

С. Феферман

Числовые системы

Основания алгебры и анализа

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
С11

C11 **С. Феферман**
Числовые системы: Основания алгебры и анализа / С. Феферман – М.: Книга по Требованию, 2013. – 450 с.

ISBN 978-5-458-26844-8

Цель этой книги состоит в последовательном построении и развитии основных числовых систем математики, именно положительных целых чисел, целых чисел, рациональных чисел, действительных чисел и комплексных чисел. По мнению многих математиков, эта область науки должна быть изучена каждым серьезным студентом-математиком. И лучше всего, если он сделает это как можно быстрее после первого года занятий математическим анализом или перед, или во время изучения более тонких областей анализа и алгебры.

ISBN 978-5-458-26844-8

© Издание на русском языке, оформление

«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,

«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, кляксы, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

- Куайн 412
Куммер 410
Лагранж 311, 374
Лейбниц 32
Линдон 163
Лиувилль 319, 323
Мальцев 8, 163
Морган де 46
Морри 422
Муавр 342
Нейман фон 412
Ньютон 298
Паскаль 142
Пеано 78, 412
Пифагор 169, 239, 346
Рассел 34, 412
Риман 62
- ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ
- Абсолютная величина 126, 334
Аксиома 14
— абстракции 415
— бесконечности 78, 416
— выбора 30, 46, 113, 417
— объемности 413
— ограниченного образования множеств 415
— систем Пеано 78
— существования множеств 413
— экстенсиональности 413
Аксиомы Пеано 79
Алгебра булева 44
— линейная 220
— множеств 37, 41
Алгоритм 20, 220, 307
— деления 146, 229
— Евклида 150, 233
Антецедент 22
Антирефлексивность 56
Антисимметричность 45, 56, 95
Аргумент 336
Ассоциативность 45, 89, 93, 106, 118, 139
База 390
— линейная 393
- Робинсон 164
Ролль 311
Рудин 427
Тарский 359
Тарталья 370
Тейлор 285
Ферма 33, 407, 410
Феррари 370
Ферро 370
Френкель 412
Фурье 12
Цермело 412, 420
Чебышев 410
Штурм 301, 302, 358
Эйзенштейн 409
Эйлер 406
Эрдеш 410
- Включение множеств 31
Возведение в степень 93, 121, 141, 204, 308
Вычисление корней 297, 358
Вычитание 118
Геометрические проблемы построений 397
Геометрия аналитическая 202
— синтетическая 202
Гомоморфизм 162
Грань верхняя 250
— — наименьшая 250
— — точная 250
— — нижняя 250
— — наибольшая 250
— — точная 250
Группа 384
Движение жесткое 424
Двойственность утверждений 45, 119
Делимость полиномов 183
Делитель 147
— общий наибольший 149, 231
Диаграмма Аргана 342
— Венна 37
Дискриминант полинома 366
Дистрибутивность 45, 91, 118, 138

- Доказательство от противного 23
— по индукции 79, 153
Дополнение множества 38, 415
Дробь непрерывная 281
Единица 118
— мнимая 330-
Единственность разложения на простые множители 153, 233
Зависимость алгебраическая 396
— линейная 390
Задача Диофанта 168
Задачи на построение классические 404
Заключение 22
Закон сокращения 90, 93
— трихотомии 90, 95
Законы Де Моргана 46
Идеал 167, 410
Измерение длин 200, 242
Изоморфизм 68, 162
— непрерывно упорядоченных полей 257
— полей частных 213
— простых трансцендентных расширений 176
— систем Пеано 84
— упорядоченных областей целостности 134
— А-кратных трансцендентных расширений 187
Импликация 22
Инверсия отношения 53
— функции 65
Индивидуал 412
Индукция 79
— возвратная 153
Интеграл 422
Интервал 47
— замкнутый 262
Интуиционизм 20
Квадратура круга 409
Класс 25
— конгруэнтности 166
— сечения верхний 245
— — — нижний 246
— — — эквивалентности 58
— mod m 166
— mod $p(\xi)$ 382
Кольцо коммутативное с единицей 118
— целых чисел 136
Комбинация линейная 151, 390
Коммутативность 45, 89, 92, 106
Композиция отношений 56
— функций 66
Консеквент 22
Константа 15
Конструируемость 401, 408
Координаты 397
Корень квадратный 330, 332
— — — главный 330, 332
— полинома 183
— — — кратный 236
— — — простой 236
— — — уравнения 3-й степени 370
— — — 4-й степени 373
— функции 182
Корень n -й степени 296, 343
— — — главный 343
Косинус 333, 341, 422
Коэффициент полинома старший 182
Коэффициенты полинома 182
— полиномиальной функции 173
— системы линейных уравнений 218
Кратное 120
Круг единичный 335, 422
— сходимости 356
Логика 15
— символическая (формальная — математическая) 15
Максимум абсолютный 20, 292
Матрица 220
Метаматематика 421
Метод Кантора 312, 317
— Лиувилля 319, 320
— Ньютона 298
Метрика 265
Минимум абсолютный 292

