

Н. Н. Воробьёв

**Основы теории игр
Бескоалиционные игры**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 50
ББК 22
H11

H11 **Н. Н. Воробьёв**
Основы теории игр Бескоалиционные игры / Н. Н. Воробьёв – М.: Книга по Требованию, 2012. – 496 с.

ISBN 978-5-458-27127-1

Книга содержит систематическое изложение теории бескоалиционных игр (в нормальной форме) с конечным числом игроков и с численными их выигрышами. Специально рассматриваются конечные бескоалиционные игры, антагонистические игры и матричные игры. Для ряда частных классов игр приводятся содержательные интерпретации. Книга рассчитана на специалистов в области математики и в том числе прикладной математики. От читателя требуется знание разнообразных, но сравнительно элементарных фактов из университетской математической программы. Никаких предварительных сведений по теории игр не предполагается.

ISBN 978-5-458-27127-1

© Издание на русском языке, оформление

«YOYO Media», 2012

© Издание на русском языке, оцифровка,

«Книга по Требованию», 2012

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, кляксы, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Мне предстоял труд писать на русском языке о предмете, для которого мы не имели установленных употреблением оборотов и выражений.

В. Я. Буняковский. Основания математической теории вероятностей, 1846

Итак, не следует ожидать от нас исчерпывающей истории и теории игры в бисер. Даже более достойные и искусные, чем мы, авторы не в состоянии были бы сегодня это сделать. Эта задача остается будущему...

Г. Гессе. Игра в бисер, 1943

ПРЕДИСЛОВИЕ

Можно считать, что математическая теория игр зародилась в 1929 г., когда была опубликована статья Дж. фон Неймана «К теории стратегических игр». Она обрела свой первоначальный вид как новая математическая дисциплина с выходом в свет в 1944 г. основополагающей монографии Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение». С тех пор по теории игр появилось много статей, число которых подходит к десяти тысячам, а также около сотни монографий. Несмотря на столь большое число публикаций, систематического изложения основ теории игр, выходящего за пределы элементарных вопросов, пока еще нет, и целью данной книги является восполнение этого пробела.

Теория игр является новым разделом математики, и информация о ее проблематике, достижениях и научных трудностях пока еще не получила широкого распространения. Имея в виду это обстоятельство, автор постарался, чтобы чтение данной книги не предполагало у читателя каких-либо предварительных сведений ни о результатах теории игр, ни даже о специфике постановок теоретико-игровых задач. Кроме того, с точки зрения современного состояния математики автор ограничивается использованием сравнительно элементарного аппарата, так что, по-видимому, любой профессионал-математик, независимо от его специализации и рода занятий, сможет без особых затруднений понять весь содержащийся в ней материал. Автор не имел в виду ориентироваться на лиц, не занимающихся математикой как таковой, но специализирующимися в области применения математики в таких общественных науках, как экономика, психология, социальная психология или право; однако он пола-

гает, что подготовка читателя в объеме, скажем, учебных планов специальности «Экономическая кибернетика» позволит ему разобраться в содержании книги, за исключением, может быть, немногих отдельных мест. То же самое можно сказать и по поводу специалистов, применяющих математику в военном деле.

Возможно, перед читателем-математиком возникнут трудности психологического характера, так как применяемый в теории игр математический аппарат и большинство связанных с ним содержательных ассоциаций сложилось не для решения теоретико-игровых задач, а по совсем другим поводам. Поэтому нередко оказывается, что для решения отдельных, достаточно конкретных, сравнительно простых теоретико-игровых задач приходится разрабатывать специфические, достаточно сложные математические приемы. Введенные *ad hoc*, они плохо переносятся на другие теоретико-игровые задачи (и даже на те, которые, казалось бы, должны решаться сходным образом), и обычно представляется затруднительным локализовать в конкретном примененном приеме ядро будущего широкого теоретико-игрового метода.

Не совсем обычна также логическая структура многих теоретико-игровых рассуждений, отличающаяся своеобразным «релятивизмом»: в них читателю (т. е. лицу, обычно обозначаемому в математических текстах местоимением «мы») приходится по-переменно вставать на точку зрения то одной из заинтересованных сторон, то другой, то, наконец, смотреть на вопрос глазами незаинтересованного исследователя. Автор стремился оформить изложение так, чтобы облегчить читателю преодоление всех этих трудностей.

