

В.К. Егерев

**Задачник-практикум по математическому
анализа с элементами аналитической
геометрии**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
В11

В.К. Егерев
В11 Задачник-практикум по математическому анализу с элементами аналитической геометрии / В.К. Егерев – М.: Книга по Требованию, 2021. – 88 с.

ISBN 978-5-458-25970-5

Предлагаемый задачник-практикум предназначен для использования на практических занятиях по курсу математического анализа в системе заочных отделений педагогических институтов.

ISBN 978-5-458-25970-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

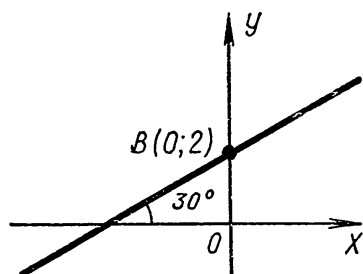


Рис. 1

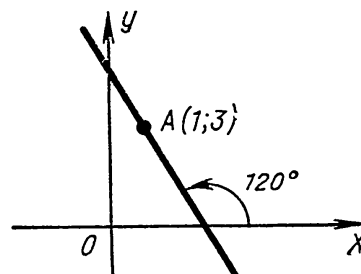


Рис. 2

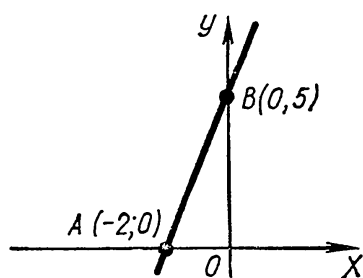


Рис. 3

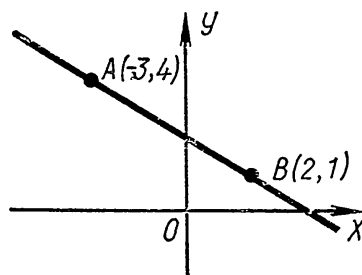


Рис. 4

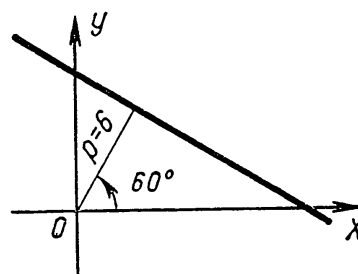


Рис. 5

6°. Закончите утверждение:

Чтобы найти расстояние d от точки до прямой, достаточно вычислить отклонение δ и взять

II. Примеры и упражнения

1. Напишите уравнения прямых, изображенных на рисунках 1—5.

2. Постройте прямые, заданные следующими уравнениями:

а) $y = 2x + 3$; б) $y - 2 = 3(x + 1)$;

в) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$; г) $\frac{x+1}{3+1} = \frac{y-2}{1-2}$;

д) $x \cos 45^\circ + y \sin 45^\circ - 2 = 0$.

3. Для треугольника ABC , заданного координатами своих вершин $A(-4; 0)$, $B(4; 6)$, $C(-1; -4)$:

- 1) составьте уравнение высоты, проведенной из вершины A ;
- 2) найдите длину этой высоты;
- 3) вычислите длину медианы AD , проведенной к стороне BC ;
- 4) определите координаты центра тяжести треугольника;
- 5) найдите тангенс внутреннего угла C .

Решение.

1. а) Уравнение прямой BC : ...;
- б) угловой коэффициент (BC): ...;
- в) условие перпендикулярности двух прямых: ...;
- г) угловой коэффициент искомой высоты: ...;
- д) уравнение высоты:
2. а) Нормальное уравнение прямой: ...;
- б) отклонение δ точки A от прямой BC : ...;
- в) расстояние d точки A от прямой BC : ...;

- г) отрицательный знак ... указывает на то, что точка A
3. а) Координаты точки D : ...;
 б) $|AD| = \dots$.
4. а) Отношение, в котором центр тяжести треугольника — точка P делит каждую медиану, начиная от вершины: ...;
 б) координаты точки P :
5. а) Внутренний угол C — это угол между прямыми ... и ..., определяемый вращением прямой часовой стрелкой...;
 б) выберем одно из соотношений:

$$\operatorname{tg} \widehat{C} = \frac{k_{BC} - k_{AC}}{1 + k_{BC} \cdot k_{AC}} \text{ или } \operatorname{tg} \widehat{C} = \frac{k_{AC} - k_{BC}}{1 + k_{AC} \cdot k_{BC}};$$

