

В. Г. Болтянский, В.А. Ефремович

Наглядная топология

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
В11

В11 **В. Г. Болтянский**
Наглядная топология / В. Г. Болтянский, В.А. Ефремович – М.: Книга
по Требованию, 2012. – 160 с.

ISBN 978-5-458-24569-2

ISBN 978-5-458-24569-2

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2012

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2012

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

Топология — сравнительно молодой и очень важный раздел математики. Известный французский математик Андре Вейль сказал, что за душу каждого математика борются ангел топологии и дьявол абстрактной алгебры, выразив этим, во-первых, необычайное изящество и красоту топологии и, во-вторых, то, что вся современная математика представляет собой причудливое переплетение идей топологии и алгебры. А за последнее время топология все более проникает в физику, химию, биологию — один пример применения идей топологии в физике читатель найдет в Приложении, написанном В. П. Минеевым. Однако проникновение в волшебный мир топологии затруднительно. Подобно тому, как строительные леса, окружающие недостроенное здание, мешают охватить взглядом красоту архитектурного замысла, так многочисленные и утомительные детали построения, заполняющие книги по топологии, затрудняют охватить мысленным взором красивое здание этой математической науки. Даже специалисты-математики нередко отступают перед трудностями на пути овладения топологией (особенно алгебраической топологией, первоначальным идеям которой посвящена третья часть этой книги).

Все это делает очень важным написание популярных книг по топологии. Первая книга такого рода была выпущена в нашей стране еще в середине 30-х годов *). Впоследствии, начиная с 1957 г., во 2-м, 3-м, 4-м и 6-м выпусках «Математического просвещения» была опубликована по частям наша книга «Очерк основных идей топологии» (в Польше, Японии и Венгрии книга была выпущена отдельным изданием). Однако обе книги давно уже стали библиографической редкостью. В предлагаемую вниманию читателя книгу включена часть материала из «Очерка», в связи с чем В. А. Ефремович является одним из

*) Александров П. С., Ефремович В. А. Очерк основных понятий топологии. — М., 1936.

авторов книги (и, кстати, основным инициатором написания «Очерка» и проведения популяризаторской работы в области топологии). Однако ббольшую часть текста я написал заново (с учетом некоторых научных результатов, полученных за последние годы). Кроме того, я включил в книгу свыше двухсот задач — ведь чтение научной книги (даже популярной) лишь тогда приносит пользу, когда самостоятельно размышляешь над излагаемыми вопросами.

Пользуюсь случаем поблагодарить С. П. Новикова за ценные замечания, а также всех читателей, которые захотят высказать мнение об этой книге и замечания к ней.

В. Г. Болтянский

* * *

Это издание подготовил к печати В. Г. Болтянский, значительно переработав и дополнив материал нашего «Очерка». За все это искренне его благодарю; выражаю также признательность С. П. Новикову за ценные замечания и поддержку.

В. А. Ефремович

ТОПОЛОГИЯ ЛИНИЙ

1. Идея непрерывности

В основе, в истоках каждого отдела математики можно видеть основную идею, которая пронизывает всё его здание и определяет его лицо. Основной идеей топологии является идея *непрерывности*. Она встречается уже в математическом анализе, но, подчиненная другим идеям анализа, не получает там заметного развития. Свое полное и всестороннее развитие идея непрерывности получает в топологии. Приведем два примера применения этой идеи.

Пример 1. Покажем, что кубическое уравнение

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

с произвольными действительными коэффициентами a , b , c имеет, по крайней мере, один действительный корень.

Запишем уравнение (1) (при $x \neq 0$) в виде

$$x^3 \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \right) = 0. \quad (2)$$

При очень большом $|x|$ слагаемые $\frac{a}{x}$, $\frac{b}{x^2}$, $\frac{c}{x^3}$ очень малы по модулю, а выражение в скобках мало отличается от единицы и потому положительно. Следовательно, при очень большом $|x|$ левая часть уравнения (2) имеет тот же знак, что и x^3 , т. е. тот же знак, что и x . Иначе говоря, при большом отрицательном x (точка x_0 на рис. 1) левая часть уравнения (1) отрицательна, а при большом положительном x (точка x_1) она положительна. Так как график является *непрерывной кривой*, то, переходя с одной стороны оси абсцисс на

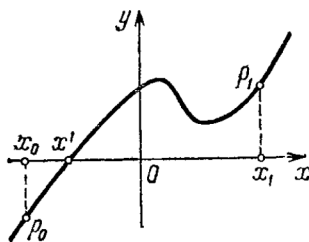


Рис. 1.