- Многоугольник правильный 406
- Множества попарно
 - непересекающиеся 41
- Множество 25, 412
 - бесконечное 27, 70
 - вполне упорядоченное 97
 - всех подмножеств 31, 36, 313, 414
 - замкнутое относительно операции 63
 - канторово совершенное 324
 - конечное 27, 70, 104
 - линейно упорядоченное 95
 - непрерывно упорядоченное 245, 253
 - несчетное 315
 - ограниченное 250
 - сверху 249
 - снизу 250
 - плотно упорядоченное 205
 - пустое 33
 - счетное 315
- Модуль 126, 334, 352
- Мощность множества 70
- Независимость линейная 390
- Непересекающиеся множества 70
- Неравенство треугольника 126, 334
- Несоизмеримость 23
- Нуль функции 182, 290
- Область значений 52
 - определения 52
 - целостности 122
 - — конечная 206
 - — упорядоченная 124
 - — характеристики n 171
- Образ гомоморфный 162
 - изоморфный 162
- Объединение множеств 38, 46, 414
- Окружность 397
- Операция 62
 - бинарная 63
 - возвведения в степень 93
 - вычитания 118
 - над отношениями 55
 - рекурсивно определенная 88
- сложения 88
- умножения 91
- унарная 63
- Определение примитивно
 - рекурсивное 88
 - рекурсивное 88
 - Определитель 220
- Остаток 145
- Отношение 47, 51, 416
 - антирефлексивное 56
 - антисимметричное 56
 - Отношение бинарное 55
 - делимости 147, 183, 199, 226
 - конгруэнтности 64
 - — в поле 207
 - — — целых числах 161
 - — mod m 166
 - — mod $p(\xi)$ 382
 - линейной упорядоченности 95
 - рефлексивное 56
 - симметричное 56
 - тернарное 55
 - тождества 56
 - транзитивное 56
 - эквивалентности 57
 - n -арное 55
 - Отображение гомоморфное 162
 - изоморфное 162
 - Пара упорядоченная 49, 414
 - Парадокс Рассела 34, 412
 - Параметр 18
 - Переменная 15
 - свободная 25
 - связанная 25
 - Пересечение множеств 38, 46, 417
 - Перестановка 139
 - Плоскость 341
 - Гаусса 341
 - Декарта 397
 - Евклида 397
 - Площадь 336, 422
 - Поверхность Римана 62
 - Подмножество 31
 - Подобласть 122

- упорядоченная 124
- Подполе 202
- упорядоченное 202
- Подпоследовательность 262, 347
- Подсистема 72
- Позиционные обозначения 156, 277
- Поле 202
 - алгебраически замкнутое 361
 - полное 355
 - алгебраических чисел 377
 - комплексных чисел 330
 - конечное 206
 - корневое 377, 386
 - , порожденное коэффициентами 377
 - , — множеством 377
 - рациональных форм 215
 - — чисел 214
 - упорядоченное 202
 - частных 214
- Полином 172, 225
 - линейный 190
 - неприводимый 228
 - нормированный 182
 - , нули 182
 - однородный 190
 - от нескольких переменных 187
 - постоянный 183
 - простой 228
 - симметрический 191
 - — элементарный 192
- Полиномы взаимно простые 233
- Полнота алгебраическая 355
 - топологическая 265
- Порождение подполей- 377
- Порядок корня 236
- Последовательность бесконечная
 - 104, 137
 - конечная 104, 137
 - Коши 261
 - ограниченная 262, 347
 - приведенная 301
 - псевдобесконечная 174
- Последовательность пустая 137
- сходящаяся 259, 347
- — равномерно 310
- фундаментальная 261
- Штурма 301, 302, 358
- Построение с помощью циркуля и линейки 399
- Постулат 14
- Посылка 22
- Правило знаков 120
 - параллелограмма 334
- Предел последовательности 259, 347
 - верхний 275
 - — нижний 275
- Предложение 15
 - Предположение 22
- Принцип абстракции 415
- Присоединение корней 385
- Проблема Гольдбаха 55
- Прогрессия геометрическая 141
- Произведение декартово 50, 415
- Производная полинома формальная 184
 - функции 422
- Пространство векторное 390
 - — конечномерное 390
 - евклидово 350
- Прямая 397
- Равенство истинное 164
- множеств 31
- Равночисленность множеств 70
- Радиан 265
- Радиус сходимости ряда 285
- Разбиение 58
- Разложение биномиальное 141, 309
 - в непрерывную дробь 281
 - двоичное 279
 - десятичное 277
 - на простые множители целого числа 153
 - — — — полинома 359
- периодическое 281
- Тейлора 285
- Размерность 392
- Разрешимость в радикалах 369, 408