- в) уравнение прямой AC : ...;
 г) угловой коэффициент (AC): ...;
 д) угловой коэффициент (BC): ...;
 е) тангенс внутреннего угла C :
4. Для прямых, заданных уравнениями $4x + 3y - 18 = 0$ и $7x + 24y + 156 = 0$:
- 1) составьте уравнения биссектрис углов, образованных этими прямыми;
 2) докажите, что биссектрисы перпендикулярны друг другу.
- Решение.**
1. а) Нормальные уравнения прямых $4x + 3y - 18 = 0$ и $7x + 24y + 156 = 0$: ... и ...;
 б) искомые биссектрисы являются множеством точек, равноудаленных от: ...;
 в) уравнения биссектрис:
2. а) Угловые коэффициенты биссектрис: ...;
 б) произведение угловых коэффициентов биссектрис:
5. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $8x - 3y - 1 = 0$ и $4x + y - 13 = 0$ и через точку $A (-1; 2)$.
- Решение.**
1. Уравнение пучка (совокупности) прямых, проходящих через точку пересечения двух данных прямых: $(...) + q (...) = 0$.
 2. Для того чтобы прямая пучка проходила через точку $A (-1; 2)$, необходимо, чтобы координаты этой точки удовлетворяли уравнению прямой пучка:
 3. Значение параметра q :
 4. Уравнение искомой прямой:

III. Упражнения для самостоятельного решения

1. На прямую, проходящую через точки $A (1; -2)$ и $B (0; -7)$, опущен перпендикуляр из точки $D (-3; 4)$. Вычислите отношение, в котором основание этого перпендикуляра делит отрезок AB .
 2. Составьте уравнения сторон квадрата, одна из вершин которого $A (2; -4)$, а точка пересечения диагоналей $M (5; 2)$.

3. Определите угол φ между прямыми:

а) $5x - y + 7 = 0$ и $3x + 2y = 0$;

б) $3x - 2y + 7 = 0$ и $2x + 3y - 3 = 0$;

в) $x - 2y - 4 = 0$ и $2x - 4y + 3 = 0$;

г) $3x + 2y - 1 = 0$ и $2x - 4y + 3 = 0$.

4. Луч света направлен по прямой $x - 2y + 5 = 0$. Дойдя до прямой $3x - 2y + 7 = 0$, луч отразился от нее. Составьте уравнение прямой, которой принадлежит отраженный луч.

5. Установите, какие из следующих пар прямых перпендикулярны, а какие параллельны:

а) $3x - y + 5 = 0$ и $x + 3y - 1 = 0$; б) $3x + 4y + 1 = 0$ и $4x - 3y + 8 = 0$;

в) $6x - 15y + 3 = 0$ и $10x + 4y - 2 = 0$; г) $9x - 12y + 1 = 0$ и $8x + 6y - 13 = 0$;

д) $6x - 2y + 1 = 0$ и $3x - y + 7 = 0$; е) $3x - 4y + 7 = 0$ и $6x - 8y + 1 = 0$.

6. Определите, при каких значениях m и n две прямые $mx + 8y + n = 0$ и $2x + my - 1 = 0$: а) параллельны; б) совпадают; в) перпендикулярны.

7. Определите, при каком значении m две прямые $mx + (2m + 3)y + m + 6 = 0$ и $(2m + 1)x + (m - 1)y + m - 2 = 0$ пересекаются в точке, лежащей на оси ординат.

8. Определите, при каком значении a три прямые $2x - y + 3 = 0$, $x + y + 3 = 0$, $ax + y - 13 = 0$ будут пересекаться в одной точке.

9. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $P(8; 6)$ и отсекающей от координатного угла треугольник, площадь которого равна 12.

10. Площадь треугольника равна 8. Двумя его вершинами являются точки $A(1; -2)$ и $B(2; 3)$, а третья вершина C лежит на прямой $2x + y - 2 = 0$. Определите координаты вершины C .

11. Найдите длину перпендикуляра, опущенного из точки $P(4; -1)$ на прямую $12x - 5y - 27 = 0$.

12. Напишите уравнение биссектрис углов, образованных прямыми $x + 7y - 6 = 0$ и $5x - 5y + 1 = 0$.

