

В.А. Стеклов

**Общие методы решения
основных задач
математической физики**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
С79

С79 **Стеклов В.А.**
Общие методы решения основных задач математической физики / В.А.
Стеклов – М.: Книга по Требованию, 2021. – 301 с.

ISBN 978-5-458-56913-2

ISBN 978-5-458-56913-2

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

Замѣченныя погрѣшности и опечатки.

Стран.	Строка.	Напечатано.	Должно быть.
5	11 снизу	gesellschaft	Gesellschaft
9	19 сверху	исчисленіи не можетъ	исчисленіи, не можетъ
15	1 снизу	Handbuch	Lehrbuch
24	8 "	$2\pi R(1 + R)$	$32\pi aR(1 + aR)$
25	4 сверху	равенства (1)	равенства (2)
33	9 "	Равенства (24), (28), (29)	Равенство (24) и неравенство (28), (29)
35	18 "	Pp	p^P
"	20 "	$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P$	$-\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P$
37	7 "	$\frac{\partial W}{\partial z}$	$-\frac{\partial W}{\partial z}$
43	8 снизу	V , имѣетъ	V имѣетъ
44	12 сверху	$\lim_{R=\infty} RW < A$	$\lim_{R=\infty} RW < A, \lim_{R=\infty} \left R^2 \frac{\partial W}{\partial x} \right < A$ и т. д. для y и z .
46	7 и 8 "	удовлетворяетъ условію $\lim_{R=\infty} RW < A$	удовлетворяетъ условіямъ $\lim_{R=\infty} RW < A, \lim_{R=\infty} \left R^2 \frac{\partial W}{\partial x} \right < A$ и т. д. для y и z
57	4 "	(σ) и	(σ), и
63	6 "	$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2$	$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^2$
"	2 снизу	Ed .	$\dot{E}d$.
67	1 сверху	равенство (16)	равенство (4)
72	5 снизу	рав. (12)	рав. (13)
80	3 сверху	махімум ϱ_0	махімум модуля ϱ_0
81	10 снизу	число K .	число k .
82	10 "	неравенства (36) и (22 ₁)	равенство (34) и неравенство (35)
"	8 "	$\frac{2C}{\tau(1 - \tau^2)} \tau^k$	$\frac{2C}{1 - \tau^2} \tau^k$

II

Строк.	Строка.	Напечатано.	Должно быть.
89	13 сверху	$n = \frac{2KC}{\tau c(1-\tau^2)}$	$n = \frac{2KC}{c(1-\tau^2)}$
95	1 "	равенство (7)	равенство (8)
"	2 "	Пропущенъ номеръ формулы	(11).
96	19 "	$ v_k - C < L\tau^k$	$ \bar{v}_k - C < L\tau^k$
"	21 "	правильная дробь	правильная дробь, независящая отъ функции v_1 .
111	2 "	зависящее отъ	зависящее только отъ
114	11 "	число $\frac{q}{k^2}$	числа $\frac{q}{k^2}$
115	1 "	Эта лемма какъ и лемма §-а 10-го не встрѣтятся	Эта лемма не встрѣтитъ
"	3 "	указать ихъ	указать ее
"	5 "	этими леммами	этой леммой и леммой 10-го §-а
123	9 снизу	рядомъ (30)	рядомъ (39)
127	2 "	условія	условіе
138	6 сверху	$\int H\varphi_1 d\tau.$	$\int H\varphi_1 d\tau_1.$
"	10 "	Буквы x, y, z нужно замѣнить черезъ x', y', z' , и наоборотъ.	
160	8 "	Неймана	Нейманна
161	13 снизу	$(\bar{v}_{2k+1} \bar{v}_{2k})$	$(\bar{v}_{2k+1} - \bar{v}_{2k})$
168	2 сверху	$2, 3, \dots$	$(k=2, 3, \dots)$
169	6 снизу	$V = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (W_{k,e} + W_{k-1,e})$	$V_e = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (W_{k,e} + W_{k-1,e})$
174	3 "	Пропущенъ номеръ формулы (47 ₁)	
175	1 сверху	равенства (47)	равенства (47 ₁)
"	2 "	$-\frac{1}{4\pi} \int \frac{\lambda \cos \mu}{r^2} ds$	$-\frac{1}{4\pi} \int \frac{\lambda \cos \varphi}{r^2} ds$
"	6 снизу	$ \bar{W}_k - c < C_1 \tau^k$	$ \bar{W}_k + c < C_1 \tau^k$
"	8 "	$2 \bar{W}_k - c $	$2 \bar{W}_k + c $
177	2 сверху	причемъ	, причемъ
182	5 "	$(-1)^{k-1} q_k$	$(-1)^k q_k$
193	5 и 8 "	(62)	(a)
"	12 снизу	Дѣйствительно, мы увидимъ въ послѣдствіи, что классическія	Дѣйствительно, классическія
197	9 сверху	данной	данной
206	1 снизу	(см. § 4-мѣ)	(см. § 6-мѣ)
208	3 "	(см. § 5-мѣ)	(см. § 7-мѣ)

