

**Б. Больцано**

# **Парадоксы бесконечного**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 001  
ББК 72  
Б11

Б11 **Б. Больцано**  
Парадоксы бесконечного / Б. Больцано – М.: Книга по Требованию, 2024. –  
112 с.

**ISBN 978-5-458-66049-5**

**ISBN 978-5-458-66049-5**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2024

© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

[www.samizday.ru/reprint](http://www.samizday.ru/reprint)



## Предисловие издателя.

Б о л ь ц а н о начал писать замечательное сочинение «о парадоксах бесконечного» еще летом 1847-го года на прелестной даче в Либохе близ Мельника, в сообществе издателя, но, вследствие перерыва, обусловленного другими работами, закончил это сочинение только летом следующего года, последнего года своей жизни. Б о л ь ц а н о доказал этим сочинением, что, несмотря на поздний возраст – 66 лет – и на очевидный упадок телесных сил, его духовные силы сохранили еще всю свежесть и подвижность. Кроме того, эта работа показала всему ученому миру всю самобытность его воззрений на самые отвлеченные и глубокие вопросы математики, чистого естествознания и метафизики. Действительно, если бы Б о л ь ц а н о не написал и не оставил нам ничего больше, кроме этого трактата, то и в таком случае его следовало бы причислить, по нашему глубокому убеждению, к самым выдающимся людям нашего столетия. Самые интересные и запутанные вопросы, возникающие при исследовании понятия о бесконечности, вопросы, которые занимали с давних времен ученых, работавших в области априорных наук, он умеет разрешать с поразительной легкостью. Кроме того, он умеет излагать и развешивать перед глазами читателя эти вопросы с такой ясностью, что они в большинстве случаев становятся доступными для каждого, кто не вполне чужд этой области и лишь немного усвоил в ней. Знаток же, если только он отнесется к этому трактату с некоторым вниманием, (и разве мы не вправе ожидать этого от каждого ученого?) вскоре узнает значение взглядов Б о л ь ц а н о , намеченных здесь и разработанных обстоятельнее в других его сочинениях (особенно в его «Логике» и в «Athanasia»), и вскоре заметит, что ими намечается полное преобразование всей современной науки.

Издатель, получив этот трактат в рукописи от наследников автора с обязательством напечатать его возможно скорее, принял на себя это обязательство тем охотнее, что оно вполне согласовалось с его самым сокровенным желанием ( Б о л ь ц а н о был его незабвенным учителем и другом). Он охотно исполнил бы и раньше это обязательство, если бы не возникли препятствия, которые он мог устранить лишь в течении настоящего года. Только теперь сделалось для него возможным исправить переписанное по рукописи, не всегда четкой и представляющей кое-где даже неправильности, составить точный указатель содержания для удобства в пользовании книгой и найти подходящее место для ее издания. Для этой цели он выбрал Лейпциг, с одной стороны, надеясь на более широкое распространение сочинения, напечатанного именно в Лейпциге; с другой стороны, желая почтить знаменитый город книг, украшение и гордость новой родины издателя (он чех по происхождению), так как он

верит, что в будущем, когда великий гений Б о л ь ц а н о будет признан всеми, Лейпциг прославится тем, что был местом, где появились впервые «Парадоксы».

Будиссин, 10 июля, 1850.

# Содержание

§ 1. Почему автор занимается исключительно исследованием парадоксов бесконечного.

§ 2-10. Понятие о бесконечном в изложении математиков и исследование его.

§ 11. Как представляют себе бесконечное Гегель и другие философы.

§ 12. Другие определения бесконечного и разбор их.

§ 13. Реальность понятия, установленного автором, доказанная примерами из области действительного. Количество истин и теорем бесконечно.

§ 14. Опровержение некоторых возражений.

§ 15. Количество чисел бесконечно.

§ 16. Количество величин вообще бесконечно.

§ 17. Количество простых частей времени и пространства вообще бесконечно; точно также бесконечно количество точек времени и пространства, которые находятся между двумя сколь угодно близкими точками пространства или времени.

§ 18. Не всякая величина, которую мы рассматриваем как сумму бесконечного множества величин, является величиной бесконечной.

§ 19. Существуют бесконечные многообразия, большие или меньшие, чем другие бесконечные многообразия.

§ 20. Замечательное соотношение двух бесконечных многообразий, состоящее в том, что каждая вещь, принадлежащая одному многообразию, может быть соединена с некоторой вещью принадлежащей другому, таким образом, чтобы ни одна вещь в обоих многообразиях не оставалась без соединения и не появлялась бы более одного раза в соединении с другой вещью.

§ 21. Тем не менее, два бесконечных многообразия, равные по количеству своих частей, могут быть однако в таком соотношении, что одно из них будет представлять только часть другого.