13. Дано уравнение пучка прямых $(5x + 3y + 6) + q(3x - 4y - 37) = 0$. Докажите, что прямая $7x + 2y - 15 = 0$ не принадлежит этому пучку.

14. Найдите уравнение прямой, принадлежащей пучку прямых $(x + 2y - 5) + q(3x - 2y + 1) = 0$ и а) проходящей через точку $A(3; -1)$; б) проходящей через начало координат; в) параллельной оси абсцисс; г) параллельной оси ординат; д) параллельной прямой $4x + 3y - 5 = 0$; е) перпендикулярной к прямой $2x + 3y - 1 = 0$.

15. Установите, какие линии определяются в полярных координатах следующими уравнениями:

а) $\rho = 5$; б) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; в) $\rho \cos \varphi = 1$; г) $\rho \sin \varphi = 2$; д) $\rho = 10 \cos \varphi$;

е) $\rho = 6 \sin \varphi$; ж) $\sin \varphi = \frac{1}{2}$; з) $\sin \varphi = 1$; и) $\rho = a \sin 2\varphi$.

Сделайте схематические чертежи.

§ 2. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Основные сведения из теории

1°. Закончите утверждения:

1. Уравнение $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ определяет ... радиуса... с центром в точке

2. Уравнение окружности с центром в начале координат принимает следующий вид:

2°. Закончите определение:

Эллипсом называется множество точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек, называемых ..., есть

3°. Сделайте схематический чертеж эллипса, заданного каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

где a — ...,

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} — ...,$$

$$c — ... (c ... a),$$

$$e = \frac{c}{a} — ...,$$

причем для любого эллипса $e ... 1$.

4°. Закончите определение:

Гиперболой называется множество точек плоскости, для каждой из которых разность расстояний до двух фиксированных точек, называемых ..., есть

5°. Сделайте схематический чертеж гиперболы, заданной каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

где a — ...,

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} — ...,$$

$$c — ... (c ... a),$$

$$e = \frac{c}{a} — ...,$$

причем для любой гиперболы $e ... 1$.

Уравнения асимптот гиперболы: $y = \pm ...$.

6°. Закончите определение:

Параболой называется множество точек плоскости, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки, называемой ..., ... до некоторой фиксированной прямой, называемой... .

7°. Сделайте схематический чертеж параболы, заданной уравнением $y^2 = 2px$,

где p — ...,

$$c = \frac{p}{2} —$$

Уравнение директрисы параболы $x = ...$.

Для любой параболы $e ... 1$.

8°. Дано полярное уравнение конического сечения $\rho = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}$,

где ρ, φ — ... произвольной точки сечения, p — фокальный... (поло-

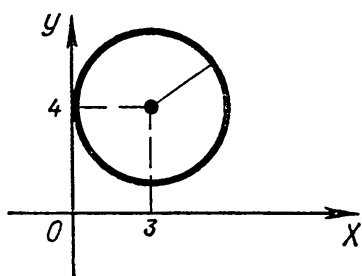


Рис. 6

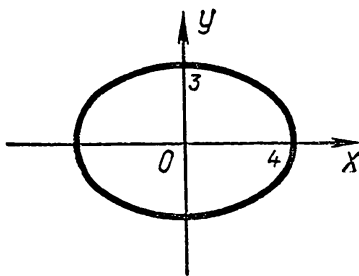


Рис. 7

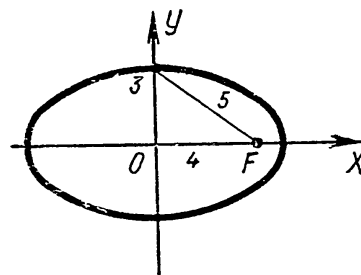


Рис. 8

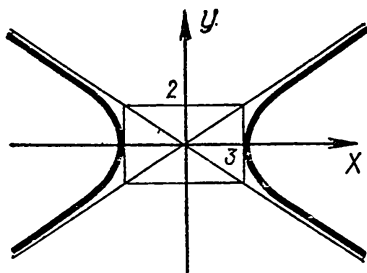


Рис. 9

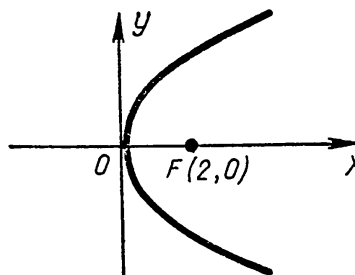


Рис. 10

вина фокальной хорды сечения, перпендикулярной к его оси). Укажите величину эксцентриситета ε для: 1) окружности, 2) параболы, 3) эллипса, 4) одной ветви гиперболы.