Стран.	Строка.	Напечатано.	Должно быть.
"	8	" $(k-1) \log \frac{N}{\mu}$	$b(k-1) \log \frac{N}{\mu}$
209	18	сверху $a_3 u_3 + a_n u_n$	$a_3 u_3 + \dots + a_n u_n$
214	2	снизу па поверхности (S)	на поверхности (S)
220	3	" съ (3) находимъ	съ (3), находимъ
238	9	сверху (72)	(79)
240	11	снизу (сравн. § 25-ой)	(сравн. § 24-ой)
251	9	сверху $2 \sum_{s=1}^{\infty} P_s \varphi_s$	$2 \sum_{s=0}^{\infty} P_s \varphi_s$
"	11	" $\sum_{k=s}^{\infty} P_k$	$\sum_{k=s+1}^{\infty} P_k$
252	2	" $2 \sum_{s=1}^{\infty} \int \varphi P_s \varphi_s ds$	$2 \sum_{s=0}^{\infty} \int \varphi P_s \varphi_s ds$
"	4	" $\sum_{s=1}^{\infty} P_s \varphi_s$	$\sum_{s=0}^{\infty} P_s \varphi_s$
253	11	" $\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{sk} B_{sk}$	$\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{sk} B_{sk}$
"	7	снизу $2 \sum_{s=1}^{\infty} A_{sk} B_{sk}$	$2 \sum_{s=0}^{\infty} A_{sk} B_{sk}$
254	2	сверху $2 \sum_{s=1}^{\infty} A_{sk} B_{sk}$	$2 \sum_{s=0}^{\infty} A_{sk} B_{sk}$
261	6	" $\sum_{k=0}^{\infty} \int \mu V_k \int \frac{\varphi V_k}{r} ds$	$\sum_{k=0}^{\infty} \int \mu V_k ds \int \frac{\varphi V_k}{r} ds$
262	14	" $\sum_{k=0}^{\infty} \int \mu V_k \int \frac{\varphi V_k}{r} ds$	$\sum_{k=0}^{\infty} \int \mu V_k ds \int \frac{\varphi V_k}{r} ds$

На страницахъ 45 (стр. 9 сверху), 46 (стр. 13 сверху), 80 (стр. 3 и 4 сверху) и 109 (стр. 5 снизу) фразу: „ l есть наибольшее изъ разстояній между двумя точками поверхности (S)“ нужно замѣнить слѣдующей:

„ l есть нѣкоторая положительная постоянная, зависящая только отъ свойствъ поверхности (S)“.

Примѣчаніе на стран. 114 относится къ случаю конвексной поверхности (S).

Оглавление.