§ 22 и 23. По какой причине для конечных многообразий имеет место другой случай, и каким образом эта причина исчезает для бесконечных многообразий.

§ 24. Две суммы попарно равных величин, если их многообразие бесконечно, могут не быть равными; это равенство будет иметь место только в том случае, когда оба множества определяются одинаковыми условиями.

§ 25. В области действительного также существует бесконечное.

§ 26. Закон полной определенности всего действительно существующего не противоречит этому утверждению.

§ 27. Заблуждение тех математиков, которые говорят о бесконечно больших промежутках времени, ограниченных однако с обеих сторон, или, что случается еще чаще, о бесконечно малых промежутках времени. Заблуждаются и те, что говорят о бесконечно больших и бесконечно малых расстояниях. Ошибаются также физики и метафизики, предполагая или утверждая, что существуют силы во вселенной в бесконечное число раз большие или меньшие, чем другие.

§ 28. Главнейшие парадоксы бесконечного в области математики; прежде всего в общей теории величин и особенно в учении о числах.

Как разрешается парадокс исчисления бесконечного.

§ 29. Существует исчисление бесконечно больших.

§ 30. Точно также существует и исчисление бесконечно малых.

§ 31 и 32. Неправильность некоторых понятий, принятых даже в математике, о бесконечно больших и бесконечно малых.

§ 33. Осторожность, которую необходимо соблюдать для избежания ошибок при производстве вычислений с бесконечными.

§ 34. Более точное определение понятия о нуле. Ноль не может являться делителем в равенстве, не представляющем простого тождества.

§ 35. Противоречия, вытекающие из встречающегося иногда утверждения, что бесконечно малые величины, соединенные с помощью сложения или вычитания с другими, обращаются в ноль или исчезают.

§ 36. Эти противоречия не устраняются предположением некоторых математиков, что бесконечно малые величины равны нулю, бесконечно-же большие суть частные от деления конечной величины на ноль.

§ 37. Как, по мнению автора, следует понимать метод исчисления бесконечных, чтобы освободить его от всяких противоречий.

§ 38. Парадоксы бесконечного в прикладной части учения о величинах, а именно в учении о времени и пространстве.

Уже само понятие о континууме или непрерывном протяжении заключает в себе кажущиеся противоречия. Как разрешить эти противоречия?

§ 39. Парадоксы в понятии о времени.

§ 40. Парадоксы в понятии о пространстве.

§ 41. Каким образом большая часть парадоксов в учении о пространстве объясняется из понятия о пространстве, которое предлагает автор?

§ 42 и 43. Каким образом неправильное понимание учения о бесконечно большом привело некоторых математиков к неправильным представлениям?

§ 44. Вычисление величины бесконечного пространства, принадлежащее И. Ш у л ь ц у , и в чем собственно заключается ошибка этого вычисления.



§ 45. Учение о бесконечно малом тоже дало повод к некоторым несообразностям.

§ 46. Что следует думать о предложении Галилея: окружность круга также велика, как и его центр.

§ 47. Объяснение предложения, что обыкновенная циклоида имеет бесконечную кривизну в той точке, где она встречает свое основание.

§ 48. Каким образом происходит то, что некоторые протяжения, распространяясь в бесконечном пространстве, тем не менее имеют конечную величину; другие же, напротив того, будучи ограничены конечным пространством, имеют все-таки бесконечную величину; и далее, некоторые другие сохраняют конечную величину, хотя делают бесконечное число оборотов вокруг одной точки.

§ 49. Еще некоторые парадоксальные отношения пространственных протяжений, имеющих бесконечную величину.

§ 50. Парадоксы бесконечного в области физики и математики.

Какие истины следует признать, чтобы судить правильно об этих парадоксах.

Доказательство того, что нет двух совершенно равных вещей, а также, следовательно, двух совершенно равных атомов (простых субстанций) во вселенной; далее, - что несомненно существуют простые субстанции, и что это суть переменные субстанции.

§ 51. Предрассудки, от которых следует освободиться, чтобы правильно судить об отношениях сюда парадоксах. Нет мертвого вещества, но есть инертное вещество.

§ 52. Предположение, что непосредственное действие субстанций недопустимо, представляет предрассудок школы.

§ 53. Подобным же образом уверенность в том, что непосредственное влияние на расстоянии невозможно, является предрассудком.

§ 54. Проникновение одной субстанции в другую безусловно отрицается.

§ 55. Предрассудок, состоящий в том, что духовные существа не занимают пространства, так что не могут даже занимать места одной точки.

Между созданными субстанциями нет других различий, кроме различий в степени.

§ 56. С этой точки зрения устраняется сам собой парадокс о связи духовных и материальных субстанций.

§ 57. Ошибочное представление о построении вселенной из одних сил, без субстанций.

§ 58. Нет ни высшей, ни низшей ступени бытия в творении Бога.