II. Примеры и упражнения

1. Напишите канонические уравнения кривых второго порядка, изображенных на рисунках 6—10.

2. Окружность задана уравнением $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$. Найдите путем выделения полного квадрата координаты ее центра и радиус. Сделайте схематический чертеж.

3. Эллипс задан уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Найдите величины a , b , c и ε . Сделайте схематический чертеж.

4. Гипербола задана уравнением $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Найдите величины a , b , c , ε и составьте уравнения асимптот. Сделайте схематический чертеж.

5. Парабола задана уравнением $y^2 = 12x$. Найдите координаты фокуса параболы и составьте уравнение ее директрисы. Сделайте схематический чертеж.

6. Установите, какие геометрические фигуры определяются следующими уравнениями:

а) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$;

б) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$;

в) $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 29 = 0$; г) $y = \sqrt{16 - x^2}$;

д) $y = -\sqrt{9 - x^2}$; е) $y = -2 - \sqrt{9 - x^2}$; ж) $x = -2 + \sqrt{4 - y^2}$;

з) $9x^2 + 16y^2 = 1$; и) $4x^2 + 9y^2 = 36$;

к) $y = -\frac{1}{7}\sqrt{49 - x^2}$; л) $9x^2 - 25y^2 = 1$; м) $4x^2 - y^2 = 16$;

н) $y = -3\sqrt{x^2 + 1}$; о) $y^2 = -4x$; п) $y = -3\sqrt{2x}$;

р) $x = 4\sqrt{-y}$.

7. Напишите уравнения касательных, проведенных из начала координат к окружности $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$.

Р е ш е н и е.

1. Уравнение прямой, проходящей через начало координат:

2. Найдем точки пересечения прямой и окружности, решив совместно систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0, \\ y = \dots \end{cases}$$

3. В случае касания две точки пересечения сливаются в одну, поэтому корни полученного уравнения должны быть действительными и равными, а значит, дискриминант уравнения $D = \dots$. Составив дискриминант и приравняв его ... , решим полученное уравнение и найдем значение параметра: ... и

4. Уравнение искоемых касательных:

8. Определите, какие линии заданы следующими уравнениями в полярных координатах:

а) $\rho = \frac{3}{1 - \frac{1}{3}\cos\varphi}$; б) $\rho = \frac{2}{1 - \cos\varphi}$;

в) $\rho = \frac{5}{1 - \frac{4}{3}\cos\varphi}$; г) $\rho = \frac{6}{3 - \cos\varphi}$;

д) $\rho = \frac{1}{2 - 3\cos\varphi}$; е) $\rho = \frac{1}{2 - 2\cos\varphi}$.

III. Упражнения для самостоятельного решения

1. Составьте уравнение окружности в каждом из следующих случаев:

а) центр окружности совпадает с началом координат и прямая $3x - 4y + 20 = 0$ является касательной к окружности;

б) окружность проходит через точки $A(3; 1)$ и $B(-1; 3)$, а ее центр лежит на прямой $3x - y - 2 = 0$;

в) окружность проходит через три точки $A(1; 1)$, $B(1; -1)$, $C(2; 0)$.

2. Составьте уравнения окружностей, которые, имея центр на прямой $4x - 5y - 3 = 0$, касаются прямых $2x - 3y - 10 = 0$ и $3x - 2y + 5 = 0$.

3. Составьте каноническое уравнение эллипса, если: а) $2a = 12$, $2c = 10$; б) $2c = 6$, $e = \frac{3}{5}$; в) $2b = 16$, $e = \frac{3}{5}$; г) расстояние между его

директрисами равно 32, а $\varepsilon = \frac{1}{2}$; д) расстояние между его директрисами равно 13, а $2b = 6$.

4. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найдите: а) его полуоси; б) фокусы; в) эксцентриситет; г) уравнения директрис.

5. Докажите, что точка $M(-4; 2,4)$ лежит на эллипсе $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Определите ее фокальные радиусы.