- Распределение простых чисел 410
Расстояние 265, 397
Рассуждение логическое 14
Расширение области целостности
 кратное 187
 — простое 174
 — трансцендентное 174
 — поля алгебраическое 377, 388
 — конечное 393
 — кратное трансцендентное 187
 — линейно порожденное 390
 — простое 379
 — алгебраическое 380
 — трансцендентное 174, 312,
 374, 380
— системы 72
Результант 375
Рекурсия примитивная 88
Рефлексивность 32, S6, 95
Решение задачи Диофанта 169
 — примитивное 169
— системы линейных уравнений 218
Ряд 276
 — бесконечный 276
 — расходящийся 276
 — степенной 283
 — сходящийся 276
Свободная переменная 25
Свойство Архимеда 254
Связанная переменная 25
Связка логическая 21
Связность 95
Сегмент 85
Сектор 336
Сечение 85
— Дедекинда 246
Симметрия 32, 46
Синус 333, 422
Система 68
 — алгебраическая 68
 — алгебраически полная 355
 — вполне упорядоченная 97, 136, 153
 — линейно упорядоченная 95
 — линейных уравнений 217
— математическая 68
— непрерывно упорядоченная 245,
 253
— образующих 390
— Пеано 78, 417
Системы однотипные 68
Сложение 88
Совокупность 25
Соответствие 66
Степень полинома 182
— полиномиальной функции 173
Суждение декларативное 15
— утвердительное 15
Сумма множеств 38, 45, 46, 414
— ряда частичная 276
Теорема алгебры основная 354, 423
— анализа фундаментальная 423
— Больцано — Вейерштрасса 264,
 347
— Вейерштрасса о нулях 290
— Лиувилля 321
— Муавра 342
— Пифагора 169, 239, 346
— Ролля 288, 311
— существования непрерывно
 упорядоченных полей 268
— — — систем 246
— — — полей частных 207
— — — упорядоченных областей
 целостности 128
— Ферма 33, 410
— Эйзенштейна 409 Теория
 алгоритмов 307
— множеств аксиоматическая 35, 412
— рекурсивных функций 307
— чисел алгебраическая 410
 — — — аналитическая 410
— Штурма 302
Тождество 31, 56
— неразличимых 32
Топология общая 350
Точка 397
Транзитивность 32, 56, 95
Транспозиция 144

