

**А.П. Юшкевич**

# **История математики**

**Том 3**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 51  
ББК 22.1  
А11

А11 **А.П. Юшкевич**  
История математики: Том 3 / А.П. Юшкевич – М.: Книга по Требованию, 2024. – 497 с.

**ISBN 978-5-458-41371-8**

В 3-х томах: Том 3: Математика XVIII столетия

**ISBN 978-5-458-41371-8**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2024  
© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Первая глава. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МАТЕМАТИКИ XVIII ВЕКА</i><br>(А. П. Юшкевич, Б. А. Розенфельд) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 7   |
| Век просвещения (7). Ведущая роль механики (9). Основные направления математики (12). Научные центры (14). Математическое образование (22). История математики (26).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |     |
| <i>Вторая глава. АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА</i> (И. Г. Башмакова, Б. А. Розенфельд, А. П. Юшкевич) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 32  |
| Леонард Эйлер (32). Основные руководства по алгебре (39). Системы счисления (41). Счетные машины и таблицы (42). Десятичные и непрерывные дроби (45). Учение о числе (47). Отрицательные числа (52). Мнимые и комплексные числа (56). Линейные уравнения и определители (66). Даламбер и основная теорема алгебры (70). Доказательство Эйлера (74). Численное решение уравнений и рекуррентные ряды (76). Другие численные методы; отделение корней (80). Решение алгебраических уравнений в радикалах (84). Ж. Л. Лагранж (88). Исследования Гаусса (93). Работа Руффини (95). Комбинаторика (97).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |
| <i>Третья глава. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ</i> (И. Г. Башмакова, Е. П. Ожигова, А. П. Юшкевич) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 101 |
| Труды Эйлера (101). Исследование задач Ферма (102). Обобщение малой теоремы Ферма и теория степенных вычетов (103). Диофантов анализ (105). Аналитические методы (106). Трансцендентные числа (110). Работы Лагранжа (114). Теорема Вильсона; проблемы Варинга и Гольдбаха (117). «Опыт теории чисел» Лежандра (118). «Арифметические исследования» Гаусса (120).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |
| <i>Четвертая глава. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ</i> (О. Б. Шейнин, Л. Е. Майстров) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 126 |
| От Я. Вернулли до Муавра (126). Предельные теоремы А. де Муавра (128). Статистика народонаселения (130). Теория ошибок (133). Теорема Байеса (137). Работы Д. Бернулли (140). Критические выступления Даламбера (144). Лаплас (146).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |     |
| <i>Пятая глава. ГЕОМЕТРИЯ</i> (Б. А. Розенфельд, при участии А. П. Юшкевича) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 153 |
| Аналитическая геометрия на плоскости в начале XVIII в. (153). Кривые высших порядков (155). Особые точки плоских кривых (157). Клеро (160). Второй том «Введения в анализ бесконечных» Эйлера (163). Конформные преобразования (169). Аналитическая геометрия на плоскости во второй половине XVIII в. (171). Аналитическая геометрия в пространстве (173). «Приложение о поверхностях» Эйлера (176). Движения в пространстве (179). Дальнейшее развитие аналитической геометрии в пространстве (180). Идея многомерного пространства (183). Гаспар Монж (184). Дифференциальная геометрия на плоскости (186). Дифференциальная геометрия пространственных кривых (187). Дифференциальная геометрия поверхностей (189). Начертательная геометрия (195). Проективная геометрия (197). Элементарная геометрия (201). Элементы топологии у Эйлера (204). Плоская тригонометрия и полигонометрия (205). Сферическая тригонометрия и геометрия (209). Теория параллельных линий (215). |     |
| <i>Шестая глава. ИСЧИСЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ</i> (Н. И. Симонов) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 222 |
| Конечные разности (222). Врук Тейлор (224). Рекуррентные последовательности (227). Ряд Стирлинга (227). Интерполяционные формулы Лагранжа (230). Исследования Эйлера; суммирование функций (231). Уравнения в конечных разностях (233). Нелинейные разностные уравнения (236). Дифференциально-разностные уравнения (238).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |     |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Седьмая глава. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ</b><br>(А. П. Юшкевич) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 241 |