другую (из точки p_0 в точку p_1), он пересечет эту ось хотя бы в одной точке. Точка x' пересечения графика с осью абсцисс и дает корень уравнения (1).

Задачи

1. Докажите, что всякое уравнение нечетной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.

2. Докажите, что если в уравнении (1) свободный член с отрицателем, то это уравнение имеет хотя бы один положительный корень.

Пример 2. Покажем, что вокруг всякой замкнутой кривой K можно описать квадрат.

Проведем две параллельные прямые l, l' так, чтобы кривая K была расположена в полосе между ними, и будем перемещать сначала прямую l , а затем l' параллельно

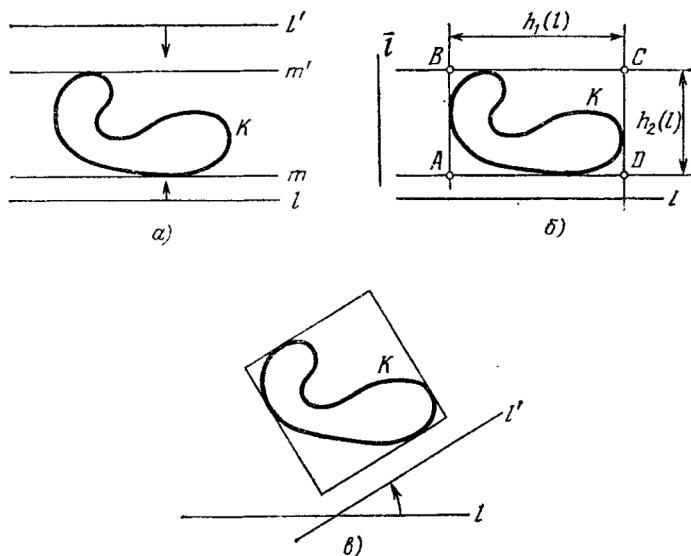


Рис. 2.

себе, до тех пор, пока они не коснутся кривой K . Полученные прямые m, m' (рис. 2, а) называются параллельными между собой *опорными прямыми* линии K . Проведем еще две опорные прямые, перпендикулярные l (рис. 2, б). Мы получим описанный вокруг линии K прямоугольник $ABCD$. Докажем, что при некотором направлении прямой l прямоугольник $ABCD$ превратится в квадрат.

Обозначим длину стороны AD , параллельной l , через $h_1(l)$, а длину стороны AB , перпендикулярной l , — через

$h_2(l)$. Описанный прямоугольник будет квадратом при $h_1(l) - h_2(l) = 0$.

Пусть $\bar{l}$ — прямая, перпендикулярная l . Описанный прямоугольник со сторонами, параллельными и перпендикулярными $\bar{l}$, совпадает с тем же прямоугольником $ABCD$, но параллельной $\bar{l}$ является сторона AB , а перпендикулярной $\bar{l}$ — сторона AD , т. е. $h_1(\bar{l}) = |AB| = h_2(l)$, $h_2(\bar{l}) = |AD| = h_1(l)$. Таким образом,

$$h_1(\bar{l}) - h_2(\bar{l}) = -(h_1(l) - h_2(l)). \quad (3)$$

Будем теперь поворачивать прямую l , пока она не совпадет с $\bar{l}$. При этом описанный прямоугольник будет плавно меняться, а разность $h_1(l) - h_2(l)$ будет непрерывно зависеть от l . Но при переходе от l к $\bar{l}$ эта разность меняет знак (см. (3)). Следовательно, при своем непрерывном изменении она (при некотором положении прямой l) обращается в нуль, т. е. описанный прямоугольник превращается в квадрат (рис. 2, в).

