

И.Н. Кавун, Н.С. Попова

**Методика преподавания арифметики в
начальной школе**

**Москва
«Книга по Требованию»**

И.Н. Кавун
И11 Методика преподавания арифметики в начальной школе / И.Н. Кавун, Н.С. Попова – М.: Книга по Требованию, 2013. – 417 с.

ISBN 978-5-458-27474-6

Эта книга включает в себе сравнительно небольшую по объему общую часть и обширную специальную часть методике преподавания арифметики в начальной школе по годам обучения. Обе эти части составляют единое целое: основные принципиальные установки, данные в начале книги, раскрываются и конкретизируются в последующих главах. Поэтому, желая успешно преподавать арифметику в одном из классов начальной школы, учитель должен ознакомиться со всеми разделами книги. Вопрос о задачах не затрагивается в общей части – он изложен в специальной части по годам обучения. Тем более важно, чтобы учитель ознакомился не с одной какой-нибудь частностью в развитии этого вопроса, но со всем материалом в целом. Производственные планы для каждого года обучения, а также образцы рабочих планов и примерные разработки уроков будут выпущены дополнительно, в виде особого приложения. Настоящая книга предназначена для учителей начальной школы и для учащихся педтехникумов, но может быть полезна и для студента Педвуза, так как построена на достаточно солидном научном фундаменте.

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

В отличие от этого идеалистического понимания задач методики арифметики, у нас во вводной записке к программе арифметики НКП говорится: „изучение математики должно быть так поставлено, чтобы число и мера служили в руках детей орудием для познания окружающей действительности, для осмысливания дела социалистического строительства, средством для лучшего участия детей в общественной работе и для подготовки их к обороне страны“.

Методика арифметики, как наука. Математика, как наука и как учебный предмет существует и преподается детям, юношам и взрослым в течение многих столетий. Но методика начального обучения арифметике стала создаваться только в XIX ст. До этого времени каждый преподаватель изобретал собственные методы, перекрывая заново и такие методы, которые уже были изобретены другими. Если преподаватель обладал педагогической проницательностью и достаточным математическим образованием, то преподавание у него шло удовлетворительно. В противном случае и чаще всего — методы преподавания были негодные, и результаты получались слабые. В XIX столетии, главным образом в Германии, а затем и в России, явился ряд выдающихся исследователей, создавших стройное учение о методах преподавания начальной арифметики, которое подняло практику преподавания этого предмета на значительную высоту. Однако этому учению многого еще не хватало, чтобы стать наукой. Творцы этого учения руководились, главным образом, усмотрением, основанным на их богатых наблюдениях, отчасти же общими педагогическими принципами. Им не хватало еще научного эксперимента, научной проверки: усмотрение, хотя бы и обогащенное наблюдениями, недостаточно, чтобы создать науку. В XX ст. исследователи, главным образом в Америке, начинают прибегать к научному эксперименту, который уже дал некоторые результаты.¹ Какое же можно сделать предсказание относительно будущего методики арифметики, как науки?

Образование науки обусловлено тремя факторами: потребностью в ней, наличием содержания и метода научного исследования. Есть ли потребность в особой науке — методике арифметики? Можно ли говорить о ее содержании? Существуют ли у нее методы исследования?

В любой момент суток в разных точках земной поверхности протекают в среднем 200 000 уроков математики. Столько же преподавателей разной одаренности и опытности обучают в этот момент математике около 6 миллионов детей и юношей. Из этих преподавателей большинство со средней одаренностью и средней педагогической квалификацией, многие из них начинающие, мало опытные

¹ The National Council of Teachers of Mathematics. 2-nd Yearbook, стр. 73. Новое в американской методике арифметики, ред. Г. Б. Поляка, 1932, стр. 5.