Книга состоит из Введения и трех глав, посвященных соответственно теории общих бескоалиционных игр, антагонистических игр и матричных игр. Содержащийся в этих разделах книги материал организован так, что практически их можно читать в любой комбинации и в любом порядке, в зависимости от целей, которые ставит перед собой читатель, его склонностей и общей математической подготовки. При чтении книги в «прямом» порядке читателю в главах 2 и 3 попадется несколько частных случаев уже изложенных ранее утверждений, а при чтении в обратном порядке — несколько обобщений утверждений и конструкций из глав 3 и 2. Введение со своей стороны призвано

ввести читателя в курс основных понятий и математической проблематики теории игр в целом, но не выполняет функции подготовки к чтению остального текста. В частности, знакомство с Введением для понимания остального материала книги не обязательно.

В целях достаточно репрезентативного охвата теории бескоалиционных игр в каждом из излагаемых общих вопросов доводятся до более детальной проработки лишь отдельные аспекты, из которых в свою очередь только некоторые подвергаются еще более детальному анализу и т. д. Автору представляется, что на таком пути ему удалось объединить общие описания большинства основных направлений теории бескоалиционных игр с более подробным изложением некоторых частных разделов и с полным анализом конкретных теоретико-игровых задач.

Таким образом, перефразируя известное чеховское выражение, на протяжении книги набирается целый арсенал ружей, которые стреляют (или могут выстрелить) лишь за ее рамками. Однако, преодолеть возникающую при таком древовидном, иерархическом («телескопическом») построении книги известную фрагментарность и незавершенность ее изложения можно было бы разве лишь за счет существенного увеличения ее объема.

Специфика предмета теории игр делает особенно важным ее методологический аспект и заставляет рассматривать его более обстоятельно, чем это делается при изложении других разделов математики. Представляется также необходимым фиксировать не только то, чем занимается, но и то, чем не занимается теория игр в ее современном состоянии, тем более, что на этот счет бытуют самые фантастические представления. Основные методологические вопросы теории игр, и в том числе мотивы, по которым книга охарактеризована своим названием именно как «основы» теории игр и имеет дополнительный подзаголовок «Бескоалиционные игры», достаточно обстоятельно разъясняются во Введении. Ряд дальнейших разделов теории игр, которые также можно считать основными для этого раздела математики, но которые занимают логически подчиненное положение по отношению к теории бескоалиционных игр, предполагается изложить в другой монографии. Об этих разделах

теории игр коротко говорится в соответствующих пунктах Введения.

Все исторические и библиографические комментарии сведены в специальные разделы, помещенные в конце Введения и каждой из глав. Приведенный в конце книги список литературы не претендует на какую-либо полноту и призван указать на источники, откуда автор почерпнул тот или иной материал, а также на не отраженные в книге, но как-либо упомянутые разработки тех или иных теоретико-игровых вопросов.

Главы книги разделены на параграфы, а параграфы — на пункты, имеющие двойную нумерацию, отдельную для каждой главы. Такую же двойную нумерацию имеют и формулы в каждой главе. Утверждения же, напротив, собственной нумерации не имеют, и ссылка на них производится путем указания на соответствующий пункт. Окончание доказательств теорем и лемм, а также формулировок определений отмечается в тексте знаком \square .

Автор благодарен коллективу отдела математических методов Института социально-экономических проблем АН СССР, в котором была написана эта книга, и А. А. Корбуту за усилия, направленные на ее улучшение. За все критические замечания автор будет весьма признателен.

H. H. Воробьев

Вырица
декабрь 1982 г.

ВВЕДЕНИЕ

1. Математизация содержательных представлений. Всякая наука создает содержательные и (по возможности) адекватные представления о тех или иных явлениях объективного мира и оперирует ими. Эти представления естественно называть *содержательными моделями* соответствующих явлений. В отличие от других наук, математика создает свои специфические, формализованные (по существу — знаковые) представления о явлениях объективного мира, называемые их *математическими моделями*.

