

Р. Гауснер

Начертательная геометрия

Том 2. Плоскогранные фигуры. Элементы перспективы плоскогранных фигур в пространстве и на плоскости

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Р11

Р11 **Р. Гауснер**
Начертательная геометрия: Том 2. Плоскогранные фигуры. Элементы перспективы плоскогранных фигур в пространстве и на плоскости / Р. Гауснер – М.: Книга по Требованию, 2021. – 116 с.

ISBN 978-5-458-31797-9

Начертательная геометрия.
Том 2. Плоскогранные фигуры. Элементы перспективы плоскогранных фигур в пространстве и на плоскости.
С 63 чертежами.

ISBN 978-5-458-31797-9

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

Отдел I.

Плоскогранные фигуры.

n-гранный угол.

1. В точке *S*, называемой вершиной *n*-гранного телесного угла или *n*-гранника, сходятся *n* ребер и *n* граней, из коих каждая определяется двумя ребрами. Углы каждой грани, заключенные между двумя ребрами, называются плоскими углами или сторонами, а углы заключенные между двумя гранями, сходящимися в одном ребре, называются двугранными, или телесными углами *n*-гранного угла.

Двугранные углы надо измерять так, чтобы каждая пара соседних углов находилась по одну сторону общей грани. Если из двух двугранных углов, заключенных между двумя гранями, и дополняющих друг друга до 360° , избрать один, то тем самым, однозначно определены остальные. Если все двугранные углы *n*-гранника меньше 180° , то его называют выпуклым *n*-гранным углом. Если грани такого *n*-гранного угла не пересекают друг друга, то сумма его плоских углов всегда меньше 360° ; т. е. если представить себе грани выпуклого *n*-гранника развернутыми, то угол полученный у вершины *S* должен быть меньше 360° .

2. Если из вершины *n*-гранного угла опустить перпендикуляры на его грани и через них провести плоскости, то получим новый выпуклый *n*-гранный угол, который называется, по отношению к прежнему, полярным *n*-гранным углом.

Отношения обоих *n*-гранных углов вполне взаимны.

Если ребро одного n -гранного угла находится в зависимости от перпендикулярной к нему грани другого, то все грани и ребра одного n -гранного угла находятся в однозначной зависимости от другого.

Из вышесказанного видно, что каждый плоский угол одного n -гранного угла дополняет соответствующий угол другого до 180° .

На основании сказанного выше относительно суммы плоских углов n -гранного угла, следует, что сумма двугранных углов n -гранного угла больше, чем $(n-2) \cdot 180^\circ$.

Трехгранный угол.

3. Простейший телесный угол будет при $n=3$, когда получается трехгранный угол. Он имеет то же значение, при построении углов с большим числом граней, какое треугольник имеет при построении многоугольников. Все плоские и двугранные углы трехгранного угла предполагаются всегда меньше 180° , что не является ограничением для более общих случаев, т. к. в случае трехгранного угла, не отвечающего этой предпосылке, его можно расчленить на несколько углов с вышеупомянутым свойством.

Вершину трехгранного угла обозначим опять через S , ребра — через a, b, c , прилежащие к ним двугранные углы — через α, β, γ и грани, противолежащие им, — через A, B, Γ [след. $A = \sphericalangle(b, c)$ и т. д.].

На основании вышесказанных теорем, касающихся суммы граней и двугранных углов n -гранного угла, относительно трехгранных углов будут действительны следующие неравенства:

$$(1) \quad 0 < A + B + \Gamma < 360^\circ$$

$$(2) \quad 180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ (= 3 \cdot 180^\circ).$$

Если, кроме того, прибегнуть к помощи так называемого смежного трехгранного угла, напр., того, который образуется от продолжения ребра a за S с b и c и обладает поэтому плоскими углами $A, 180^\circ - B, 180^\circ - \Gamma$ (и дву-

гранными углами: $\alpha, 180^\circ - \beta, 180^\circ - \gamma$), то на основании неравенства (I)

$$A + 180^\circ - B + 180^\circ - \Gamma < 360^\circ,$$

т. е.

$$(3) \quad B + \Gamma > A,$$

и подобным же образом находим:

$$(3) \quad \Gamma + A > B, A + B > \Gamma.$$

Если составить эти неравенства также и для полярного трехгранного угла ($\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$), то из $B + \Gamma > A$ следует:

$$180^\circ - \beta + 180^\circ - \gamma > 180^\circ - \alpha,$$

или

$$(4) \quad \beta + \gamma < 180^\circ + \alpha;$$

и аналогично

$$(4) \quad \gamma + \alpha < 180^\circ + \beta, \alpha + \beta < 180^\circ + \gamma.$$

По трем данным из шести элементов ($A, B, \Gamma; \alpha, \beta, \gamma$), трехгранного угла можно найти остальные три. Следовательно, получаются шесть основных задач — в зависимости от того, какие из нижеследующих величин даны:

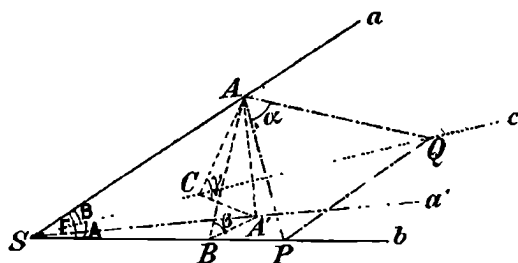
$$\begin{array}{lll} \text{(I)} A, B, \Gamma; & \text{(II)} A, B, \gamma; & \text{(III)} A, B, \beta; \\ \text{(IV)} A, \beta, \gamma; & \text{(V)} \alpha, \beta, A; & \text{(VI)} \alpha, \beta, \gamma. \end{array}$$

При этом данные величины должны быть выбраны соответственно неравенствам (1) до (4) для того, чтобы задачи были реальны. Три последние задачи можно привести к первым трем при помощи полярного трехгранного угла. Однако, в дальнейшем все 6 задач решены непосредственно.

4. При решении первых двух задач надо помнить следующее. Если из какой-либо точки A (черт. 1) ребра a опустить перпендикуляры AB, AC, AA' , на два других угла и на противоположающую грань A и соединить точки B и C с A' , то и $A'B \perp b, A'C \perp c$, т. к. b и c будут перпендикулярны к плоскостям ABA' и ACA' . Тогда $\angle ABA' = \beta$, $\angle ACA' = \gamma$, и SA' будет вертикальной проекцией a' линии a на плоскости грани A . Если теперь совместить грань Γ вокруг ребра b с гранью A , то точка A опишет во время

этого совмещения дугу окружности радиуса BA , совпадающего с продолжением $A'B$, плоскость которой перпендикулярна к b . Если, кроме того, еще совместить площадь треугольника $AA'B$ вокруг $A'B$ с гранью A , то дуга окружности описанной точкой A , во время предыдущего совмещения появится в своей истинной величине, в виде части окружности с центром в B и радиусом BA . То же будет при совмещении грани B вокруг C и плоскости треугольника $AA'C$ вокруг $A'C$ с A .

Если проложить через точку A еще одну плоскость $\perp a$, то она пересечет прилегающие грани B и Γ по прямым



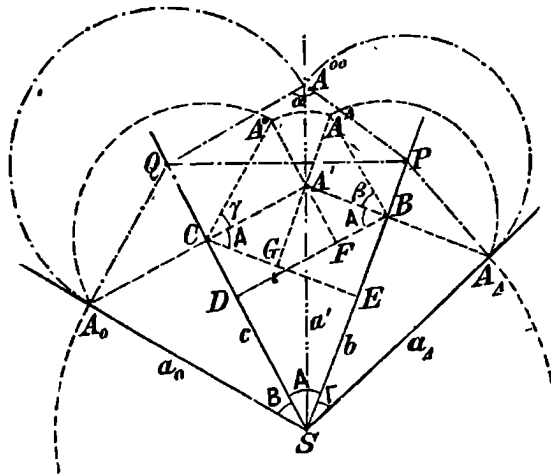
Черт. 1.

AP и AQ , также перпендикулярным к a , которые будут составлять угол α . Очевидно, ребро $a \perp PQ$ и, следовательно, a' , будучи вертикальной проекцией a на A (по теореме § 64 части I), $\perp PQ$. Поэтому, после совмещения треугольника PAQ вокруг PQ с гранью A , точка A попадет на прямую SA' . На основании этих рассуждений, построение для решения двух первых задач достаточно ясно.

5. Задача I. Построить трехгранный угол, если известны три его грани A, B, Γ .

В этой и последующих задачах грань A в треугольном углу будет находиться на Π_1 . Затем строят на Π_1 (черт. 2) в точке b_1 двугранный угол $(b | a_1) = \Gamma$ и в c — двугранный угол $(c | a_0) = B$. На ребрах a_1, a_0 выбирают на произвольном расстоянии от S точки A_1, A_0 , так что $SA_1 = SA_0$, и опускают из них перпендикуляры A_1B и

A_0C на ребра b и c , которые пересекаются в точке A . $SA' = a'$ будет тогда первой проекцией ребра a . Затем восстанавливаем в A' перпендикуляр на A_0A' и описываем вокруг B радиусом BA_0 дугу окружности, точку пересечения которой A^d , с перпендикуляром, восстановленным в A' , соединим с B ; тогда $\angle A'BA^d$ будет искомым двугранным углом β . Таким же образом находим двугранный угол $\gamma = \angle A'SA^0$, проводя вокруг C окружность радиуса



Черт. 2.

SA_0 , и соединяем точку пересечения ее A^0 с перпендикуляром, восстановленным в A' на A_0A' , с точкой C .