| Структура и особенности анализа в XVIII в. (241). Руководства Эйлера по анализу (246). Развитие понятия функции (250). Проблемы обоснования анализа (255). «Аналист» Беркли (256). Определение предела (259). Маклорен и метод исчерпывания (261). «Исчисление нулей» Эйлера (265). Метод пределов Даламбера (272). Метод пределов и теория компенсации ошибок Карно (278). Теория производных функций Лагранжа (282). «Математические начала» да Куньи (291). Эклектизм Лакруа (293). Ряд Тейлора (294). Проблемы сходимости рядов (300). Улучшение сходимости рядов (304). Ряд Эйлера — Маклорена (305). Суммирование расходящихся рядов (309). Тригонометрические ряды (312). Показательная и логарифмическая функция (318). Тригонометрические функции (323). Формулы Эйлера и спор о логарифмах (324). Бесконечные произведения и суммы простейших дробей (328). Приближенное вычисление числа $\pi$ (331). Новые трансцендентные функции (333). Некоторые вопросы дифференциального исчисления (341). Понятие интеграла (344). Кратные интегралы (349). Техника интегрирования (352). Эллиптические интегралы (354). Новые специальные интегралы (360). Элементы теории функций комплексного переменного (365). |     |
| <b>Восьмая глава. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ</b><br>(Н. И. Симонов) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 369 |
| Первые работы петербургских академиков (369). Новые задачи естествознания и техники (371). Первые методы решения нелинейных уравнений (373). Интегрирующий множитель (375). Уравнение Риккати (377). Дифференциальные уравнения и эллиптические интегралы (378). Линейные уравнения (382). Линейные системы с постоянными коэффициентами (385). Линейные уравнения с переменными коэффициентами (387). Приближенные методы (393). Метод малого параметра (395). Метод Лапласа (модификация метода малого параметра) (396). Истоки теории особых решений (399). «Частные интегралы» и «частные решения» у Лапласа (403). Теория особых решений Лагранжа (404). Краевые задачи (406). Дальнейшее развитие теории дифференциальных уравнений (408).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |     |
| <b>Девятая глава. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ</b><br>(В. И. Антропова) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 409 |
| Первые геометрические задачи (409). Задача о колебаниях струны. Волновое уравнение (412). Решение Даламбера (413). Решение Эйлера (415). Начало спора об интеграле волнового уравнения (416). Д. Вернулли и решение в форме тригонометрического ряда (416). Возражения Эйлера и Даламбера (418). Лагранж и Арбогаст (418). Задачи гидромеханики; уравнение Лапласа (419). Гидромеханические исследования Эйлера (421). Уравнения первого порядка (425). Новые задачи математической физики (427). Третий том «Интегрального исчисления» Эйлера (429). Новые успехи в теории уравнений первого порядка (434). Метод Лагранжа — Шарпи (435). Геометрическая теория Монжа (437). Характеристики (438). Уравнение Пфаффа (440). Метод каскадов Лапласа (440). Теория потенциала; исследования Лагранжа (442). Уравнение Лапласа и сферические функции (443). Полиномы Лежандра (446). Дальнейшее развитие теории дифференциальных уравнений с частными производными (450).                                                                                                                                                                                                                                                |     |
| <b>Десятая глава. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ</b><br>(А. В. Дорофеева) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 452 |
| Функционалы и их экстремумы (452). Вариационные проблемы в XVII в. (453). Вариационное исчисление Эйлера (457). Создание метода вариаций (460). Вторая вариация и условие Лежандра (466). Дальнейшее развитие вариационного исчисления (471).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |     |
| <b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b><br>(А. П. Юшкевич, Б. А. Розенфельд) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 472 |
| <b>БИБЛИОГРАФИЯ</b> . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 477 |
| <b>ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ</b> . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 484 |

