Н.М. Бескин

Задачник-практикум по тригонометрии

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 82-053.2
ББК 74.27
Н11

Н.М. Бескин
Н11 Задачник-практикум по тригонометрии / Н.М. Бескин – М.: Книга по Требованию, 2021. – 184 с.

ISBN 978-5-458-25435-9

Задачник разделен на два раздела: основной и дополнительный. Основной раздел содержит минимальный набор задач, которые рекомендуется перерешать полностью. Дополнительный раздел дает выбор задач для дополнительной тренировки. Большинство задач этого задачника заимствовано из русской дореволюционной и иностранной литературы.

ISBN 978-5-458-25435-9

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ОТ КАФЕДРЫ МАТЕМАТИКИ МГЗПИ

При работе над задачником-практикумом студент должен параллельно изучать теоретическую часть курса по учебнику С. И. Новоселова «Специальный курс тригонометрии». Часть задач и упражнений, помещенных в задачнике-практикуме, снабжена подробными решениями, которые также должны быть тщательно рассмотрены студентом перед тем, как он приступит к самостоятельному решению других задач и упражнений по соответствующей теме.

Все задачи, помещенные в основной раздел задачника-практикума, должны быть полностью решены студентом в межсессионный период. Полная проработка всего текста задачника-практикума должна быть завершена студентом-заочником не позже, чем за один месяц до начала очередной сессии Вместо практиковавшихся до сих пор контрольных работ по тригонометрии студент-заочник получит от кафедры за один месяц до начала очередной сессии номера нескольких задач из данного задачника-практикума, решения которых он должен прислать в деканат в пятидневный срок. Непредставление в указанный срок решений этих задач будет рассматриваться как невыполнение контрольной работы со всеми вытекающими отсюда последствиями.

Кафедра математики Московского государственного заочного педагогического института обращается к кафедрам математики педагогических институтов и ко всем студентам-заочникам с просьбой присылать свои соображения по задачнику-практикуму как с точки зрения самой идеи его составления, так и по его конкретному содержанию.

Если в процессе работы над задачником-практикумом студент-заочник столкнется с неясными вопросами, ему надлежит обращаться на кафедру математики МГЗПИ (Москва, пл. Революции, 3/1).

Кафедра математики МГЗПИ

ОСНОВНОЙ РАЗДЕЛ

§ 1. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Доказать тождества (№ 1—3).

1. $$\frac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Решение. Используем формулы: $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$, $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$. Средние члены (в числителе и знаменателе) выражаем как синус двойного аргумента:

$$\frac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

В этом рассуждении мы сократили дробь на $\cos\alpha+\sin\alpha$, что является незаконным в случае $\cos\alpha+\sin\alpha=0$, т. е. когда $\alpha=-\frac{\pi}{4}+k\pi$. В этом особом случае левая часть данного тождества принимает неопределенный вид $\frac{0}{0}$, а правая часть равна -1. Возможны две точки зрения на этот случай.

1) Если при некотором значении α хотя бы одна из двух частей равенства теряет смысл, то равенство признается несправедливым при этом значении α. Таким образом, данное тождество справедливо для всех значений α, кроме значений вида $\alpha=-\frac{\pi}{4}\pm k\pi$.

2) Если при некотором значении $\alpha = \alpha_0$ в равенстве $f(\alpha) = \varphi(\alpha)$ хотя бы одна из частей (например, левая) теряет смысл, то мы приписываем ей значение, равное $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} f(\alpha)$, т. е. считаем равенство справедливым, если $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} f(\alpha) = \varphi(\alpha_0)$. При решении уравнений приходится исследовать, так ли это. При доказательстве же тождеств такое исследование не требуется: если тождество $f(\alpha) = \varphi(\alpha)$ справедливо для всех значений α в некоторой двусторонней окрестности α_0 и если функция $\varphi(\alpha)$ непрерывна при $\alpha = \alpha_0$ (каковые условия в данной задаче соблюдаются), то тождество $f(\alpha) = \varphi(\alpha)$ при $\alpha = \alpha_0$ обязательно верно (в указанном выше смысле).

В этой книге принята вторая точка зрения.

2. $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) + 1 = 0.$

3. $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$

4. Найти (точно) синус и косинус 15° и 75°.