- Треугольник Паскаля 142
- Трисекция угла 404
- Угол 333, 337, 422
- Удвоение куба 404
- Умножение 91
- Упорядочение архimedово 254
 - линейное (= простое = тотальное) 95
 - непрерывное 245, 253
 - плотное 205
- Упорядоченная область целостности 124
 - пара 49
 - тройка 54
 - четверка 55
 - n -ка 55
- Упорядоченность полная 97
- Уравнение алгебраическое 216
 - квадратное 296, 332
 - кубическое 370
 - полиномиальное 223
- Уравнение степени выше четвертой 374
 - четвертой степени 373
- Условие 15
 - замены 391
 - необходимое и достаточное 23
 - с несколькими свободными переменными 26, 47
 - с одной свободной переменной 26
- Утверждение математическое 15
- метаматематическое 44
- Форма линейная 390
 - полиномиальная 173
 - рациональная 215
 - тригонометрическая 341
- Формула Эйлера 406
- Функция 59
 - аналитическая 356
 - бинарная 63
 - взаимно однозначная 66
 - голоморфная 356
 - многозначная 62
 - непрерывная 289, 351
- неявная 60
- обратная 65
- однозначная 62
- одно-однозначная 66
- показательная 285, 346
- полиномиальная 173, 182
- постоянная 183, 357
- следования 77
- степенная 93, 120
- тригонометрическая 337, 422
 - , аналитическое определение 422
- целая 356
- частичная подходящая 86
- Эйлера 406
- экспоненциальная 285, 346
- Цикл 144
- Частное 145, 203
- Числа взаимно простые 152
- Числа положительные целые 11, 78, 85, 100
- Число 11
 - алгебраически зависимое 396
 - целое 375
 - алгебраическое 312, 361
 - действительное 239, 275
 - иррациональное 11, 224
 - кардинальное 71
 - комплексное 11, 326, 330
 - , аргумент 336
 - , геометрическое представление 333
 - , модуль 334
 - , тригонометрическая форма 341
 - комплексно сопряженное 331
 - конструируемое 401
 - Лиувилля 323
 - мнимое 11, 330
 - нечетное 96, 147
 - перемен знака 301
 - простое 18, 148
 - рациональное 11, 214
 - трансцендентное 312
 - Ферма 407

- — простое 407
- целое 11, 136
- — алгебраическое 375
- — положительное 85
- четное 96, 147
- Член множества 27
- Эквивалентность логическая 23
- теоретико-множественная 70, 313
- Экспонента 309
- Элемент 27
- непосредственно
- предшествующий 99
- — следующий 99
- обратный по сложению 119
- — — умножению 203
- первый 97
- последний 97
- Эффективная вычислительная
- процедура 307

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Основные числовые системы — арифметика натуральных чисел, кольцо целых рациональных чисел, кольцо полиномов, поле рациональных чисел, поле вещественных чисел, поле комплексных чисел и др.— изучаются математиками с древних времен. Многие понятия и идеи, возникшие при изучении этих систем, породили новые направления в науке и сыграли важную роль в развитии математики и ее приложений. Теория числовых систем поэтому лежит в основе всех математических курсов, читаемых сейчас в высших учебных заведениях, и входит в программу курсов алгебры, математического анализа, вычислительной математики. Каждый лектор при этом выбирает из обширного материала то, что ему кажется наиболее важным, излагает его со своей точки зрения, иллюстрируя на классическом материале нужные ему идеи и конструкции. Естественно, что никакой цельной картины при этом, как правило, не возникает. И в литературе на русском языке нет полного изложения всей единой теории, созданной трудами многих поколений математиков, которое учитывало бы интересы широкого круга читателей. Этот пробел частично будет восполнен предлагаемым переводом книги Фефермана «Числовые системы».

О содержании книги вполне можно судить по подробному оглавлению. Вначале автор излагает элементы математической логики, наивной теории множеств вплоть до возникновения парадоксов. Затем выбирается некоторая система аксиом теории множеств (она приводится полностью в добавлении I), лежащая в основе всего дальнейшего изложения. Аксиоматическое изложение обычно перегружается формальными выкладками, затрудняющими чтение. Автор, на мой взгляд, удачно избегает этого, вместе с тем сохранив достаточную строгость, и всюду заботится о логической обоснованности каждого нового шага, каждого введения нового понятия, стараясь заблаговременно подготовить читателя к этому. Автор также показывает важность полученных результатов, мотивирует

необходимость изучения возникающих вопросов и, наконец, не только знакомит читателя с некоторым кругом идей и методов, но и старается развивать у него определенные навыки творческого мышления, навыки в решении задач.

Перечисленные методические достоинства наряду с несомненными научными позволяют рекомендовать книгу в качестве учебного пособия для физико-математических школ, для студентов младших курсов педагогических вузов и университетов. Без сомнения, она должна заинтересовать также учителей математики школ и преподавателей математики высших учебных заведений.

Перевод книги предпринят по инициативе академика А. И. Мальцева, считавшего, что книга Феффермана может служить учебным пособием по курсу элементарной математики в педагогических институтах. Безвременная кончина прервала работу Анатолия Ивановича над редактированием перевода.

А. Д. Тайманов