Задачи

3. Докажите, что вокруг всякой замкнутой кривой K можно описать ромб с углом 60° .

4. Докажите, что если диаметр плоской фигуры не превосходит d (т. е. расстояние между любыми ее точками не больше d), то существует правильный шестиугольник, содержащий эту фигуру, у которого расстояние между противоположными сторонами равно d .

5. Докажите, что если диаметр пространственной фигуры не превосходит d , то существует правильный октаэдр, содержащий эту фигуру, у которого расстояние между противоположными гранями равно d .

В топологии рассматриваются функции наиболее общего вида. Задать функцию — это значит каждой точке x некоторого множества A (области определения функции) поставить в соответствие определенную точку $f(x)$ некоторого другого множества B . Говорят в этом случае также, что задано отображение f множества A в множество B . Кратко это записывают в виде $f: A \rightarrow B$.

Пример 3. Обозначим через A контур равностороннего треугольника, а через B — описанную вокруг него окружность (рис. 3). Тогда центральное проектирование p точек множества A на окружность является отображением $p: A \rightarrow B$.

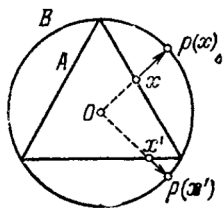


Рис. 3.

Функция $f: A \rightarrow B$ называется *непрерывной* в точке $x_0 \in A$, если для x , «мало» отличающихся от x_0 , значения $f(x)$ и $f(x_0)$ тоже «мало» отличаются друг от друга.

Более точно, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $\delta > 0$, что для любого x , отстоящего от x_0 менее чем на δ , соответствующее значение $f(x)$ отстоит от $f(x_0)$ менее чем на ε . Это определение имеет смысл, если и в множестве A , и в множестве B определено расстояние между точками.

Чтобы яснее понять, что такое непрерывность отображения, рассмотрим пример разрыва, т. е. нарушения непрерывности отображения. Возьмем обычную резинку, которую применяют в аптеке для упаковки лекарств. Она имеет форму окружности. Будем ее осторожно деформировать, и вдруг она в некоторой своей точке a разорвется. Что это значит? Некоторая ее часть B (рис. 4, а),

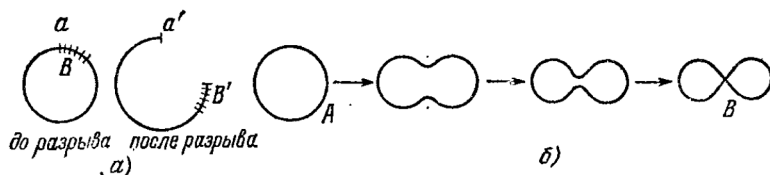


Рис. 4.

которая была «близка» к a (т. е. находилась от нее на нулевом расстоянии), после разрыва (теперь ее обозначим через B') оказывается вовсе не близкой к a' (новое положение точки a). Итак, разрыв в точке a — это такое событие, когда некоторая часть B фигуры, бывшая раньше близкой к a (пишем: $B\delta a$), становится неблизкой к новому положению a' точки a .

Теперь понятно следующее определение:

Отображение $f: x \rightarrow x'$ называется непрерывным в точке a , если всякая часть B отображаемой фигуры, бывшая близкой к a (т. е. $B\delta a$), после отображения переходит в положение B' , близкое к точке $a' = f(a)$ (т. е. $B'\delta a'$).

Можно доказать, что это определение эквивалентно приведенному выше определению.

Если отображение $f: A \rightarrow B$ непрерывно в каждой точке x_0 множества A , то говорят просто, что отображение f непрерывно. Наглядно непрерывность отображения можно себе представить, сказав, что «близкие» точки множества A переходят в «близкие» точки множества B , т. е. при отображении f не происходит разрыва, нарушения цельности множества A . Заметим, что при этом различные точки множества A могут образовывать «спайки» (рис. 4, б), «складки» и т. п.

Задача

6. Докажите, что отображение, рассмотренное в примере 3, непрерывно.

