

С. Феферман

Числовые системы
Основания алгебры и анализа

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
С11

С11 **С. Феферман**
Числовые системы: Основания алгебры и анализа / С. Феферман – М.: Книга по Требованию, 2013. – 450 с.

ISBN 978-5-458-26844-8

Цель этой книги состоит в последовательном построении и развитии основных числовых систем математики, именно положительных целых чисел, целых чисел, рациональных чисел, действительных чисел и комплексных чисел. По мнению многих математиков, эта область пауки должна быть изучена каждым серьезным студентом-математиком. И лучше всего, если он сделает это как можно быстрее после первого года занятий математическим анализом или перед, или во время изучения более тонких областей анализа и алгебры.

ISBN 978-5-458-26844-8

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

Куайн 412
Куммер 410
Лагранж 311, 374
Лейбниц 32
Линдон 163
Лиувилль 319, 323
Мальцев 8, 163
Морган де 46
Морри 422
Муавр 342
Нейман фон 412
Ньютон 298
Паскаль 142
Пеано 78, 412
Пифагор 169, 239, 346
Рассел 34, 412
Риман 62

Робинсон 164
Ролль 311
Рудин 427
Тарский 359
Тарталья 370
Тейлор 285
Ферма 33, 407, 410
Феррари 370
Ферро 370
Френкель 412
Фурье 12
Цермело 412, 420
Чебышев 410
Штурм 301, 302, 358
Эйзенштейн 409
Эйлер 406
Эрдеш 410

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютная величина 126, 334
Аксиома 14
— абстракции 415
— бесконечности 78, 416
— выбора 30, 46, 113, 417
— объемности 413
— ограниченного образования
множеств 415
— систем Пеано 78
— существования множеств 413
— экстенциональности 413
Аксиомы Пеано 79
Алгебра булева 44
— линейная 220
— множеств 37, 41
Алгоритм 20, 220, 307
— деления 146, 229
— Евклида 150, 233
Антецедент 22
Антирефлексивность 56
Антисимметричность 45, 56, 95
Аргумент 336
Ассоциативность 45, 89, 93, 106, 118,
139
База 390
— линейная 393

Включение множеств 31
Возведение в степень 93, 121, 141,
204, 308
Вычисление корней 297, 358
Вычитание 118
Геометрические проблемы
построений 397
Геометрия аналитическая 202
— синтетическая 202
Гомоморфизм 162
Грань верхняя 250
— — наименьшая 250
— — точная 250
— нижняя 250
— — наибольшая 250
— — точная 250
Группа 384
Движение жесткое 424
Двойственность утверждений 45, 119
Делимость полиномов 183
Делитель 147
— общий наибольший 149, 231
Диаграмма Аргана 342
— Венна 37
Дискриминант полинома 366
Дистрибутивность 45, 91, 118, 138

Доказательство от противного 23
 — по индукции 79, 153
 Дополнение множества 38, 415
 Дробь непрерывная 281
 Единица 118
 — мнимая 330-
 Единственность разложения на
 простые множители 153, 233
 Зависимость алгебраическая 396
 — линейная 390
Задача Диофанта 168
 Задачи на построение классические
 404
 Заключение 22
 Закон сокращения 90, 93
 — трихотомии 90, 95
 Законы Де Моргана 46
 Идеал 167, 410
 Измерение длин 200, 242
 Изоморфизм 68, 162
 — непрерывно упорядоченных полей
 257
 — полей частных 213
 — простых трансцендентных
 расширений 176
 — систем Пеано 84
 — упорядоченных областей
 целостности 134
 — A -кратных трансцендентных
 расширений 187
 Импликация 22
 Инверсия отношения
 53
 — функции 65
 Индивидуал 412
 Индукция 79
 — возвратная 153
 Интеграл 422
 Интервал 47
 — замкнутый 262
 Интуиционизм 20
 Квадратура круга 409
 Класс 25
 — конгруентности 166
 — сечения верхний 245