6. Составьте каноническое уравнение гиперболы, если: а) $2c = 10$, $2b = 8$; б) $2c = 10$, $\varepsilon = \frac{5}{3}$; в) уравнения асимптот $y = \pm \frac{5}{12}x$, а расстояние между вершинами равно 48; г) расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$, а $\varepsilon = \frac{3}{2}$; д) уравнение директрис $x = \pm \frac{4}{3}$, а точка $M(-3; \frac{5}{2})$ принадлежит гиперболе.

7. Определите, при каких m прямая $y = \frac{5}{2}x + m$: а) пересекает гиперболу $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$; б) касается ее; в) не имеет общих точек с гиперболой.

8. Составьте каноническое уравнение параболы, зная, что: а) парабола симметрична относительно оси Ox , расположена в левой полуплоскости, а ее параметр $p = 2$; б) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку $C(1; 1)$; в) фокус параболы $F(-7; 0)$, а уравнение директрисы $x - 7 = 0$.

9. Из фокуса параболы $y^2 = 12x$ под острым углом α к оси Ox направлен луч света. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$. Дойдя до параболы, луч от нее отразился. Составьте уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

10. Определите, какие линии заданы следующими уравнениями в полярных координатах:

$$\text{а) } \rho = \frac{15}{1 - \frac{1}{2} \cos \varphi}; \quad \text{б) } \rho = \frac{16}{1 - \cos \varphi};$$

$$\text{в) } \rho = \frac{1}{1 - \frac{3}{2} \cos \varphi}; \quad \text{г) } \rho = \frac{4}{2 - \cos \varphi};$$

$$\text{д) } \rho = \frac{5}{3 - 4 \cos \varphi}; \quad \text{е) } \rho = \frac{1}{3 - 3 \cos \varphi};$$

$$\text{ж) } \rho = 4; \quad \text{з) } \rho = \frac{1}{3 - 0 \cos \varphi}.$$

§ 3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

I. Основные сведения из теории

1⁰. Какие из нижеперечисленных величин являются векторными:
а) объем; б) скорость; в) давление; г) ускорение; д) плотность; е) масса;
ж) сила; з) температура; и) потенциал?

2⁰. Закончите определения:

1. Вектором называется

2. Скаляром называется

3. Длиной вектора $\overrightarrow{AB}$ называется

3⁰. Закончите предложения:

1. Запись $\vec{a} = \{x; y; z\}$ означает, что числа x, y, z являются

2. Если даны две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ определяются следующим образом: $\overrightarrow{AB} = \{...\}$.

3. Модуль вектора $\vec{a} = \{x; y; z\}$ определяется по формуле $|\vec{a}| = \dots$.

4. Если даны вектор $\vec{a} = \{x; y; z\}$ и координатный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то вектор $\vec{a}$ может быть разложен по базису: $\vec{a} = \dots$.

4⁰. Закончите определения линейных операций над векторами:

1. Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} + \vec{b} \dots$.

2. Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор $\vec{a} - \vec{b} \dots$.

3. Произведением вектора $\vec{a}$ на число α называется вектор $\dots$.

5⁰. Закончите определения скалярного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \dots$;

2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{Пр.} \dots = |\vec{b}| \cdot \text{Пр.} \dots$.

6⁰. Продолжите формулировку основных свойств скалярного произведения:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \dots$;

2) $\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda \vec{a} \cdot \dots$;

3) $\vec{a} (\vec{b} + \vec{c}) = \dots$;

4) $(\vec{a} \perp \vec{b}) \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \dots$;

5) $(\vec{a} \parallel \vec{b}) \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \dots$;

6) $\vec{a}^2 = \dots$.

7⁰. Закончите определение:

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор ..., имеющий направление ... и численно равный

8⁰. Изобразите вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ (рис. 11).

9⁰. Продолжите формулировку основных свойств векторного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = \dots$;

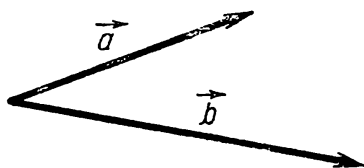


Рис. 11

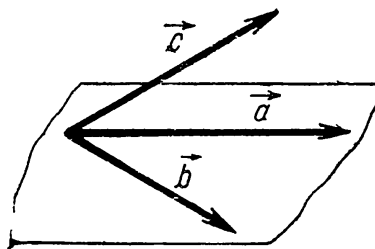


Рис. 12

- 2) $\vec{a} \times \lambda \vec{b} = \dots$;
- 3) $\vec{a} \times \vec{0} = \dots$;
- 4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \dots$;
- 5) $(\vec{a} \perp \vec{b}) \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = \dots$;
- 6) $(\vec{a} \parallel \vec{b}) \Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) = \dots$.