7. Для произвольного действительного a обозначим через $f(a)$ наибольший из корней уравнения $x^3 - 3x + a = 0$. Является ли функция $f(x)$ непрерывной?

2. Чем занимается топология?

Отображение $f: A \rightarrow B$ называется *взаимно однозначным*, если в каждую точку множества B отображается точно одна точка множества A . Это означает, что, во-первых, никакие две различные точки множества A не переходят в одну и ту же точку множества B (не «склеиваются» при отображении f) и, во-вторых, каждая точка множества B поставлена в соответствие некоторой точке множества A (т. е. A отображается на всё множество B , а не на его часть). Для взаимно однозначного отображения $f: A \rightarrow B$ можно определить *обратное отображение* $f^{-1}: B \rightarrow A$ (которое каждой точке $y \in B$ ставит в соответствие точку множества A , переходящую в y при отображении f).

Отображение $f: A \rightarrow B$ называется *гомеоморфным отображением* (или *гомеоморфизмом*), если оно, во-первых, взаимно однозначно и, во-вторых, взаимно непрерывно, т. е. не только само отображение f непрерывно, но и обратное отображение f^{-1} также непрерывно.

Наглядно гомеоморфизм можно представлять себе как такое отображение одного множества на другое, которое происходит и без разрывов, и без склеиваний. Например, будем считать, что фигуры A , B «изготовлены» из очень прочного и эластичного материала, и будем допускать любые растяжения и искривления этого материала без разрывов и без образования складок и склеек; если мы сможем при этих условиях «наложить» фигуру A на B , то они гомеоморфны. Так, контур треугольника (или, вообще, любого многоугольника) гомеоморфен окружности.

Пример 4. Поверхность шара, поверхность куба, цилиндра — все гомеоморфны между собой. Однако эти поверхности не гомеоморфны *тору* (который можно наглядно представить себе как поверхность баранки или автомобильной камеры, рис. 5). Поверхность гири (рис. 6) гомеоморфна тору.

Пример 5. Будем представлять себе буквы русского алфавита в виде линий. Буквы Г, Л, М, П, С гомеоморфны

между собой. Буквы Е, У, Т, Ч, Ш, Ц, Э также гомеоморфны между собой, но не гомеоморфны указанным ранее буквам. Буква О не гомеоморфна никакой другой букве русского алфавита.

Пример 6. Пусть A — полуокружность с центром o , из которой исключены концевые точки m , n , а B — касатель-

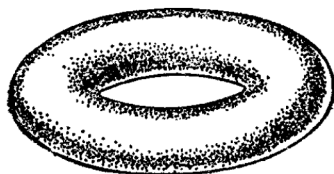


Рис. 5.

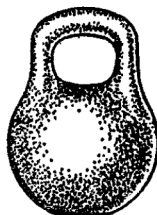


Рис. 6.

ная к полуокружности, параллельная диаметру mn (рис. 7). Центральное проектирование $p: A \rightarrow B$ из центра o является гомеоморфизмом. Таким образом, прямая гомеоморфна полуокружности без концевых точек.

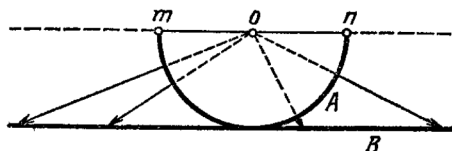


Рис. 7.

В свою очередь полуокружность гомеоморфна отрезку (ее можно распрямить). Следовательно, *прямая гомеоморфна открытому отрезку* (т. е. отрезку, из которого выброшены концевые точки).

Задачи

8. Докажите, что фигура, являющаяся объединением боковой поверхности цилиндра и его нижнего основания («стакан»), гомеоморфна кругу.

9. Докажите, что плоскость гомеоморфна открытому кругу (т. е. кругу, к которому не причисляются точки ограничивающей его окружности), а также сфере, из которой «выколота» (удалена) одна точка.

10. Докажите, что фигуры, изображенные на рис. 8 (лента, гомеоморфная боковой поверхности цилиндра, и дважды перекрученная лента) гомеоморфны между собой *).