Решение. Первый способ. Рассматриваем 15° как разность между 45° и 30°:

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° - \cos 45° \cdot \sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° + \sin 45° \cdot \sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Второй способ. Рассматриваем 15° как половину от 30°. Используем формулы (VI.1) и (VI.2). Двойной знак не нужен, так как синус и косинус 15° заведомо положительны:

$$\sin 15° = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2},$$

$$\cos 15° = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

Эти выражения можно упростить, пользуясь формулой (XVII. 1):

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

$$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ, \quad \cos 75^\circ = \sin 15^\circ.$$

5. Найти x (точно), если $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Решение. Найдем $\cos 2x$ [формула (V. 36)]:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда одно из возможных решений: $2x = 45^\circ$, $x = 22^\circ 30'$. Но если $22^\circ 30'$ есть один из углов, имеющих такой синус, какой указан в условии задачи, то все углы, имеющие тот же синус, задаются формулой $x = 180^\circ k + (-1)^k 22^\circ 30$.

Как видно, мы должны сначала догадаться, чему равен x, а затем эту догадку проверять. Без такой догадки неясно, почему мы вычисляли $\cos 2x$. В подобных задачах, если такая догадка затруднительна, рекомендуется обращаться к таблицам. В данном случае имеем:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142,$$

$$2-\sqrt{2} = 0{,}5858,$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{0{,}5858} = 0{,}7654,$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = 0{,}3827, \quad x = 22^\circ 30'.$$

6. Найти (точно) $\operatorname{tg} 11^\circ 15'$.

Доказать тождества (№ 7—9).

7. $\dfrac{\sin 7\alpha}{\sin \alpha} = 1 + 2\cos 2\alpha + 2\cos 4\alpha + 2\cos 6\alpha.$

Решение. Первый способ. Заменим синусы по формуле Эйлера [формула (XIII. 5)]:

$$\frac{\sin 7\alpha}{\sin \alpha} = \frac{e^{i\cdot 7\alpha} - e^{-i\cdot 7\alpha}}{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}.$$

Далее в ходе выкладок мы для краткости дважды делаем замену обозначений: $e^{i\alpha} = t$, $t^2 = s$.

$$\frac{\sin 7\alpha}{\sin\alpha} = \frac{t^7 - \frac{1}{t^7}}{t - \frac{1}{t}} = \frac{t^{14} - 1}{t^8 - t^6} = \frac{s^7 - 1^*}{s^4 - s^3} =$$

$$= s^3 + s^2 + s + 1 + \frac{s^2 + s + 1}{s^3} =$$

$$= s^3 + s^2 + s + 1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} =$$

$$= 1 + \left(s + \frac{1}{s}\right) + \left(s^2 + \frac{1}{s^2}\right) + \left(s^3 + \frac{1}{s^3}\right) =$$

$$= 1 + (e^{i2\alpha} + e^{-i2\alpha}) + (e^{i4\alpha} + e^{-i4\alpha}) + (e^{i6\alpha} + e^{-i6\alpha}) =$$

$$= 1 + 2\cos 2\alpha + 2\cos 4\alpha + 2\cos 6\alpha.$$

Второй способ. Используем формулу (VIII. 3):

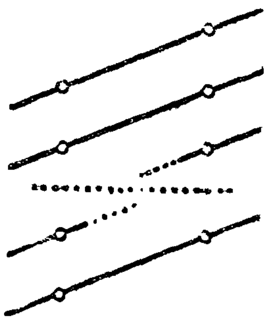
$$\sin\alpha \cdot \cos 6\alpha = \frac{1}{2}(\sin 7\alpha - \sin 5\alpha),$$

$$\sin\alpha \cdot \cos 4\alpha = \frac{1}{2}(\sin 5\alpha - \sin 3\alpha),$$

$$\sin\alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{2}(\sin 3\alpha - \sin\alpha),$$

$$\sin\alpha \cdot \cos 0 = \frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\alpha).$$

Сложим эти равенства. При сложении правых частей произойдет сокращение (см. схему):



$$\sin\alpha(1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha) = \\ = \frac{1}{2}(\sin 7\alpha + \sin\alpha).$$

Умножим на 2 и разделим на $\sin\alpha$:

$$2 + 2\cos 2\alpha + 2\cos 4\alpha + 2\cos 6\alpha = \\ = \frac{\sin 7\alpha}{\sin\alpha} + 1.$$

---

* Далее производится деление многочленов.

Особый случай: $\alpha = k\pi$ (см. решение задачи № 1).