В историческом развитии любого конкретного гносеологического процесса, т. е. процесса перехода от незнания к знанию, вначале каждый раз формируется именно содержательное представление о каком-либо объективном явлении, а затем — основанное на уже имеющемся содержательном представлении — математическое представление о нем. Этот процесс перехода от содержательного представления к формальному, от содержательных моделей к математическим и составляет то, что принято называть *математизацией* содержательных представлений (моделей). Систематический процесс математизации все большего количества представлений, составляющих содержание *не-*которой науки, можно назвать математизацией этой науки.

2. В сущности, основной, «стратегической» задачей математической науки в целом является математизация совокупности содержательных представлений об объективном мире. Постепенное решение этой задачи обеспечивается путем установления огромного числа математических (как бы «чисто математических») фактов разного уровня сложности и общности, а также построения математических теорий, являющихся синтезом этих фактов, общим взглядом на них и важным источником новых фактов. Установление этих фактов и построение этих теорий и составляет конкретное содержание математики. Каждый новый круг явлений объективного мира, содержательные представления о котором только начинают математизироваться, предопределяет введение в математический оборот новых фактов и объединяющих их теорий.

Наглядным примером может служить математизация представлений о перемещении физических тел в физическом

пространстве, активно начавшаяся в XVI веке. Именно на этом пути в математику вошли на основе метода координат понятия функции и исчисления функций (дифференциальное и интегральное исчисления), приведшие к созданию математического анализа примерно в том виде, в каком он дошел до нас. Хотя возникновение новой научной дисциплины, и в том числе математической дисциплины, имеет, как правило, большое число достаточно разнообразных причин, но ясно, что интерес к алгебраическим уравнениям и их разрешимости в радикалах в конце XVIII — начале XIX века, несомненно, в значительной мере питался задачами о нахождении собственных чисел для систем уравнений, возникающих в задачах небесной механики. Тем самым теория Галуа, а вместе с нею и весьма многое в последующем развитии алгебры, также вкладывается в математизацию представлений о механическом движении. (Здесь было бы уместно упомянуть зафиксированную в Эрлангенской программе связь геометрии и теории групп.) Описание этого процесса можно очевидным образом продолжить, охватывая появление функциональный анализ, топологию и многие другие математические дисциплины.

Таким образом, на основе математизации представлений о перемещении тел в пространстве выросла весомая, значительная доля традиционной математики. Именно это, вместе с накоплением соответствующих математических фактов и разработкой объединяющих их разделов математики, привело к созданию физико-математических наук в их современном виде и оказалось одной из важнейших предпосылок научно-технической революции на ее сегодняшней стадии.

Вместе с тем одна из отличительных особенностей развития математики заключается в том, что она формирует более общие концепции и разрабатывает более мощные методы решения задач, чем это вызвано теми поводами, по которым начались соответствующие исследования. В итоге математика при очередном возникновении новых научных потребностей оказывается готовой решать совершенно новые задачи и исследовать совершенно новые структуры (хотя, разумеется, здесь между готовностью и умением может оказаться широкая полоса научных препятствий). В частности, опыт, обретенный математикой при математизации указанных выше содержательных представлений, дает возможность математизировать представления и о принципиально иных явлениях.

3. Систематизация подходов. Во всех случаях, когда математическая дисциплина соприкасается со своим нематематическим окружением, методологические вопросы начинают играть особенно важную роль. В частности, это имеет место, когда приходится рассматривать математизацию содержательных представлений о реальных процессах или, наоборот, содержа-

тельные интерпретации формально-математических конструкций, либо, наконец, пути, возможности и трудности практического использования математических результатов.

Теория игр связана с математическим моделированием социально-экономических процессов и ориентирована на социально-экономические приложения. Поэтому методологический аспект для теории игр оказывается еще более существенным, чем для других разделов математики, и требует более тщательного рассмотрения.

Представляется целесообразным изложить здесь тот рабочий, методологический «инструментарий», которым будет удобно пользоваться в дальнейшем. Подчеркнем, что это изложение будет носить весьма схематизированный характер, и в нем будут отражены лишь основные связи между рассматриваемыми объектами и понятиями.

При всем содержательном многообразии объектов и процессов, модели которых рассматриваются в упомянутых в п. 2 разделах математики, им всем присуща объективность физического существования, спонтанность протекания, подчиненность объективным физическим закономерностям и, что для нас сейчас особенно важно подчеркнуть, независимость от чьих-либо субъективных действий и от чьих-либо интересов. Сознательное вмешательство в их существование и развитие может сводиться, выражаясь математическим языком, разве лишь к заданию тех или иных «начальных условий» при использовании неизменной общей закономерности.