Поучительно сравнить понятие гомеоморфизма и понятие конгруэнтности фигур. В геометрии рассматриваются отображения, сохраняющие расстояния между точками. Они называются *движениями* (или *перемещениями*). В результате движения каждая фигура перекладывается на новое место как твердое целое, без изменения расстояний. Две фигуры, которые переводятся одна в другую («совмещаются») с помощью движения, называются *конгруэнтными* и рассматриваются как одинаковые, как не отличающиеся (с геометрической точки зрения) друг от друга. В топологии рассматриваются отображения, более общие, чем движения, а именно гомеоморфные отображения. Две гомеоморфные между собой фигуры рассматриваются (с топологической точки зрения) как одинаковые, не отличающиеся друг от друга. Те свойства фигур, которые не изменяются при гомеоморфных отображениях, называются *топологическими свойствами фигур*, или *топологическими инвариантами* (от латинского слова *invariant* — неизменный). Изучением топологических свойств фигур и занимается *топология*.

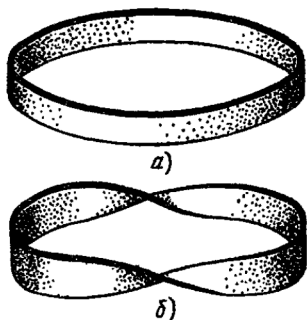


Рис. 8.

Задачи

11. Если фигура A состоит лишь из конечного числа точек, то через $n(A)$ обозначим число ее точек; если же фигура A содержит бесконечно много точек, то условимся писать $n(A) = \infty$. Является ли $n(A)$ топологическим инвариантом?

12. Фигура A называется *вложимой в плоскость*, если она гомеоморфна некоторой фигуре, лежащей в плоскости. Например, «стакан» (задача 8) вложим в плоскость. Является ли свойство фигуры быть вложимой в плоскость топологическим инвариантом?

*) На рис. 8 (и следующих) поверхности изображены «толстыми», т. е. как бы изготовленными из некоторого материала. Читатель должен иметь в виду, что это сделано только для наглядности, и должен представлять себе «математические» поверхности, не имеющие толщины.

Не следует думать, что любые две гомеоморфные между собой фигуры можно перевести одну в другую, изгибая, растягивая и перемещая их (без разрывов и склеиваний) в пространстве. Например, фигуры, изображенные на рис. 8, нельзя перевести одну в другую таким способом, они «неодинаково расположены» в пространстве. Верхнюю ленту нужно разрезать и затем, дважды перекрутив, снова склеить по тем же самым точкам; лишь после этого ее удастся совместить со второй лентой. Этот прием (разрезание фигуры, а затем, после надлежащего растяжения, перемещения ее частей — обратное склеивание) часто используется в топологии для доказательства гомеоморфности двух фигур.

«Одинаковость расположения» двух фигур в пространстве (или в объемлющей их фигуре) уточняется понятием *изотопии*. Говорят, что две гомеоморфные фигуры A и B *изотопны* в объемлющей их фигуре P (или, иначе, *топологически одинаково расположены* в P), если существует гомеоморфное отображение фигуры P на себя, при котором фигура A переходит в B . Ленты на рис. 8 гомеоморфны, но не изотопны друг другу в пространстве (доказательство этого будет дано ниже). О свойствах расположения можно говорить, если задана *пара фигур*: фигура A и объемлющая ее фигура P . Изучением свойств расположения (т. е. изучением топологических инвариантов пары фигур) также занимается топология.

Задачи

13. Линия A (рис. 9) не разрезает тор T на две части, а линия C разрезает. Изотопны ли A и C в фигуре T ? Изотопны ли A и C в трехмерном пространстве?

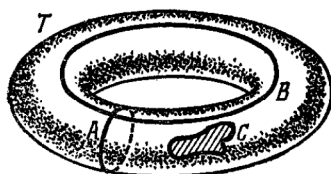


Рис. 9.

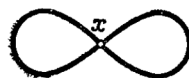


Рис. 10.

14. Докажите, что меридиан A и параллель B тора T (см. рис. 9) изотопны в T .

15. Докажите, что в фигуре восьмерки (рис. 10) любые две точки, отличные от x , изотопны.