— — нижний 246
 — эквивалентности 58
 — $\text{mod } m$ 166
 — $\text{mod } p(\xi)$ 382
 Кольцо коммутативное с единицей
 118
 — целых чисел 136
 Комбинация линейная 151, 390
 Коммутативность 45, 89, 92, 106
 Композиция отношений 56
 — функций 66
 Консеквент 22
 Константа 15
 Конструируемость 401, 408
 Координаты 397
 Корень квадратный 330, 332
 — — главный 330, 332
 — полинома 183
 — — кратный 236
 — — простой 236
 — уравнения 3-й степени 370
 — — 4-й степени 373
 — функции 182
 Корень n -й степени 296, 343
 — — — главный 343
 Косинус 333, 341, 422
 Коэффициент полинома старший 182
 Коэффициенты полинома 182
 — полиномиальной функции 173
 — системы линейных уравнений 218
 Кратное 120
 Круг единичный 335, 422
 — сходимости 356
 Логика 15
 — символическая (формальная —
 математическая) 15
 Максимум абсолютный 20, 292
 Матрица 220
 Метаматематика 421
 Метод Кантора 312, 317
 — Лиувклля 319, 320
 — Ньютона 298
 Метрика 265
 Минимум абсолютный 292

Многоугольник правильный 406
 Множества попарно
 непересекающиеся 41
 Множество 25, 412
 — бесконечное 27, 70
 — вполне упорядоченное 97
 — всех подмножеств 31, 36, 313, 414
 — замкнутое относительно операции 63
 — канторово совершенное 324
 — конечное 27, 70, 104
 — линейно упорядоченное 95
 — непрерывно упорядоченное 245, 253
 — несчетное 315
 — ограниченное 250
 — — сверху 249
 — — снизу 250
 — плотно упорядоченное 205
 — пустое 33
 — счетное 315
 Модуль 126, 334, 352
 Мощность множества 70
 Независимость линейная 390
 Непересекающиеся множества 70
 Неравенство треугольника 126, 334
 Несоизмеримость 23
 Нуль функции 182, 290
 Область значений 52
 — определения 52
 — целостности 122
 — — конечная 206
 — — упорядоченная 124
 — — характеристики n 171
 Образ гомоморфный 162
 — изоморфный 162
 Объединение множеств 38, 46, 414
 Окружность 397
 Операция 62
 — бинарная 63
 — возведения в степень 93
 — вычитания 118
 — над отношениями 55
 — рекурсивно определенная 88

 — сложения 88
 — умножения 91
 — унарная 63
 Определение примитивно
 рекурсивное 88
 — рекурсивное 88
 — Определитель 220
 Остаток 145
 Отношение 47, 51, 416
 — антирефлексивное 56
 — антисимметричное 56
 Отношение бинарное 55
 — делимости 147, 183, 199, 226
 — конгруэнтности 64
 — — в поле 207
 — — — целых числах 161
 — — $\text{mod } m$ 166
 — — $\text{mod } p(\xi)$ 382
 — линейной упорядоченности 95
 — рефлексивное 56
 — симметричное 56
 — тернарное 55
 — тождества 56
 — транзитивное 56
 — эквивалентности 57
 — n -арное 55
 Отображение гомоморфное 162
 — изоморфное 162
 Пара упорядоченная 49, 414
 Парадокс Рассела 34, 412
 Параметр 18
 Переменная 15
 — свободная 25
 — связанная 25
 Пересечение множеств 38, 46, 417
 Перестановка 139
 Плоскость 341
 — Гаусса 341
 — Декарта 397
 — Евклида 397
 Площадь 336, 422
 Поверхность Римана 62
 Подмножество 31
 Подобласть 122

— упорядоченная 124
Подполе 202
— упорядоченное 202
Подпоследовательность 262, 347
Подсистема 72
Позиционные обозначения 156, 277
Поле 202
— алгебраически замкнутое 361
— — полное 355
— алгебраических чисел 377
— комплексных чисел 330
— конечное 206
— корневое 377, 386
—, порожденное коэффициентами 377
—, — множеством 377
— рациональных форм 215
— — чисел 214
— упорядоченное 202
— частных 214
Полином 172, 225
— линейный 190
— неприводимый 228
— нормированный 182
—, нули 182
— однородный 190
— от нескольких переменных 187
— постоянный 183
— простой 228
— симметрический 191
— — элементарный 192
Полиномы взаимно простые 233
Полнота алгебраическая 355
— топологическая 265
Порождение подполей- 377
Порядок корня 236
Последовательность бесконечная 104, 137
— конечная 104, 137
— Коши 261
— ограниченная 262, 347
— приведенная 301
— псевдобесконечная 174
Последовательность пустая 137