## ПЕРВАЯ ГЛАВА

### ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МАТЕМАТИКИ XVIII ВЕКА

#### Век просвещения

XVIII в. в Европе был веком дальнейшего укрепления капиталистического строя, технической революции и перехода от мануфактурного производства к фабричному. В ведущей стране того времени Англии после буржуазной революции XVII в. власть феодального дворянства была окончательно подорвана. Аграрный переворот в середине XVIII в. и промышленный переворот в конце XVIII и начале XIX в. еще более укрепили английскую буржуазию и ее роль в политическом руководстве страной. В это же время Англия завоевывает Индию, Канаду и многие другие колонии, вытесняя из них Францию, Испанию и Португалию. В XVIII в. колониальная империя Англия терпит только одно серьезное поражение — в войне с ее северо-американскими колониями, объявившими себя независимыми Соединенными Штатами.

На европейском континенте буржуазия, экономическая мощь которой также быстро возрастала, еще не получила политической власти. В отличие от Англии, где власть фактически принадлежала парламенту, страны континентальной Европы представляли собой абсолютные дворянские монархии. Наиболее крупными из них были Франция, Австро-Венгрия (до 1806 г. еще именовавшаяся «Священной римской империей германской нации») и Россия. Сильнее всего буржуазия была во Франции, где назревала и в 1789 г. произошла Великая Французская революция. Идеологической подготовкой революции была деятельность французских просветителей Вольтера, Руссо и др., определившая одно из названий XVIII столетия — «век просвещения». Крупнейшим событием духовной жизни страны явилось издание «Энциклопедии или Толкового словаря наук, искусств и ремесел» (*Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, Paris, 1751—1772) — 28 томов. «Энциклопедия» была проникнута материалистическим и демократическим духом; ее издание наряду с философом Дени Дидро некоторое время возглавлял математик и механик Даламбер. Революция значительно ускорила развитие науки во Франции. Выдающееся значение имело, в частности, создание высших учебных заведений нового типа, — об этом нам еще придется говорить.

Влияние французских идеологов «века просвещения» в той или иной степени сказывалось на всех странах континента. Даже абсолютизм во многих государствах принимал форму «просвещенного абсолютизма», и такие монархи, как прусский король Фридрих II и русская императрица

Екатерина II, оказывали, иногда вопреки своим личным желаниям, поддержку различным мероприятиям в области образования и науки.

Германия и Италия в рассматриваемое время были раздроблены на большое количество соперничавших государств, крупнейшим из которых было Прусское королевство, но среди которых имелись и княжества в несколько квадратных километров. Политической и экономической отсталостью Германии и Италии в значительной степени объясняется, что в XVIII в. они выдвинули меньше крупных ученых, чем Англия и Франция. Голландия, потерпевшая военное поражение от Англии в XVIII в. и потерявшая большую часть своих колоний (в том числе Новые Нидерланды с Новым Амстердамом — нынешним Нью-Йорком), в XVIII в. отошла на второй план.

В конце XVII и в первой четверти XVIII в. реформы Петра I коренным образом преобразовали ранее отсталую Русь, которая вступила в число великих держав. Важную роль сыграли перемены в системе образования, создание сети чисто светских школ, где преподавалась и математика, а также издание учебной литературы. Впервые в широких масштабах началась подготовка технических и научных специалистов высокой квалификации. В 1703 г., одновременно с основанием новой столицы России — Санкт-Петербурга выходит в свет книга преподавателя Московской школы математических и навигационных наук Леонтия Филипповича Магницкого (1669—1739) «Арифметика, сиречь наука числительная» (Москва, 1703). Во II томе мы неоднократно цитировали эту книгу, являвшуюся учебником не только арифметики, но и алгебры, геометрии и тригонометрии, изложенных применительно к потребностям русских читателей того времени. Венцом научных преобразований была организация по указу Петра в 1725 г. Петербургской академии наук, сразу же занявшей одно из ведущих мест в Европе.