Отмечаемая иногда целенаправленность таких объектов и процессов является чисто кажущейся, а пресловутая «телеологическая точка зрения» может рассматриваться разве лишь как одна из возможных интерпретаций объективных причинно-следственных отношений. Поэтому и познание таких процессов направлено на выявление и анализ относящихся к ним причинно-следственных отношений и тем самым неизбежно носит дескриптивный характер. Можно сказать, что это познание ограничивается своим дескриптивным аспектом. Мы будем иногда обозначать его символом D . Его итогом каждый раз оказывается установление тех или иных черт объекта познания, характеризующих этот объект как таковой и в его связях с другими объектами. Дескриптивный аспект познания не включает в себя ни оценки познанного, ни рассмотрения каких-либо действий, планируемых или совершаемых познающим субъектом на основании приобретенной информации. Дескриптивный аспект не ставит вопросов о том, каким должен быть познаваемый объект (каким было бы «хорошо» ему стать), и о том, какие действия следовало бы предпринять для его изменения в том или ином направлении. Тем самым в рамках дескриптивного аспекта познания практика как критерий истинности в значи-

тельной мере ограничивается установлением непротиворечивости выводов.

4. Дескриптивный аспект познания сыграл и продолжает играть большую роль в развитии наук, особенно естественных. Вместе с тем в объективном мире происходят явления, отнюдь не составляющие исключений, познание которых уже не может и не должно ограничиваться своим дескриптивным аспектом. К их числу относятся все, связанные с общественными и научно-прикладными дисциплинами.

Прежде всего, как это сформулировал К. Маркс в своем 11 тезисе о Фейербахе, «Философы лишь различным образом объясняли мир, но дело заключается в том, чтобы изменить его» *). Тем самым процесс познания должен охватывать и фактически охватывает активную, практическую, созидающую деятельность познающего субъекта, изменяющего мир, сколь бы локальным это изменение ни было. В большей или меньшей степени это относится ко всем познаваемым объектам независимо от их природы.

Аспект познания, рассматривающий сознательное изменение познающим субъектом объектов познания и, в частности, конструирование, создание тех объектов, которых до начала процесса познания не было, естественно называть конструктивным. Мы будем обозначать его символом *K*. Конструктивный аспект познания связан с ответом на вопрос «что делать?» (познающему субъекту по поводу объекта познания). Именно конструктивный аспект познания проявляется на его практическом этапе, и формируемые в его ходе «конструкции» (технические, знаковые или умозрительные) служат теми конкретными образцами, на которых практика в весьма широком смысле этого слова и проявляется как критерий истинности. Заметим, что к конструктивному аспекту можно отнести и формирование предметов тех или иных научных теорий, а также классов объектов, которые могут стать предметом таких теорий.

Мы не склонны относить к обрисованному конструктивному аспекту известные вынужденные, необходимые изменения познаваемого объекта в процессе его познания, как это наблюдается, например, при исследовании явлений микромира. На современном уровне развития науки это обстоятельство приобрело уже скорее физическую, чем гносеологическую природу.

5. Кроме того, познание социально-экономических явлений имеет и другие характерные особенности. В этих явлениях участвуют люди, а также так или иначе сформированные группы, коллективы людей, наделенные теми или иными интересами. С точки зрения осуществления этих интересов применительно к исходам социально-экономических процессов представляется

*). К. Маркс и Ф. Энгельс. Тезисы о Фейербахе. — Соч., т. 3, с. 1.

осмысленной и правомерной постановка вопроса об их желательности или, напротив, нежелательности. Однако участники большинства социально-экономических процессов имеют, как правило, несовпадающие интересы, причем их несовпадение может допускать весьма широкий диапазон — от жесткого antagonизма до ярко выраженной априорной склонности к компромиссам и даже единодушию.