Если бы не существовало никаких методических руководств, то эти преподаватели вынуждены были бы изобретать на свой риск и страх, по своему разумению собственные свои методы. Получались бы неудовлетворительные результаты их работы, от чего страдали бы дети, школа и государство. Наоборот, если бы существовала методика, научно-обоснованная и поэтому более или менее общезначимая, то преподавателю пришлось бы еще много работать, чтобы приобрести опыт, но он в своей практике исходил бы из твердо установленных научных основ и не должен был бы повторять неверные пути, уже испробованные другими. Так же точно молодой врач вооружается в своей врачебной практике опытом, отправляясь от теоретических познаний, усвоенных им в школе и из книг. Все эти соображения приводят нас к выводу, что *потребность в науке о методах обучения арифметике существует.*

Ответим на другой вопрос: существует ли содержание методики арифметики. Содержание ее составляют, с одной стороны, выбор, обоснование и систематизация арифметических понятий, подлежащих изучению, с другой — методы и организация преподавания математики. В первой части методика арифметики опирается на данные математики, во второй — на теорию познания и психологию. Но ни одна из названных наук не занимается вопросами преподавания арифметики: эти вопросы и должны составлять *содержание особой специальной науки.*

Остается еще ответить на вопрос о методах научного исследования преподавания арифметики. Методика арифметики распадается на множество тем, и каждая тема должна подвергнуться сперва теоретической обработке на основе математической теории, теории познания, психологии и педологии. Это — дедуктивный метод исследования. Выработанная теория подлежит опытному педологическому испытанию в школе: это — индуктивный метод исследования. В итоге этих исследований вырабатывается научная теория.

Но возможна ли наука о преподавании математики? Все явления жизни и деятельности человека доступны научному исследованию, а потому возможна наука о преподавании любого предмета.

Итак, методика арифметики обладает *методами научного исследования.* Научная работа над вопросами обучения арифметике уже ведется и сейчас, она будет продолжаться и обогащаться, в результате чего создастся — в этом нельзя сомневаться — наука о методах обучения арифметике.

ЦЕЛЬ ОБУЧЕНИЯ АРИФМЕТИКЕ.

Образовательная цель. Ближайшая цель обучения арифметике в начальной школе состоит в том, чтобы научить детей называть и записывать целые числа, сознательно производить над целыми числами четыре основные арифметические действия, выполнять

некоторые действия над простейшими и над десятичными дробями, применять арифметические действия к решению задач. Эти элементы арифметических знаний представляют собой *систему* понятий, находящихся между собою в причинной и генетической связи: понятия сложения образуются на основе числового ряда; понятия умножения вытекают из сложения; понятия вычитания и деления, как действий обратных сложению и умножению, берут свое начало от этих действий.

В процессе производства действий возникают представления об их *законах*, которые в начальной школе остаются еще не высказанными, не облеченными в форму точной арифметической речи, но все же существуют в сознании учащихся и применяются ими при вычислениях, в особенности устных. Система арифметических понятий ученика представляет собой зачатки научного мышления, отличного от привычного ему обыденного мышления. Поэтому изучение арифметики является верным средством для развития мышления, надежным путем к умственной культуре.¹

Разовьем эту мысль подробнее и конкретнее. Начальная арифметика дает материал для *индуктивного* и *дедуктивного* мышления, так как общие суждения в ней, образуясь из частных конкретных примеров, становятся затем основой для других частных суждений. Так, решая ряд примеров и задач, относящихся к делению, учащиеся усваивают понятия о делении, как о действии, обратном умножению (индуктивный процесс). Этим понятием они пользуются при делении. Например, деля 375 на 75, они подбирают частное путем умножения (дедуктивный процесс).

Занятия арифметикой дают поводы для развития способности *обобщения* и *отвлечения*. Так, дети, оперируя с предметами счета и с конкретными числами, различают два вида деления, как две обособленные операции. Затем постепенно эти операции объединяются в одно отвлеченное и общее понятие деления, обобщающее оба вида деления.

При надлежащем методе обучения арифметике у учащихся вырабатывается сознание связи между понятиями: арифметических действий с нумерацией и с другими основными понятиями, действий над дробями с представлением дроби и т. д.

Ребенок, поступающий в начальную школу, не обладает еще умением передавать ход своих мыслей и нередко принимает результат своего суждения за точку его отправления. Одному ученику была предложена задача:

От 7 м ленты отрезали 1 м, остаток разрезали на два равные куса. Какой длины каждый кусок?

