора $\overline{BA}$ равны отрицательным координатам $\overline{AB}$. Скаляр, выражающий длину вектора, был назван Гамильтоном *тензором* вектора; таким образом тензор вектора отрицательного по отношению к данному тот же, что и тензор данного вектора [2]).

Из определения вектора очевидно, что проекция суммы двух векторов на любое направление равна алгебраической сумме проекций слагаемых. Проектируя геометрическую сумму на направления трех координатных осей и отмечая проекции слагаемых значками, мы получим для ее проекций

$$s_x=s_{1x}+s_{2x},$$

$$s_y=s_{1y}+s_{2y},$$

$$s_z=s_{1z}+s_{2z},$$

$$s^2=(s_{1x}+s_{2x})^2+(s_{1y}+s_{2y})^2+(s_{1z}+s_{2z})^2$$

и для суммы любого числа векторов

$$s^2=(\Sigma s_x)^2+(\Sigma s_y)^2+(\Sigma s_z)^2. \qquad 8$$

Мы можем легко найти выражение для проекции какого угодно вектора $\bar{s}$ на любое направление, заданное косинусами углов, обра-

---

[1]) В русской литературе установился термин „противоположный". *Прим. Н. Р.*

[2]) В виду того, что в настоящее время термин „тензор" получил другое специальное значение, в упомянутом выше смысле мы будем заменять его термином „модуль". *Прим. перев.*

зуемых им с осями координат $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$. Для угла ϑ между двумя направлениями, заданными косинусами $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, $\cos\lambda'$, $\cos\mu'$, $\cos\nu'$, мы имеем

$$\cos\vartheta = \cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\nu\cos\nu',$$

но в силу 6 мы имеем для $\dot{s}$

$$\cos\lambda' = \frac{s_x}{s},\ \cos\mu' = \frac{s_y}{s},\ \cos\nu' = \frac{s_z}{s},$$

так что

$$s\cos\vartheta = s_x\cos\lambda + s_y\cos\mu + s_z\cos\nu. \qquad 9$$

Эта формула и дает выражение искомой проекции. Если за направление, на которое производится проектирование, взять направление самого вектора, то это равенство обратится в равенство 7.

Если $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ представляют косинусы углов, образуемых другим вектором $\bar{s}_2$ с осями координат, то

$$\cos\lambda = \frac{s_{2x}}{s_2},\ \cos\mu = \frac{s_{2y}}{s_2},\ \cos\nu = \frac{s_{2z}}{s_2};$$

помножая на s_2, мы получим выражение, симметричное по отношению к обоим векторам,

$$s_1 s_2\cos\vartheta = s_{1x}s_{2x} + s_{1y}s_{2y} + s_{1z}s_{2z}. \qquad 10$$

Это выражение, которое может быть интерпретировано или как произведение модулей обоих векторов на косинус образуемого ими угла, или как модуль любого из этих векторов, умноженный на величину проекции другого вектора на направление первого, настолько важно, что получило специальное название *геометрического произведения* двух векторов. Оно не представляет вектора и является существенно скалярной величиной; взятое со знаком минус, оно было названо Гамильтоном скалярным [1]) произведением векторов.

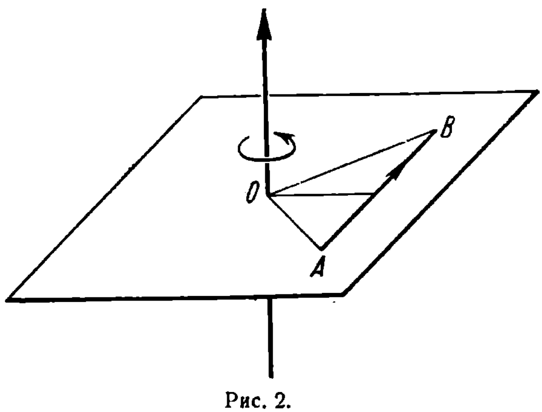

Рис. 2.

Условие перпендикулярности двух векторов выражается равенством нулю их геометрического произведения:

$$s_{1x}s_{2x} + s_{1y}s_{2y} + s_{1z}s_{2z} = 0. \qquad 11$$

---

[1]) В современной литературе скалярное произведение равнозначаще с геометрическим произведением двух векторов, называемым также их внутренним произведением. *Прим. Н. Р.*

5. Моменты. Рассмотрим *определенный* вектор $\overline{AB}$ (рис. 2). Произведение длины AB на длину перпендикуляра, опущенного из точки O на AB, называется *моментом* $\overline{AB}$ относительно O. Численно момент равен удвоенной площади треугольника OAB. Знак момента меняется с изменением направления $\overline{AB}$. Если через точку O мы проведем отрезок, по длине равный величине момента и перпендикулярный к плоскости OAB, то такой отрезок носит название *оси момента* (также *линейного момента*) и некоторым образом определяет момент. Мы будем предполагать эту ось проведенной так, чтобы наблюдатель, стоящий в O спиной к оси, видел движение от A к B происходящим справа налево.

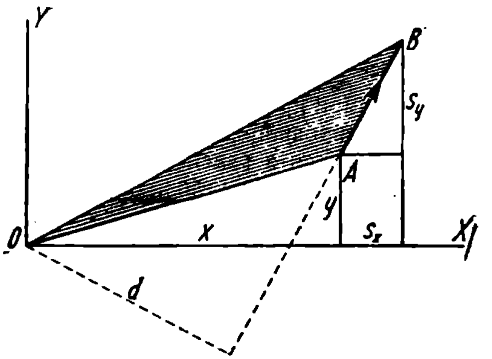

Рис. 3.

Координаты оси (т. е. проекции линейного момента) найдутся по координатам вектора $\overline{AB}$ и точки O. Если мы возьмем точку O за начало координат, плоскость OAB за плоскость xy (рис. 3), назовем через x, y координаты A и через s_x, s_y проекции $\overline{AB}$, то мы получим для площади треугольника OAB

$$\frac{1}{2}\{(x+s_x)(y+s_y)-xy-s_xs_y\}-ys_x=\frac{1}{2}(xs_y-ys_x).$$

Соответственно этому для m, момента относительно точки O вектора, имеющего проекциями s_x и s_y и началом точку с координатами x, y, мы получим

$$m=xs_y-ys_x.$$

Чтобы найти момент геометрической суммы двух векторов, имеющих общее начало, и проекции которых соответственно равны s_x', s_y', s_z', s_x'', s_y'', s_z'', относительно точки O, лежащей в их плоскости, мы пишем

$$m=x(s_y'+s_y'')-y(s_x'+s_x'')=$$
$$=xs_y'-ys_x'+xs_y''-ys_x''=m'+m'',$$

т. е. момент геометрической суммы равен сумме моментов слагаемых. Если плоскость OAB не является одной из координатных плоскостей, то мы можем взять проекции треугольника OAB на три координатные плоскости и получить три момента m_x, m_y, m_z. Если $\cos\alpha$,