	<i>Стран.</i>
Введение	1—16
 <i>Глава I. Потенціалъ простого и двойного слое. Фундаментальная теорема.</i>	
Общія свойства потенціала простого слоя. Основныя неравенства.	
Потенціалъ двойного слоя. Условія существованія нормальныхъ производныхъ отъ этого потенціала.	
Формулы Грина. Основная лемма.	
Сферическія функціи. Фундаментальная теорема для сферы.	
Преобразование Н. Роисагё. Фундаментальная теорема для поверхностей, допускающихъ преобразование Н. Роисагё.	
Двѣ вспомогательныя леммы	17—64
 <i>Глава II Задача о распредѣленіи электричества.</i>	
Постановка задачи. Основная теорема.	
Рѣшеніе электростатической задачи по методѣ Robin'a .	65—91
 <i>Глава III. Задача Нейманна и нѣкоторыя другія, непосредственно съ ней связанныя.</i>	
Постановка задачи. Рѣшеніе задачи по методамъ К. Нейманна и Robin'a.	
Нѣкоторыя неравенства и леммы.	
Видоизмѣненная задача Нейманна (problème de Neumann transformé).	
Задача объ установившейся температурѣ (problème des températures stationnaires).	
Доказательство существованія двухъ прерывныхъ функцій, аналогичныхъ функціи Грина	92—138

Глава IV. Задачи Дирихле и Гаусса. Метода арифметическихъ среднихъ К. Нейманна.

Метода обращенія В. Томсона и принципъ Дирихле. Функція Грина и ея основныя свойства.

Метода арифметическихъ среднихъ К. Нейманна.

Задача о преобразованіи давнаго потенціала двойного слоя въ простой и обратно.

Задача объ опредѣленіи потенціала двойного слоя, принимающаго напередъ заданныя значенія на данной поверхности.

Задача Гаусса и вѣкоторыя ея приложенія 139—190

Глава V. Фундаментальныя функціи и ихъ примѣненіе къ рѣшенію задачъ Дирихле и Нейманна.

Общія замѣчанія.

Фундаментальныя функціи и ихъ основныя свойства.

Характеристическія числа.

Случаи сферы и эллипсоида.

Основные равенства и ихъ приложенія къ рѣшенію нѣкоторыхъ задачъ математической физики. (Опредѣленіе потенціала простого слоя, составляющей по какому либо направленію силы притяженія этого слоя въ точкахъ, не лежащихъ на поверхности, и плотности слоя по заданнымъ значеніямъ его потенціала на поверхности и т. д.).

Разложеніе данной функціи въ ряды по фундаментальнымъ функціямъ.

Рѣшеніе задачъ Дирихле и Нейманна при помощи фундаментальныхъ функцій 191—271

Примѣчанія 272—288

Дополнительная замѣтка 289—291



ВВЕДЕНИЕ.

1. Большинство задач математической физики приводится къ рѣшенію задачъ Дирихле и К. Нейманна.

Прежде чѣмъ формулировать эти задачи необходимо условиться въ нѣкоторыхъ обозначеніяхъ, съ которыми постоянно придется имѣть дѣло.

Обозначимъ черезъ (D) нѣкоторую область пространства, ограниченную замкнутой поверхностью (S) .

Назовемъ остальную часть пространства, внѣшнюю относительно (S) , черезъ (D') .

Будемъ называть, по обыкновенію, всякую функцію V координатъ x, y, z , удовлетворяющую въ извѣстной области уравненію Лапласа

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

гармонической функціей въ этой области.

Пусть $F(x, y, z)$ есть какая либо функція координатъ x, y, z , или, какъ мы будемъ иногда говорить, функція точки M , разумѣя, вообще, подъ M точку, координаты которой суть x, y, z .

Пусть M есть какая либо точка поверхности (S) . Возьмемъ двѣ точки M' и M'' , первая изъ которыхъ лежитъ внутри, вторая внѣ поверхности (S) .