¹ Dr. W. Lietzmann. — Methodik des mathematischen Unterrichts. 1926, T. 1. (стр. 52).

Когда его спросили, как он будет решать задачу, он ответил, что он прибавит $3 м$ к $3 м$ и еще $1 м$.

Этот ребенок принял результат суждения за его начало.

В течение четырех лет дети успевают перерешать множество примеров и задач возрастающей сложности. Объясняя решения этих задач и примеров, они, с одной стороны, усваивают ряд технических слов и оборотов речи, а с другой, учатся наблюдать за своими собственными мыслями, приводить их в правильную последовательность и более или менее правильно выражать их. Всякая неправильность в мышлении или неточность в речи легко обнаруживается и исправляется, и таким образом занятия арифметикой развивают способность *последовательного мышления и точной речи*.¹

Кроме числовых понятий дети приобретают в начальной школе некоторые геометрические понятия, относящиеся к простейшим геометрическим фигурам.

Итак, изучая арифметику, дети овладевают элементарными знаниями числовых и геометрических отношений и кроме того приобретают зачатки математического мышления.

Возникает вопрос, оказывает ли влияние развитие математического мышления на общее умственное развитие ребенка. На этот вопрос можно ответить условно утвердительно: если арифметика преподается так, что она находится в постоянной связи с жизнью и с другими областями знания, то общее умственное развитие несомненно выигрывает от развития математического мышления, которое в этом смысле является предпосылкой для развития общего научного мышления.

Практическая цель. Изучение теории в курсе арифметики все время сочетается с практикой, которую можно понимать в двух смыслах: под практикой в широком смысле можно подразумевать решение каких бы то ни было задач, служащих для развития и закрепления теории; в более ограниченном смысле — решение задач, заимствованных из жизни, из других учебных предметов, из социалистического строительства, и расчеты, связанные с трудовой деятельностью ребенка в школе.

Учащиеся, оканчивающие начальную школу, должны быть вооружены твердыми вычислительными навыками в области целых чисел и умением производить простейшие операции с дробями. Они должны обладать навыками в решении сложных, но незамысловатых задач.

Выше была высказана мысль, что математическое мышление содействует общему развитию учащихся, если они пользуются им для решения задач, заимствованных из практики быта и социалистического строительства и из других учебных предметов. Эти задачи

¹ Сравни: П и а ж е. — Речь и мышление ребенка, Гл. IV, 1932 г.

служат верным средством познания действительности. Чтобы проникнуться этой мыслью, достаточно прочесть любую задачу из современных задачников и представить себе процесс решения ее.

Два грузовых автомобиля при перевозке зерна израсходовали вместе 6 кг 300 г бензина. Какое расстояние прошли автомобили, если на 1 км пути один из них расходует 170 г бензина, а другой на 80 г больше?

Для решения этой задачи надо представить себе два автомобиля, расходующие указанное количество бензина; надо представить себе, что расстояние они прошли одинаковое, а бензину один из них израсходовал больше, а другой меньше и т. д. Все эти представления должны быть ярки, отчетливы, в противном случае задача не может быть решена. Задача отображает часть жизни, которую учащиеся познают в количественной и качественной форме. Разнообразные задачи знакомят их с действительностью в ее многообразии. Ряд задач в наших задачаниках отражают технику и производство. Если они подобраны планомерно — так, чтобы учащиеся, решая их, могли знакомиться с главнейшими этапами производства — добычей и подвозом сырья, источником энергии и выпуском фабриката, с преимуществами машинного труда перед ручным и т. д., то такие задачи будут служить одним из средств политехнического образования.

Образовательную и практическую цели обучения математике мы отделили одну от другой ради удобства их описания. В действительности к обеим этим целям ведет единый процесс обучения, который ясно выражен словами Ленина: „от живого созерцания к абстрактному мышлению, а от него к практике“.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА АРИФМЕТИКИ В ШКОЛЕ ПЕРВОЙ СТУПЕНИ.