8. $\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha = 4\cos\alpha\cos 2\alpha\sin 4\alpha$.

Решение. Первый способ (слева направо). Сумму двух синусов преобразуем в произведение. Группируем первый член со вторым, а третий с четвертым (*по одинаковой разности аргументов*):

$$\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha =$$
$$= 2\sin 2\alpha\cos\alpha + 2\sin 6\alpha\cos\alpha =$$
$$= 2\cos\alpha(\sin 2\alpha + \sin 6\alpha) = 2\cos\alpha \cdot 2\sin 4\alpha \cdot \cos 2\alpha.$$

Можно группировать первый член с четвертым, а второй с третьим (*по одинаковой сумме аргументов*).

Второй способ (справа налево). Преобразуем правую часть данного тождества в сумму по формуле (VIII. 6). Вывод этой формулы приводится в решении задачи № 43. Полагая в этой формуле $x = 4\alpha$, $y = \alpha$, $z = 2\alpha$, сразу получим нужное тождество.

9. $\dfrac{\sin 3\alpha \cdot \cos^3\alpha + \cos 3\alpha \cdot \sin^3\alpha}{3} = \dfrac{\sin 4\alpha}{4}$.

10. 1) Выразить $\cos n\alpha$ через $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$.

Решение. 1) По формуле бинома Ньютона:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos^n\alpha + i\,n\cos^{n-1}\alpha \cdot \sin\alpha -$$
$$- \frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}\alpha \cdot \sin^2\alpha - i\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\alpha \cdot \sin^3\alpha +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cos^{n-4}\alpha \cdot \sin^4\alpha + \ldots$$
$$\ldots + i^{n-1}n\cos\alpha\sin^{n-1}\alpha + i^n\sin^n\alpha.$$

По формуле Моавра [формула (XIII.1)]:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.$$

Правые части этих равенств можно отождествить. Приравнивая отдельно действительные части, получим:

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - \frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cos^{n-4}\alpha \cdot \sin^4\alpha - \ldots$$

Последний член равен:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} n\cos\alpha \cdot \sin^{n-1}\alpha \text{ при } n \text{ нечетном,}$$

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \sin^{n}\alpha \text{ при } n \text{ четном.}$$

2) Выразить $\sin n\alpha$ через $\cos^n\alpha$ и $\sin^n\alpha$.

11. Упростить $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ$.

Решение. Объединяем первый член с четвертым, а второй с третьим (*по одинаковой сумме аргументов*):

$$\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ =$$

$$= 2\cos 36^\circ \sin 11^\circ + 2\cos 36^\circ \sin 25^\circ =$$

$$= 2\cos 36^\circ (\sin 11^\circ + \sin 25^\circ) =$$

$$= 4\sin 18^\circ \cos 36^\circ \cos 7^\circ = 4\sin 18^\circ (1 - 2\sin^2 18^\circ)\cos 7^\circ = \ldots$$

Но $\sin 18^\circ$ можно определить, пользуясь теоремой: *хорда равна диаметру круга, умноженному на синус половины дуги, стягиваемой этой хордой*. Если за хорду взять сторону правильного вписанного десятиугольника, то

$$a_{10} = 2R \cdot \sin 18^\circ,$$

откуда $\sin 18^\circ = \frac{a_{10}}{2R}$. Из геометрии известно, что

$$a_{10} = R\,\frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Таким образом,

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Теперь можно вычислить:

$$1 - 2\sin^2 18^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

Продолжаем прерванные выкладки:

$$\ldots = 4 \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \cdot \cos 7^\circ = \cos 7^\circ.$$

Примечание. Можно было бы обойтись без вычисления $\sin 18^\circ$ и получить результат значительно более коротким, но зато и более искусственным приемом, а именно: дойдя до выражения $4\sin 18^\circ \cos 36^\circ \cos 7^\circ$, следовало умножить и разделить его на $\cos 18^\circ$. Дальнейшие выкладки протекали бы так:

$$4\sin 18^\circ \cos 36^\circ \cos 7^\circ = \frac{4\sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ \cos 7^\circ}{\cos 18^\circ} =$$

$$= \frac{2\sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 7^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ \cos 7^\circ}{\cos 18^\circ} = \cos 7^\circ,$$

потому что $\sin 72^\circ = \cos 18^\circ$.

12. Вывести формулы для:

1) синуса суммы трех аргументов,
2) косинуса суммы трех аргументов,
3) тангенса суммы трех аргументов.