§ 59. Непрерывное наполнение бесконечного пространства субстанциями хорошо согласуется с различной плотностью тел, и нет

никакой надобности предполагать, что субстанции проникают одна в другую.

§ 60. Каждая субстанция в мире находится в постоянном взаимодействии с каждой другой.

§ 61. Существуют между ними субстанции господствующие, но ни одна из них не обладает силами, которые бы превосходили силы подчиненных субстанций на бесконечную величину.

§ 62. Существует ли господствующая субстанция в каждой совокупности субстанций.

§ 63. Кроме господствующих субстанций существует еще мировое вещество – эфир, которое заполняет все остальное мировое пространство и соединяет все мировые тела.

Между субстанциями существует притяжение и отталкивание, и каким образом автор представляет себе это.

Отчего происходит, что вещества различающиеся между собой своими силами, а именно степенью взаимного притяжения, по весу равны между собой или что веса их относятся между собою, как массы.

§ 64. В чем проявляется господство определенных субстанций или атомов над другими, и что отсюда следует.

§ 65. Ни одна особенная субстанция не может испытывать такого изменения, чтобы, благодаря ему, освободиться от всех ближайших частиц, окружающих ее.

§ 66. Где кончается одно тело и начинается другое или вопрос о границах тела.

§ 67. Находятся ли тела в непосредственном соприкосновении одно с другим, и когда это бывает.

§ 68. Возможные виды движений во вселенной.

§ 69. Описывает ли какой-нибудь атом во вселенной в какое-либо время линию вполне прямую или вполне кривую.

Принимая во внимание мнение автора о бесконечности вселенной, возможно ли допустить поступательное движение ее в каком-нибудь определенном направлении или вращательное движение ее вокруг данной мировой оси или мирового центра.

§ 70. Два парадокса, получивших, благодаря Эйлеру, большую известность.

## § 1.

Хотя и нельзя согласиться с мнением Кестнера, что все встречающиеся в математике парадоксальные утверждения представляют собою предложения, которые либо непосредственно заключают в себе понятие о бесконечном, либо так или иначе опираются на это понятие, когда делается попытка их доказать, но это несомненно справедливо для большей части этих утверждений. Еще бесспорнее то, что к разряду таких утверждений принадлежат именно те математические парадоксы, которые заслуживают наибольшего внимания по той причине, что решение важнейших вопросов в некоторых других науках, как, например, в метафизике и физике, зависит от удовлетворительного опровержения кажущихся противоречий, заключающихся в этих утверждениях.

Это же и составляет причину, по которой я в предлагаемом сочинении занимаюсь исключительно рассмотрением парадоксов бесконечного. Прежде всего необходимо выяснить, какое собственно понятие мы разумеем под словом “бесконечное”; иначе окажется для нас невозможным обнаружить, что противоречия, заключающиеся в этих математических парадоксах, представляются лишь кажущимися. Поэтому то мы и начинаем с определения понятия бесконечного.

## § 2.

Само название показывает, что бесконечное противопоставляется всему конечному. То обстоятельство, что мы выводим название бесконечного из названия конечного, указывает нам сверх того, что мы представляем себе понятие бесконечного происходящим из понятия конечного, вследствие присоединения к нему новой составной части (такой частью является уже и понятие о простом отрицании). Что оба эти понятия относятся к многообразиям, к количествам (т.е. к многообразиям единиц), а потому и к величинам, этого нельзя отрицать уже по той причине, что именно в математике, т.е. в науке о величинах, мы и говорим чаще всего о бесконечном, рассматривая конечные и бесконечные множества и делая предметом нашего исследования и даже вычисления, наряду с конечными, не только бесконечно большие, но даже и бесконечно малые величины. Не делая еще предположения, что оба эти понятия – конечного и бесконечного – применяются всегда только к таким вещам, в которых в каком-либо смысле могут быть обнаружены величина и множество, мы вправе надеяться, что более точное исследование вопроса, при каких

обстоятельствах мы считаем многообразие конечным или бесконечным, даст нам возможность определить, что такое бесконечность вообще.