Проверка: $A'A^d = A'A^0$; эта длина дает расстояние точки A от Π_1 .

Чтобы найти α , восстанавливают в A_0 перпендикуляр на a_1 , который пересекает ребро b в P , и в A_0 восстанавливают перпендикуляр на a_0 , который и пересекает c в Q . Окружности, описанные радиусом PA_0 вокруг P и радиусом QA_0 вокруг Q , пересекаются в A^{00} , и $\angle PA^{00}Q = \alpha$. Проверка: $PQ \perp a'$, A^{00} должна находиться на a' .

Самый трехгранный угол получается, если повернуть грани B и Γ обратно вокруг c и b так, чтобы ребра a_0 и a_1 ,

Затем опускают из C^A перпендикуляр $C^A F_A$ на CB . Точка F_A есть точка основания F перпендикуляра, опущенного из C на грань Γ , и совмещенная затем вместе с этой гранью. Если построить треугольник $C^A F_A A^A$, гипотенуза которого будет равна CA_0 , то он будет подобен треугольнику $CF A$, и его катет $F_A A^A$ определяет кратчайшее расстояние FA точки F от ребра a . Следовательно, опишем вокруг F_A окружность радиуса $F_A A^A$; тогда a_A , т. е. совмещенное с Γ ребро a , должно коснуться окружности. Следовательно, $\angle(a_A | b) = \Gamma$, и $\angle S^A A^A F_A = \alpha$. Проверка: $SA_A = SA_0$.

Если продолжить $A_A F_A$ до точки пересечения P с b , то получим первую проекцию ребра a в виде перпендикуляра a' к CP . Угол γ находим, как в § 5.

Так как в случае, изображенном на черт. 4, окружность, описанная вокруг F_A , не пересекает ребра b , то вторая касательная a_A^I , проведенная к ней из S , дает второе решение; третье искомое ребро будет тогда $\Gamma^I = \angle(a_A^I | b)$, и угол, прилегающий к ребру a , будет дополнительным углом к α , входившему в первое решение. В этом случае окружность не пересекает b , т. к. $A > B$, поэтому $A^A F_A < B F_A$ и $\beta < 90^\circ$.

Если мы исследуем всевозможные случаи*), то находим, что задача имеет

два решения, если $C_A F^A < CA_0 < CB$, и одновременно

или B и $\beta < 90^\circ$,

или B и $\beta > 90^\circ$;

одно решение, когда $C_A F^A < CA_0$ и $CA_0 > CB$,

или $C_A F^A = CA_0$ **).

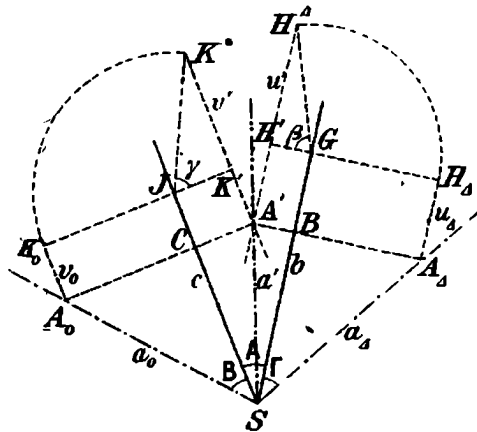
*) Здесь следует пользоваться неравенствами (1) и (4), упомянутыми в § 3, и теоремой конца § 5.

**) В последнем случае $\alpha = 90^\circ$; трехгранный угол, следовательно, прямоугольный.

Во всех других случаях нельзя построить трехгранного угла с данными заданиями.

8. *Задача IV.* Построить трехгранный угол по одной грани A и двум прилежащим углам β , γ ,

(Черт. 5). Если представить себе плоскость $\parallel A$, проведенную через любую точку A ребра a , то такая плоскость пересечет грань Γ по главной линии $u \parallel b$, проходящей через A , и грань B по главной линии $v \parallel c$. Если из точек H и K этой главной линии опустить перпендикуляры на A , кото-



Черт. 5.

рые пересекут эту грань в точках H' и K' , то тогда $HH' = KK'$. Если провести еще плоскости через HH' и KK' так, чтобы они были $\perp b$, c и пересекали их в точках G , J , то $\sphericalangle HGH' = \beta$ и $\sphericalangle KJK' = \gamma$, если β и γ даны $< 90^\circ$; в противном случае, $\sphericalangle HGH' = 180^\circ - \beta$, или $\sphericalangle KJK' = 180^\circ - \gamma$. Таким образом получаем следующее построение.

В любой точке G на b восставляют перпендикуляр к b , строят в G угол β' (или $180^\circ - \beta$) в сторону части, перпендикуляра уходящей внутрь A и через любую точку H' на другой стороне угла β проводят параллельную к b . Треугольник $H'G$ есть треугольник $HH'G$ после совмещения. Прямая $H'H'$ есть первая проекция u' главной линии,