Предположимъ, что M' приближается какимъ бы то ни было образомъ къ точкѣ M и что при этомъ F' , измѣняясь, стремится къ нѣкому определенному предѣлу, котораго и достигаетъ при совпаденіи M' съ M .

Этотъ предѣлъ мы будемъ обозначать черезъ

$$F_i.$$

Подобнымъ же образомъ предѣлъ, къ которому стремится F' , когда M'' стремится къ совпаденію съ M , мы будемъ обозначать черезъ

$$F_e.$$

Значеніе функціи F для точки M , т. е. ея значеніе, получающееся при непосредственной подстановкѣ координатъ точки M въ выраженіе $F(x, y, z)$, мы будемъ обозначать черезъ

$$\overline{F}.$$

Мы будемъ предполагать, что замкнутая поверхность (S) имѣетъ въ каждой точкѣ опредѣленную касательную плоскость.

Направление *внѣшней* нормали къ (S) въ какой либо ея точкѣ обозначимъ черезъ n .

Разсмотримъ выраженіе

$$\frac{\partial F'}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial F'}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial F'}{\partial z} \cos(n, z), \quad (2)$$

гдѣ n есть нормаль къ (S) въ точкѣ M .

Предположимъ, что M' находится на этой нормали, и будемъ разумѣть въ производныхъ $\frac{\partial F'}{\partial x}$, $\frac{\partial F'}{\partial y}$, $\frac{\partial F'}{\partial z}$ подъ x , y , z координаты точки M' .

Допустимъ, что выраженіе (2) стремится къ опредѣленному предѣлу, когда точка M' стремится къ M , оставаясь все время на нормали n .

Этотъ предѣлъ мы будемъ называть *внутренней нормальной производной функціи F* и обозначимъ его черезъ

$$\frac{\partial F_i}{\partial n}.$$

Разумѣя затѣмъ въ выраженіи (2) подъ x , y , z координаты точки M'' , лежащей внѣ (S) на нормали n , мы обозначимъ черезъ

$$\frac{\partial F_e}{\partial n}$$

предѣлъ, къ которому стремится выраженіе (2), когда M'' стремится къ M (оставаясь всегда на нормали n).

Этотъ предѣлъ мы будемъ называть *внѣшней нормальной производной отъ функціи F* .

Наконецъ, выраженіе (2), если подъ x , y , z въ немъ разумѣются координаты точки M [лежащей на поверхности (S)], мы будемъ называть просто *нормальной производной функціи F на поверхности (S)* и будемъ обозначать эту производную черезъ

$$\frac{\partial F}{\partial n}.$$

Задачу Дирихле можно разчлениить на двѣ: *внутреннюю и внѣшнюю*. Первая состоитъ въ слѣдующемъ:

Опредѣлить внутри данной области (D) гармоническую функцию V , удовлетворяющую условию

$$V_i = f \quad \text{на поверхности } (S), \quad (3)$$

гдѣ f есть заданная однозначная и непрерывная функция координатъ точекъ этой поверхности.

Внѣшнюю задачу Дирихле можно формулировать слѣдующимъ образомъ:

Опредѣлить въ области (D') гармоническую функцию V , обращающуюся для бесконечно удаленныхъ точекъ въ нуль вмѣстѣ съ ея частными производными перваго порядка такимъ образомъ, что произведенія

$$R V, \quad R^2 \frac{\partial V}{\partial x}, \quad R^2 \frac{\partial V}{\partial y}, \quad R^2 \frac{\partial V}{\partial z}$$

остаются конечными, когда разстояніе R точки x, y, z отъ начала координатъ безпредѣльно возрастаетъ, и удовлетворяющую условию

$$V_e = f \quad \text{на поверхности } (S). \quad (4)$$

Задача Неймана также распадается на двѣ: внутреннюю и внѣшнюю.