— сходящаяся 259, 347
— — равномерно 310
— фундаментальная 261
— Штурма 301, 302, 358
Построение с помощью циркуля и линейки 399
Постулат 14
Посылка 22
Правило знаков 120
— параллелограмма 334
Предел последовательности 259, 347
— — верхний 275
— — нижний 275
Предложение 15
—Предположение 22
Принцип абстракции 415
Присоединение корней 385
Проблема Гольдбаха 55
Прогрессия геометрическая 141
Произведение декартово 50, 415
Производная полинома формальная 184
— функции 422
Пространство векторное 390
— — конечномерное 390
— евклидово 350
Прямая 397
—Равенство истинное 164
— множеств 31
Равночисленность множеств 70
Радиян 265
Радиус сходимости ряда 285
Разбиение 58
Разложение биномиальное 141, 309
— в непрерывную дробь 281
— двоичное 279
— десятичное 277
— на простые множители целого числа 153
— — — — полинома 359
— периодическое 281
— Тейлора 285
Размерность 392
Разрешимость в радикалах 369, 408

- Распределение простых чисел 410
- Расстояние 265, 397
- Рассуждение логическое 14
- Расширение области целостности
 - кратное 187
 - — — простое 174
 - — — — трансцендентное 174
 - поля алгебраическое 377, 388
 - — конечное 393
 - — кратное трансцендентное 187
 - — линейно порожденное 390
 - — простое 379
 - — — алгебраическое 380
 - — — трансцендентное 174, 312, 374, 380
 - системы 72
- Результат 375
- Рекурсия примитивная 88
- Рефлексивность 32, S6, 95
- Решение задачи Диофанта 169
 - — — примитивное 169
- системы линейных уравнений 218
- Ряд 276
 - бесконечный 276
 - расходящийся 276
 - степенной 283
 - сходящийся 276
- Свободная переменная 25
- Свойство Архимеда 254
- Связанная переменная 25
- Связка логическая 21
- Связность 95
- Сегмент 85
- Сектор 336
- Сечение 85
 - Дедекинда 246
- Симметрия 32, 46
- Синус 333, 422
- Система 68
 - алгебраическая 68
 - алгебраически полная 355
 - вполне упорядоченная 97, 136, 153
 - линейно упорядоченная 95
 - линейных уравнений 217
 - математическая 68
 - непрерывно упорядоченная 245, 253
 - образующих 390
 - Пеано 78, 417
- Системы однотипные 68
- Сложение 88
- Совокупность 25
- Соответствие 66
- Степень полинома 182
 - полиномиальной функции 173
- Суждение декларативное 15
 - утвердительное 15
- Сумма множеств 38, 45, 46, 414
 - ряда частичная 276
- Теорема алгебры основная 354, 423
 - анализа фундаментальная 423
 - Больцано — Вейерштрасса 264, 347
 - Вейерштрасса о нулях 290
 - Лиувилля 321
 - Муавра 342
 - Пифагора 169, 239, 346
 - Ролля 288, 311
 - существования непрерывно упорядоченных полей 268
 - — — — систем 246
 - — полей частных 207
 - — упорядоченных областей целостности 128
 - Ферма 33, 410
 - Эйзенштейна 409 Теория алгоритмов 307
 - множеств аксиоматическая 35, 412
 - рекурсивных функций 307
 - чисел алгебраическая 410
 - — аналитическая 410
 - Штурма 302
- Тождество 31, 56
 - неразличимых 32
- Топология общая 350
- Точка 397
- Транзитивность 32, 56, 95
- Транспозиция 144