Решение. Первый способ. Преобразуем двумя различными способами выражение $e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}$ [формула (XIII. 2)]:

$$e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} = \cos(\alpha+\beta+\gamma) + i\sin(\alpha+\beta+\gamma),$$

$$e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} \cdot e^{i\gamma} =$$

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\gamma + i\sin\gamma) =$$
$$= \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma - \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma - \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\gamma -$$
$$- \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma + i(\sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma + \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma +$$
$$+ \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\gamma - \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma).$$

Отождествляя правые части этих равенств (отдельно приравнивая действительные и мнимые члены), получим:

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma - \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma -$$
$$- \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\gamma - \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma,$$

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma + \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma +$$
$$+ \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\gamma - \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma.$$

Деля второе равенство на первое и после этого в правой части деля числитель и знаменатель почленно на $\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$, получим:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\alpha}.$$

Второй способ.

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin[(\alpha+\beta)+\gamma] =$$
$$= \sin(\alpha+\beta) \cdot \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta) \cdot \sin\gamma =$$

$$= (\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta)\cos\gamma+$$
$$+(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta)\sin\gamma=\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma+$$
$$+\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma-\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma.$$

Формула для $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ выводится аналогично, формула для $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$ получается делением.

13. Вычислить

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} 3\right).$$

Решение. Обозначим $\alpha=\operatorname{arcctg} 3$. Это значит

$$\operatorname{ctg}\alpha=3,\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

[Вообще $\operatorname{arcctg} x$ заключается в интервале $(0, \pi)$ [формула (XI.4)], но арккотангенс *положительного аргумента* принадлежит первой четверти.] Вычисляем:

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{10}},\quad \cos\alpha=\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

(Двойной знак перед радикалом не берется, потому что α принадлежит первой четверти.) Далее используем формулу (VI. 5):

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} 3\right)=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\frac{3}{\sqrt{10}}}{\frac{1}{\sqrt{10}}}=\sqrt{10}-3.$$

14. Упростить $\sin(2\arcsin x)$.

15. Вычислить $\sin\left(2\arccos\frac{1}{4}\right)$.

16. Упростить $\operatorname{ctg}(2\arccos x)$.

Доказать (№ 17—19).

17. $\operatorname{arcctg}\frac{1}{7}+2\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}=\frac{5\pi}{4}$.

Решение. Обозначим: $\alpha=\operatorname{arcctg}\frac{1}{7}$, $\beta=\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}$. Тогда

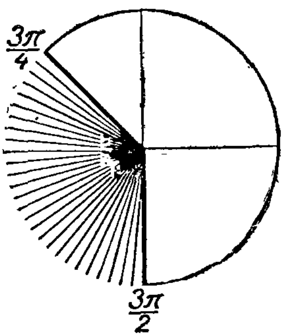
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{7}, \quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{3},$$

$$\operatorname{ctg} 2\beta = \frac{\operatorname{ctg}^2\beta - 1}{2\operatorname{ctg}\beta} = \frac{\frac{1}{9} - 1}{\frac{2}{3}} = -\frac{4}{3},$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + 2\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg} 2\beta} = \frac{-\frac{4}{21} - 1}{\frac{1}{7} - \frac{4}{3}} = 1.$$

Из того, что $\operatorname{ctg}(\alpha + 2\beta) = 1$, еще нельзя *однозначно* определить $\alpha + 2\beta$. Необходимо установить достаточно узкие границы, в которых заключается $\alpha + 2\beta$; α принадлежит первой четверти. Кроме того, раз $\operatorname{ctg}\alpha < 1$, то $\alpha > \frac{\pi}{4}$. Аналогичные замечания относятся и к β. Итак, $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} < 2\beta < \pi$. Складывая первое и третье неравенства, находим:

$$\frac{3\pi}{4} < \alpha + 2\beta < \frac{3\pi}{2}.$$



Черт. 1.

В этих границах (см. черт. 1) существует единственный аргумент, котангенс которого равен единице: это $\frac{5\pi}{4}$. Следовательно, $\alpha + 2\beta = \frac{5\pi}{4}$, т. е.

$$\operatorname{arcctg}\frac{1}{7} + 2\operatorname{arcctg}\frac{1}{3} = \frac{5\pi}{4}.$$

18. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{2}{9} = \frac{\pi}{4}.$

19. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}.$