На основании несовпадения интересов участников социально-экономических явлений об этих явлениях складывается представление как о явлениях конфликтного типа, а для процесса их познания неизбежно становятся важными, помимо традиционного дескриптивного и отмеченного выше конструктивного аспектов, еще и дальнейшие аспекты. Среди них нас сейчас будет преимущественно интересовать аспект нормативный, касающийся разумности, целесообразности, предпочтительности исходов конфликтов. Для этой разумности, целесообразности и предпочтительности мы далее будем пользоваться термином «оптимальность», а сам аспект обозначать символом *H*. В том числе естественно говорить и об оптимальных действиях участников конфликтов, если эти действия приводят к оптимальным исходам конфликтов. В данной книге понятие оптимальности будет в каком-то смысле основным.

По аналогии с предыдущим можно сказать, что нормативный аспект познания связан с ответом на вопрос «что такое оптимально?» Здесь, пожалуй, уместно указать на отличие этого вопроса от похожего на него пресловутого вопроса «что такое хорошо?» Грамматика как бы квалифицирует «оптимальное» как превосходную степень «хорошего», как столь хорошее, «лучше которого уже не может быть»; однако содержательно оптимальное представляется объективным (хотя и относительным), а хорошее — субъективным (и в рамках этой субъективности — абсолютным). Хорошее может поддаваться улучшению и тем самым не являться оптимальным, а оптимальное — быть не таким уж хорошим, но не допускать более предпочтительных альтернатив. Отмеченные черты оптимального (т. е. его объективность и относительность) мы далее всегда будем иметь в виду.

Разумеется, помимо перечисленных аспектов познания, существуют и другие аспекты, на которых мы останавливаться не будем. Мы упомянем здесь только о прогностическом аспекте познания, связанном с ответом на вопрос «что будет?», да и то лишь для того, чтобы потом (в п. 13) от него отмежеваться.

Подчеркнем, что как все описанные, так и любые другие понимаемые в том же смысле аспекты познания актуальны при познании любого объекта. Разумеется, относительная роль каждого из таких аспектов зависит от конкретного объекта познания.

6. Обратим теперь внимание на следующее обстоятельство. В каждом из сформулированных выше аспектов познания (любого объекта) можно выделить дальнейшие, более частные аспекты, являющиеся как бы подаспектами, вторичными аспектами, аспектами второго порядка. Ясно, что этот процесс формирования подаспектов можно итерировать, получая аспекты познания того порядка, какой потребуется. Некоторые из таких аспектов уже фактически сформировались и получили соответствующие названия. Например, вторичный конструктивный аспект первичного дескриптивного аспекта (который естественно обозначать через $D-K$) есть, по существу, создание информационного обеспечения исследуемой проблемы; вторичный аспект $D-H$ составляют вопросы разумности, качественности (т. е. фактически — адекватности) описаний, а аспект третьего порядка $D-H-D$ — методологии адекватных описаний ($D-H-K$ касается методик адекватных описаний). Имея в виду далее систематически заниматься нормативным аспектом познания конфликтов, заметим, что вторичный аспект $H-D$ исследует, в чем состоит оптимальность как таковая; аспект $H-H$ занимается разумным (целесообразным) определением оптимальности и оптимальных поведений, аспект $H-K$ — проблемами построения концепций оптимальности, аспект $H-K-H$ — разумного построения таких концепций и поведений, аспект $H-D-D$ — методологией описания оптимального, аспект $H-D-K$ — вопросом, как фактически задавать (описывать) оптимальное и т. д.

7. **Математические модели принятия оптимальных решений в условиях конфликтов как предмет теории игр.** Каждый из перечисленных аспектов и подаспектов познания может реализоваться как бы в двух слоях: содержательном («верbalном») и формальном, математизированном.

Содержательные представления об оптимальности в условиях конфликтов (т. е. в условиях различия интересов) возникли и развиваются достаточно давно. Они имеются в таких весьма разнообразных научных дисциплинах и видах практической деятельности людей, как экономика и проблемы охраны окружающей среды, военное дело и проблемы разоружения, техника и проблемы научно-технического прогресса, политика и право, биология и медицина, социология, социальная психология и многое другое. Более того, во многих разделах перечисленных дисциплин представление о конфликте и об оптимальности в условиях конфликтов является ведущим в том смысле, что отказ от их рассмотрения делает беспредметным весь этот раздел. Достаточно сослаться на такие (при всем их различии конфликтные по самому своему существу) явления, как боевые действия войск, политическая борьба, судебные процессы, конкуренция в условиях капиталистической экономики, принятие срочного медицинского решения в условиях неопределенного