Система арифметических понятий. Как бы ни был прост и элементарен курс арифметики, преподаваемый детям, он должен представлять собой систему связанных между собой понятий (стр. 7).

Система арифметических понятий, изучаемых в школе первой ступени, может быть представлена в виде трех групп понятий: 1. понятия о целом числе и об основных действиях над целыми числами; 2. первоначальные понятия о дробном числе и об основных действиях над дробями; 3. понятия о простейших геометрических фигурах, об измерении и системе мер, о действиях над составными именованными числами. Соответственно этим трем группам понятий учащийся должен приобрести за 4 года обучения:

1. Твердые знания и навыки в производстве четырех арифметических действий над целыми числами.

2. Первоначальные сведения об обыкновенных и десятичных дробях.

3. Элементарные сведения из области наглядной геометрии, измерительные навыки, твердое знание системы мер, особенно метрической, и четырех действий над составными именованными числами.

Ступенчатость (концентричность) курса арифметики. Арифметические понятия образуются и формируются постепенно и длительно. Процесс их образования неотделим от процесса усвоения вычислительных приемов и приобретения вычислительных навыков.

Для пояснения этой мысли сделаем беглый обзор образования понятий действия сложения.

Складывая числа, сумма которых не превышает десятка, дети начинают соединять присчитываемые единицы в группы.

$$3 + 4 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 3 + 2 + 2 = 7$$

Складывая позднее однозначные числа, сумма которых превышает десяток, снова прибегают к группировке единиц второго слагаемого.

$$7 + 6 = 7 + 3 + 3 = 13.$$

Складывая на втором году двузначные числа, учащиеся группируют единицы обоих слагаемых сообразно с десятичным составом чисел:

$$27 + 15 = (20 + 7) + (10 + 5) = (20 + 10) + (7 + 5) = 30 + (10 + 2) = 42.$$

На третьем году, при сложении многозначных чисел, складывают соответствующие их разряды.

$$3274 + 675 = (3000 + 200 + 70 + 4) + (600 + 70 + 5) = 3000 + (200 + 600) + (70 + 70) + (4 + 5) = 3000 + 800 + (100 + 40) + 9 = 3000 + (800 + 100) + 40 + 9 = 3949.$$

Завершаются приобретенные таким образом учащимися понятия уже на пятом и на шестом году обучения, где законы арифметических действий выражаются при помощи правил или буквенных тождеств.

Из приведенного здесь примера мы усматриваем, что основные понятия действия сложения вырабатываются в течение ряда лет и непрерывно в связи с вычислительными приемами сложения, по мере расширения числовых областей.

Чтобы достичь постепенного формирования понятий и усвоения вычислительных приемов, надо начальный курс арифметики расположить по ступеням.

Ступени эти называют иногда концентриками. Перечислим здесь ступени курса целых чисел, оправданные и практикой и теоретическими соображениями.

Первая ступень — счет, цифры, сложение и вычитание в пределах десятка.

Вторая ступень — нумерация и арифметические действия в пределах двух десятков.

Третья ступень — нумерации и арифметические действия в пределах сотни.

Четвертая ступень — нумерация и действия в пределах тысячи.

Пятая ступень — нумерация и арифметические действия над числами любой величины.

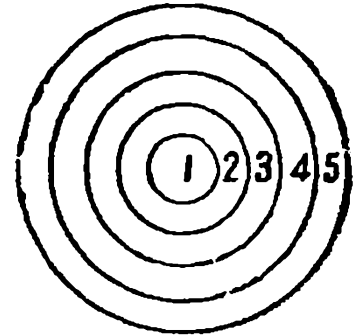
В пользу ступенчатого построения курса арифметики приводят обыкновенно следующие доводы:

На каждой ступени обучения понятия имеют ту степень отвлеченности и общности, которая соответствует умственному развитию учащихся.

Каждая следующая ступень, давая учащимся новые знания, охватывает вместе с этим все предыдущие ступени. Поэтому ученик возвращается к одному и тому же понятию неоднократно и вполне им овладевает.