### § 3.

С этой целью мы должны однако обратиться к одному из простейших понятий нашего ума, имея в виду установить значение термина, который будем употреблять для обозначения этого понятия. Мы говорим о понятии, лежащем в основе союза *и*. Для того, чтобы сделать это понятие настолько ясным, насколько этого во множестве случаев требуют математика и философия, я думаю, лучше всего выразить его следующими словами: совокупность известных вещей или целое, состоящее из известных частей. При этом мы должны установить, что эти слова принимаются в том широком значении, что во всех предложениях, где употребляется союз *и*, предмет речи есть известная совокупность предметов, целое, состоящее из известных частей. Например: 1) солнце, земля и луна находятся во взаимодействии; 2) роза и понятие о розе – две различные вещи; 3) имена Сократ и сын Софрониска обозначают одно и то же лицо. В первом примере это целое составляют солнце, земля и луна, и об этом целом высказывается мысль, что части его находятся во взаимодействии. Во втором примере это совокупность двух вещей: розы и понятия о ней, при чем высказывается суждение, что это две совершенно различные вещи и т.д. Этих немногих слов уже будет достаточно для установления соглашения относительно понятия, о котором идет речь, если мы при этом еще, конечно, прибавим, что любая вещь *A* с любыми вещами *B, C, D...* может составить совокупность вещей, или еще, говоря точнее, сама по себе составляет совокупность, о которой можно высказать много более или менее важных истин, постольку, поскольку представления *A, B, C, D...* в действительности соответствуют различным предметам, т.е. постольку ложно каждое из следующих предложений: *A* есть то же, что *B*; *A* есть то же, что *C*; *B* есть то же, что *C*; и т.д. Если бы, например, *A* было тоже самое, что и *B*, то конечно было бы нелепым говорить о совокупности вещей *A* и *B*.

#### § 4.

Существуют совокупности, которые, хоть и заключают те же части  $A, B, C, D...$ , но являются различными (мы назовем их существенно различными) в зависимости от точки зрения (понятия), с которой мы их рассматриваем, например, целый и разбитый в куски стакан, рассматриваемые, как сосуды для питья. То, что лежит в основании различия таких совокупностей, мы называем способом соединения или расположения их частей. Совокупность, определяемую таким понятием, при котором расположение частей безразлично (в которой, следовательно, не происходит никаких существенных изменений, если меняется только расположение частей), - такую совокупность я называю многообразием; а такое многообразие, все части которого будут рассматриваться как единицы известного рода  $A$ , т.е. как предметы, содержащиеся в понятии  $A$ , называется множеством предметов  $A$ .

#### § 5.

Известно, что существуют совокупности, части которых являются также составными, т.е. представляют из себя опять совокупности. Между ними есть также совокупности, которые мы рассматриваем с такой точки зрения, что в них не произойдет существенного изменения, если мы станем рассматривать части частей, как части целого. Этого рода совокупности я назову термином заимствованным у математиков, - суммами. Действительно, понятие суммы и состоит в том, что

$$A + (B + C) = A + B + C.$$

#### § 6.

Если мы рассматриваем предмет, как принадлежащий к такому роду вещей, что любые две из них  $M$  и  $N$  не могут никогда иметь другого отношения между собой, как то, что они или равны между собой, или одна из них представляет сумму, содержащую часть равную другой, т.е., что или  $M = N$  или  $M = N + v$  или  $N = M + \mu$ ; причем для составных частей  $v$  и  $\mu$  имеет место тоже самое, т.е., что они или равны между собой, или одна из них может быть рассматриваема как часть другой, то этот предмет мы рассматриваем как величину.

## § 7.

Если данная совокупность предметов  $A, B, C, D, E, F \dots L, M, N$ .  
... обладает таким свойством, что для каждой части  $M$  можно указать одну и только одну часть  $N$  такого рода, что мы можем определить помощью закона одинакового для всех частей совокупности, – или  $N$  его отношением к  $M$ , или  $M$  его отношением к  $N$ , – то такое собрание я называю рядом, а части его членами этого ряда. Закон, по которому или  $N$  определяется отношением к  $M$ , или  $M$  отношением к  $N$ , закон этот называется законом составления ряда. Один из членов ряда, притом какой угодно, я назову предыдущим, другой – последующим (не обозначая этим названием действительной последовательности во времени или пространстве). Я назову внутренним членом ряда каждый член  $M$ , который имеет предыдущий член и последующий, т.е. не только сам получается из другого члена, но и от которого тоже получается третий член, по закону составления этого ряда. Отсюда уже само собой ясно, какие члены я назову внешними, в случае если только они существуют, какой член я назову первым или последним.<sup>1</sup>

## § 8.

Представим себе ряд, первый член которого есть единица рода  $A$ , а каждый последующий член составляется из своего предыдущего таким образом, что, взяв предмет ему равный, соединяют его с новой единицей рода  $A$ , образуя из них сумму. Тогда все входящие в этот ряд члены, за исключением первого, который представляет простую единицу рода  $A$ , будут количествами. Они будут представлять именно те количества, которые я называю конечными или исчислимыми количествами или даже – со включением первого члена – числами, более определенно: целыми числами.

## § 9.

Смотря по различным свойствам понятия, которое мы здесь обозначаем через  $A$ , оно может заключать в себе то большее, то меньшее количество предметов, т.е. единиц рода  $A$ ; поэтому в вышеупомянутом

<sup>1</sup> Дальнейшие разъяснения этих и некоторых из установленных в предыдущих §§ понятий следует искать в «Wissenschaftslehre».