- Треугольник Паскаля 142
- Трисекция угла 404
- Угол 333, 337, 422
- Удвоение куба 404
- Умножение 91
- Упорядочение архимедово 254
- линейное (= простое = тотальное) 95
- непрерывное 245, 253
- плотное 205
- Упорядоченная область целостности 124
- пара 49
- тройка 54
- четверка 55
- n -ка 55
- Упорядоченность полная 97
- Уравнение алгебраическое 216
- квадратное 296, 332
- кубическое 370
- полиномиальное 223
- Уравнение степени выше четвертой 374
- четвертой степени 373
- Условие 15
- замены 391
- необходимое и достаточное 23
- с несколькими свободными переменными 26, 47
- с одной свободной переменной 26
- Утверждение математическое 15
- метаматематическое 44
- Форма линейная 390
- полиномиальная 173
- рациональная 215
- тригонометрическая 341
- Формула Эйлера 406
- Функция 59
- аналитическая 356
- бинарная 63
- взаимно однозначная 66
- голоморфная 356
- многозначная 62
- непрерывная 289, 351
- неявная 60
- обратная 65
- однозначная 62
- одно-однозначная 66
- показательная 285, 346
- полиномиальная 173, 182
- постоянная 183, 357
- следования 77
- степенная 93, 120
- тригонометрическая 337, 422
- —, аналитическое определение 422
- целая 356
- частичная подходящая 86
- Эйлера 406
- экспоненциальная 285, 346
- Цикл 144
- Частное 145, 203
- Числа взаимно простые 152
- Числа положительные целые 11, 78, 85, 100
- Число 11
- алгебраически зависимое 396
- — целое 375
- алгебраическое 312, 361
- действительное 239, 275
- иррациональное 11, 224
- кардинальное 71
- комплексное 11, 326, 330
- —, аргумент 336
- —, геометрическое представление 333
- —, модуль 334
- —, тригонометрическая форма 341
- комплексно сопряженное 331
- конструируемое 401
- Лиувилля 323
- мнимое 11, 330
- нечетное 96, 147
- перемен знака 301
- простое 18, 148
- рациональное 11, 214
- — трансцендентное 312
- Ферма 407

— — простое 407

— целое 11, 136

— — алгебраическое 375

— — положительное 85

— четное 96, 147

Член множества 27

Эквивалентность логическая 23

— теоретико-множественная 70, 313

Экспонента 309

Элемент 27

— непосредственно

предшествующий 99

— — следующий 99

— обратный по сложению 119

— — — умножению 203

— первый 97

— последний 97

Эффективная вычислительная

процедура 307

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Основные числовые системы — арифметика натуральных чисел, кольцо целых рациональных чисел, кольцо полиномов, поле рациональных чисел, поле вещественных чисел, поле комплексных чисел и др.— изучаются математиками с древних времен. Многие понятия и идеи, возникшие при изучении этих систем, породили новые направления в науке и сыграли важную роль в развитии математики и ее приложений. Теория числовых систем поэтому лежит в основе всех математических курсов, читаемых сейчас в высших учебных заведениях, и входит в программу курсов алгебры, математического анализа, вычислительной математики. Каждый лектор при этом выбирает из обширного материала то, что ему кажется наиболее важным, излагает его со своей точки зрения, иллюстрируя на классическом материале нужные ему идеи и конструкции. Естественно, что никакой цельной картины при этом, как правило, не возникает. И в литературе на русском языке нет полного изложения всей единой теории, созданной трудами многих поколений математиков, которое учитывало бы интересы широкого круга читателей. Этот пробел частично будет восполнен предлагаемым переводом книги Фефермана «Числовые системы».

О содержании книги вполне можно судить по подробному оглавлению. Вначале автор излагает элементы математической логики, наивной теории множеств вплоть до возникновения парадоксов. Затем выбирается некоторая система аксиом теории множеств (она приводится полностью в добавлении I), лежащая в основе всего дальнейшего изложения. Аксиоматическое изложение обычно перегружается формальными выкладками, затрудняющими чтение. Автор, на мой взгляд, удачно избегает этого, вместе с тем сохраняя достаточную строгость, и всюду заботится о логической обоснованности каждого нового шага, каждого введения нового понятия, стараясь заблаговременно подготовить читателя к этому. Автор также показывает важность полученных результатов, мотивирует

необходимость изучения возникающих вопросов и, наконец, не только знакомит читателя с некоторым кругом идей и методов, но и старается развивать у него определенные навыки творческого мышления, навыки в решении задач.

Перечисленные методические достоинства наряду с несомненными научными позволяют рекомендовать книгу в качестве учебного пособия для физико-математических школ, для студентов младших курсов педагогических вузов и университетов. Без сомнения, она должна заинтересовать также учителей математики школ и преподавателей математики высших учебных заведений.

Перевод книги предпринят по инициативе академика А. И. Мальцева, считавшего, что книга Фефермана может служить учебным пособием по курсу элементарной математики в педагогических институтах. Безвременная кончина прервала работу Анатолия Ивановича над редактированием перевода.

А. Д. Тайманов