На чертеже представлена геометрическая иллюстрация ступеней или концентрических окружностей.

Анализ программы арифметики НКП.
Изложим общие основания программы арифметики НКП.



Черт. 1.

1. В программах НКП все содержание арифметики распределяется по годам и по четвертям. Каждый год этой программы включает все три группы понятий, о которых было сказано выше (стр. 9), т. е. арифметику целых чисел, дробей и измерения. Каждая четверть включает арифметику целых чисел и измерения.

2. Каждый год начинается повторением пройденного в предыдущем году и заканчивается повторением пройденного в истекшем году.

3. Центральное место на всех годах обучения занимает арифметика целых чисел.

4. Преобладающее место и значение имеют вычисления. Устные вычисления проводятся настойчиво через все четыре года. В первые два года вычисления производятся только устно. На третьем и четвертом году изучаются письменные механизмы арифметических действий.

5. Система арифметических понятий и вычислительных приемов разворачивается в строгой последовательности по ступеням: каждая новая ступень основывается на хорошо проработанных и твердо усвоенных предшествующих ступенях, каждое новое понятие вырастает из предыдущих понятий.

6. Арифметика целых чисел располагается по годам следующим образом:

Главное содержание курса первого года составляют концентры первого и второго десятка.

Кроме них в программу включены простейшие случаи сложения и вычитания в пределах сотни. В этом году дети вполне овладе-

вают таблицами сложения и вычитания, начинают изучение таблиц умножения и деления и знакомство с понятиями четырех арифметических действий.

На втором году главное содержание курса составляет концентр первой сотни. Кроме того к этому году отнесены простейшие случаи устных действий в пределах тысячи. На втором году дети усваивают вполне понятия и таблицы арифметических действий и овладевают основными устными приемами вычисления.

На третьем году вырабатываются письменные механизмы арифметических действий в пределах миллиона, при этом большое внимание обращается на аккуратные и изящные записи.

На четвертом году навыки в производстве письменных действий над числами любой величины укрепляются, понятия об арифметических действиях углубляются и оформляются; изучаются определения арифметических действий и соотношения между прямыми и обратными арифметическими действиями.

7. Арифметика дробей располагается по годам таким образом:

На втором году дети знакомятся с половиной, четвертью и восьмой. Из долей составляются дроби. Этот процесс образования дробей делает возможным переход к сложению и вычитанию дробей, составленных из равных долей единицы.

На третьем году расширяется понятие сложения и вычитания простейших дробей: дети изучают случай сложения и вычитания простейших дробей, когда знаменатель одной дроби есть число кратное другим знаменателям.

На четвертом году проходят сокращенный курс десятичных дробей, исключая умножение и деление дробей, и весьма сокращенный курс обыкновенных простейших дробей, исключая умножение и деление этих дробей.

8. Элементы геометрии и измерение распадается по годам так:

На первом году дети усваивают образы прямой и кривой линии, фигуры — прямоугольник, треугольник, круг, и тела — куб, брусок и шар; учатся измерять метром; получают первые представления о килограмме и литре.

На втором году область измерения расширяется: дети знакомятся с километром, с мерами времени и с мерами веса.

Измерения производят не только в классе, но и на местности.

На третьем году меры, изученные в предыдущих годах, приводятся в систему и дополняются мерами площади. Содержание измерительных работ составляет главным образом измерение площадей прямоугольных фигур.

На четвертом году — область измерения расширяется знакомством с измерением объема прямоугольного параллелепипеда и с кубическими мерами.

В этом году дети производят измерения на местности, вычерчи-

вают планы и измеряют площади многоугольных участков земли с прямыми углами

9. В процессе измерения дети получают осязательные представления о мерах, приобретают понятия о составном именованном числе и навыки в действиях над этими числами.

СИСТЕМА И РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЙ ЧИСЛА И АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ.

НУМЕРАЦИЯ.

Цель нумерации. Ряд целых чисел неограничен, а тех чисел, которые употребительны в жизни и в науке, весьма много, и если бы каждое число требовало особого названия и особого знака, человек оказался бы бессильным, чтобы удержать их в своей памяти.