10°. Закончите определение:

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное векторному произведению $\vec{a} \times \vec{b}$, умноженному ... на вектор $\vec{c}$:

11°. Используя рисунок 12, выпишите произведения, численно равные объему параллелепипеда, построенного на этих векторах-сомножителях: $\vec{b} \vec{a} \vec{c}$, $\vec{b} \vec{c} \vec{a}$, $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$, $\vec{a} \vec{c} \vec{b}$, $\vec{c} \vec{b} \vec{a}$, $\vec{c} \vec{a} \vec{b}$.

12°. Закончите утверждение:

Пусть вектор $\vec{a}$ умножается векторно на вектор $\vec{b}$, а полученный результат снова векторно умножается на вектор $\vec{c}$. В итоге получается двойное ..., обозначаемое

13°. Даны два равенства:

- а) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$;
- б) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Укажите верное.

14°. Пусть $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$, $\vec{c} = \{x_3; y_3; z_3\}$. Заполните таблицу по указанному образцу:

$\vec{a} \pm \vec{b}$	$\{x_1 \pm x_2; \quad y_1 \pm y_2; \quad z_1 \pm z_2\}$
$\lambda \cdot \vec{a}$	
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	
$\vec{a} \times \vec{b}$	
$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$	
$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$	

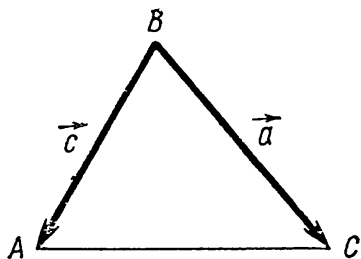


Рис. 13

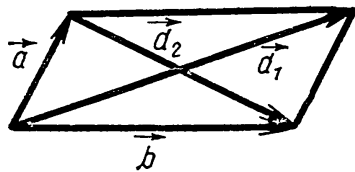


Рис. 14

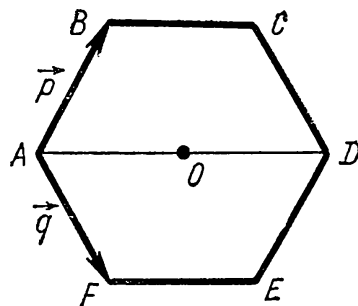


Рис. 15

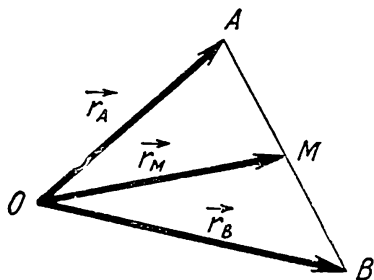


Рис. 16

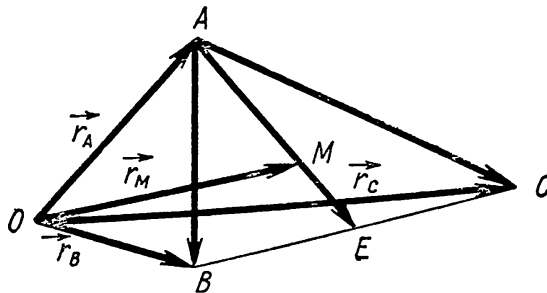


Рис. 17

II. Примеры и упражнения

1. Выразите вектор $\vec{AC}$ через $\vec{a}$ и $\vec{c}$ (рис. 13).
2. Выразите векторы $\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 14).
3. В правильном шестиугольнике (рис. 15) выразите через векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$:

- а) $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DB}$, $\vec{EF}$;
- б) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF} + \vec{FA}$;
- в) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF}$.

4. Докажите (рис. 16), что $\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B}{2}$, зная, что M — центр тяжести однородного стержня.

Доказательство.

Достраиваем параллелограмм на векторах $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$, тогда

5. Докажите (рис. 17), что $\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C}{3}$, зная, что M — центр тяжести однородной пластины ABC .

Доказательство:

Запишем последовательно:

$$\vec{AB} = \dots; \quad \vec{AC} = \dots; \quad \vec{AE} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2} = \dots; \quad \vec{AM} = \frac{2}{3} \vec{AE} = \dots; \quad \vec{r}_M = \dots$$