Въ первомъ случаѣ (внутренняя задача) требуется:

Опредѣлить внутри области (D) гармоническую функцию V , удовлетворяющую условию

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = f \quad \text{на поверхности } (S). \quad (5)$$

Во второмъ случаѣ (внѣшняя задача) требуется:

Опредѣлить гармоническую функцию V въ области (D'), обращающуюся въ бесконечности въ нуль вмѣстѣ со своими частными производными перваго порядка точно такимъ же образомъ, какъ и въ случаѣ внѣшней задачи Дирихле, и удовлетворяющую условию

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = f \quad \text{на поверхности } (S). \quad (6)$$

Въ равенствахъ (4), (5) и (6) f есть заданная однозначная и непрерывная функция координатъ точекъ поверхности (S), причемъ въ случаѣ внутренней задачи Неймана [рав. (5)] f необходимо должно удовлетворять условию

$$\int f ds = 0. \quad (7)$$

Здѣсь ds есть элементъ поверхности (S), на которую распространяется интегралъ лѣвой части этого равенства.

Задачу Нейманна мы будем называть иногда *основной задачей гидродинамики*.

2. Задача Дирихле впервые была поставлена, въ нѣсколько иной формѣ, Гринемъ въ 1828 году ¹⁾.

Въ 1839 году Гауссъ въ своемъ извѣстномъ мемуарѣ „Allgemeine Lehrätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte“ ²⁾ высказалъ одно предложеніе, при-
мымъ слѣдствіемъ котораго является слѣдующая теорема:

Всегда можно найти такое распределение массъ на данной замкнутой поверхности (S), что потенциалъ этихъ массъ будетъ имѣть напередъ заданныя значенія на самой поверхности, непрерывнымъ образомъ измѣняющіяся при переходѣ отъ одной точки поверхности къ другой.

Это предложеніе, которое я назову *принципомъ Гаусса*, очевидно, утверждаетъ такъ называемый *принципъ Дирихле*, т. е. фактъ существованія функціи V , удовлетворяющей условіямъ задачи Дирихле, и сверхъ того то обстоятельство, что функція V можетъ быть представлена въ видѣ потенциала простого слоя.

Если бы теорема Гаусса была доказана дѣйствительно вполнѣ строго, то она не только установила бы принципъ Дирихле, но содержала бы въ себѣ рѣшеніе и другой весьма важной задачи математической физики, такъ называемой задачи о распредѣленіи электричества, находящагося въ равновѣсіи на данной поверхности.

Къ сожалѣнію метода Гаусса, сводящая вопросъ къ разысканію условій minimum'a нѣкотораго интеграла недостаточна, какъ это хорошо извѣстно, во многихъ отношеніяхъ, и принципъ Гаусса остается по-
тому недоказаннымъ.

Послѣ Гаусса задача, приблизительно въ томъ видѣ какъ это сдѣлано нами выше, была формулирована Дирихле.

Самъ Дирихле не опубликовалъ своихъ изслѣдованій по этому предмету, но, судя по словамъ Римана, даваго въ 1857 г. ³⁾ этой задачѣ названіе *задачи Дирихле*, а теоремѣ о существованіи функціи V названіе *принципа Дирихле*, можно съ увѣренностью утверждать, что на нее впервые послѣ Гаусса обратилъ вниманіе Дирихле и, пользуясь идеями Гаусса, первый предложилъ доказательство существованія функціи V въ своихъ лекціяхъ, читанныхъ имъ въ теченіи нѣсколькихъ лѣтъ до 1857 года.

¹⁾ G. Green: „Ein Versuch die mathematische Analysis auf die Theorien der Electricität und des Magnetismus anzuwenden“. Leipzig, 1825.

²⁾ Gauss, Gesammelte Werke, Bd. V.

³⁾ B. Riemann: „Bestimmung einer Function einer veränderlichen complexen GröÙe durch Grenz-und Unstetigkeitsbedingungen“. Borchardt's Journal, Bd. 54, 1857, s. 111.

Idem: „Theorie der Abel'schen Functionen“. Ibid., s. 117 etc.