Нумерация есть учение о способах названия и письменного обозначения целых чисел с помощью немногих слов и немногих знаков. Обыкновенно различают устную и письменную нумерацию. Устная нумерация есть учение о названии чисел с помощью немногих слов; письменная нумерация есть учение о записи чисел при помощи немногих знаков.

Устная нумерация. Средством, сокращающим число слов, необходимых для названия чисел, служит группировка единиц в множества: единицы множества соединяют в группы, которые получают особые названия. Каждое из чисел до известного предела имеет особое название. В современной нумерации первые десять чисел называются каждое особым именем. Для названия чисел, больших десяти, единицы множества соединяют в десятки, и десятки считают до десяти десятков так же, как считаются простые единицы. А именно: десяток (десять), два десятка (двадцать), три десятка (тридцать), четыре десятка (сорок) и т. д.

Благодаря этому для названия всех чисел, начиная от одиннадцати (один и десять) до девяносто девяти (девяносто девять и девять) новых слов, кроме первых десяти, не требуется.

Совокупность единиц, заключающихся в 10 десятках, получает особое название — сто, сотня. Для названия чисел, больших сотни, единицы множеств соединяют в сотни, которые считают от одной до десяти сотен так же, как простые единицы. Благодаря этому для названия всех чисел, начиная от ста и до девятисот девяноста девяти, новых слов, кроме слова „сто“ не требуется.

Множество единиц в 10 сотен получает особое название — тысяча. Для названия чисел, больших тысячи, их единицы соединяют в тысячи, которые считают до 10 тысяч так же, как и простые единицы. Благодаря этому новых слов, кроме тысячи, в известных пределах счета не требуется.

Если бы мы продолжали тот же путь в выборе названий для новых групп единиц, то мы должны были бы назвать особым словом 10 тысяч и 10 десятков тысяч. В древне-русском языке такие слова существовали: десяток тысяч назывался „тьма“, и десяток десятков тысяч — „легион“. Тогда требовалось для названия всех чисел до миллиона четырнадцать слов: один, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять, десять (десяток), сто (сотня), тысяча, тьма, легион.

Для дальнейшего сокращения слов, служащих для названия чисел, условимся счет тысяч производить от одной до девятисот девяноста девяти тысяч так же, как мы считали единицы от единицы до девятисот девяноста девяти. Тогда особых названий „тьмы“ для десятка тысяч и „легиона“ для десяти десятков тысяч не потребуется. Назовем число, заключающее тысячу тысяч единиц, словом миллион и будем миллионы считать от одного до девятисот девяноста девяти миллионов так же, как и единицы от одной до девятисот девяноста девяти единиц. Тогда для названия всех целых чисел до миллиарда (включительно) потребуется всего четырнадцать слов.

Такая экономия в числительных именах достигнута благодаря *группировке единиц*, из которых составляются числа. *Группы единиц*, из которых мы составляли множества, были двоякого рода — *десятичные и тысячные*:

а) десяток, сотня, тысяча, десяток тысяч и т. д.

б) тысяча, миллион, миллиард и т. д.

Простые единицы составляют первый разряд числа и называются единицами первого разряда.

Десятки — второй разряд и называются единицами второго разряда.

Сотни — третий разряд и называются единицами третьего разряда и т. д.

Единицы — от одной до девятисот девяноста девяти — называются единицами первого класса. Тысячи составляют второй класс и называются единицами второго класса и т. д.

Обобщим основные правила устной нумерации, приняв для простоты речи за основание нумерации число десять.

1. *Отношение единиц двух смежных разрядов, именно высшей единицы к низшей, постоянно и равно основанию, т. е. десяти.*

2. *Отношение единиц двух смежных классов постоянно и равно в нашей нумерации тысяче.*

3. Все числа от единицы до десяти имеют особые названия. Особые названия получает группа — десять десятков, а также все классовые единицы — тысяча, миллион, миллиард и т. д.

4. Числа составляются с помощью сложения и умножения. На-