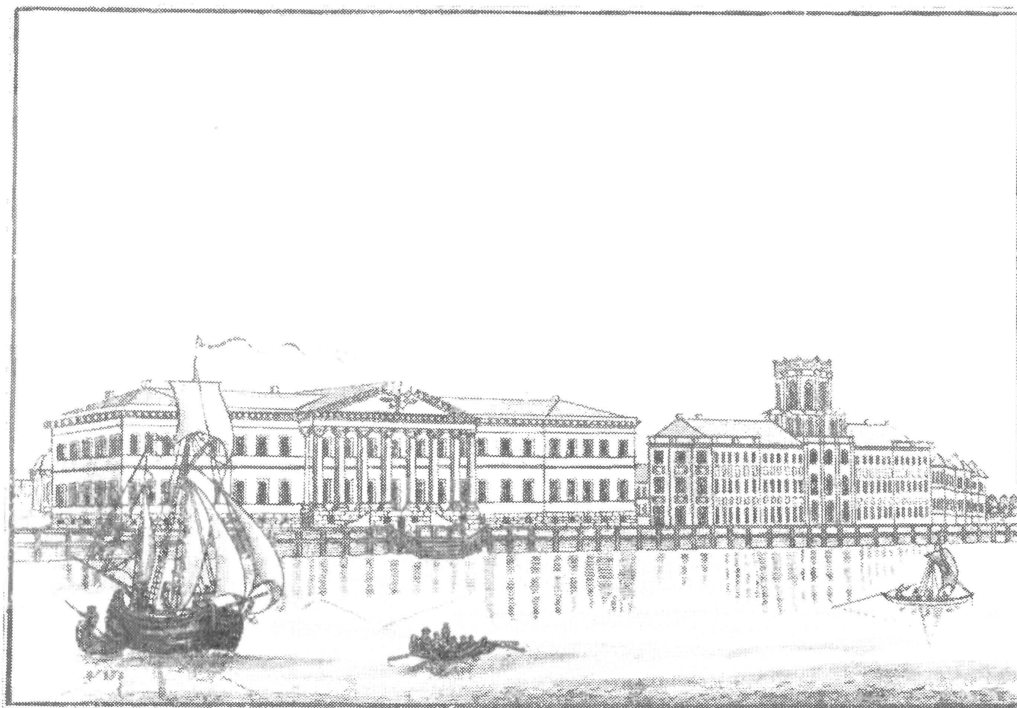
Трагично сложилась в XVIII в. судьба Польши. Раздираемая внутренними неурядицами, эта страна, выдвинувшая ряд блестящих деятелей культуры, к концу века потеряла политическую независимость, оказавшись разделенной между Россией, Австрией и Пруссией. Югославия оставалась подвластной Турции и частично Австрии; важнейшим центром югославской культуры в XVIII в. была Дубровницкая республика, тесно связанная с Венецианской республикой.

Во втором томе мы говорили о возникновении и развитии в XVII в. механической картины физического мира. В XVIII в. механистическая концепция получила дальнейшее развитие и распространение. Этому способствовали успехи как отдельных наук, так и материалистической философии, яркими представителями которой были Дидро, Гельвеций, Гольбах во Франции, Толанд в Англии, Ломоносов в России и многие другие выдающиеся мыслители. Маркс писал: «Механистический французский материализм примкнул к физике Декарта в противоположность его метафизике»<sup>1</sup>. Если Декарт уподобил машине животных, но еще не человека, то Ламеттри, полагая, что различие между человеком и животным только количественное, одно из своих сочинений озаглавил «Человек — машина» (*L'homme-machine*. La Haye, 1747).

В физических науках механистическая концепция господствовала почти безраздельно, и ее придерживались даже ученые, мировоззрение которых в целом не было материалистическим. С особенной яркостью

<sup>1</sup> К. Маркс и Ф. Энгельс. Сочинения, т. 2. Изд-е 2. Госполитиздат, 1955, стр. 140.





Петербургская Академия наук и Кунсткамера  
(с гравюры конца XVIII в. Архив АН СССР, Ленинград)

концепцию универсальной механики выразил в начале XIX в. Лаплас в предисловии к своему «Опыту философии теории вероятностей» (*Essai philosophique sur les probabilités*, 1814): «Ум, которому были бы известны для какого-либо данного момента все силы, одушевляющие природу, и относительное положение всех ее составных частей, если бы вдобавок он оказался настолько обширным, чтобы подчинить эти данные анализу, обнял бы в одной формуле движение величайших тел вселенной наравне с движениями легчайших атомов: не осталось бы ничего, что было бы для него недостоверно, и будущее, так же, как прошедшее, предстало бы перед его взором»<sup>1</sup>. Ньютон еще допускал бога в качестве творца мира, сообщившего ему первый толчок; для Лапласа мир извечно развивается уже по собственным законам. Поэтому, излагая картину мира в своей пятитомной «Небесной механике» (*Mécanique céleste*, Paris, 1799—1825), Лаплас ни разу не упоминает о боге. Говорят, что на замечание Наполеона по этому поводу Лаплас ответил: «Государь, я не нуждался в этой гипотезе».

### Ведущая роль механики

В приведенных словах из «Опыта» Лапласа нашли выражение то господствующее положение, которое продолжала занимать в системе естественных наук механика, и, вместе с тем, перемены, которые произошли в самой механике. Всеобъемлющей формулой, которая в принципе заключает в себе все законы движения материи, ничего не оставляя на долю случая, должна была быть некоторая система дифференциальных уравне-

<sup>1</sup> П. С. Лаплас. Опыт философии теории вероятностей. Перевод А. К. Власова, М., 1908, стр. 11.

ний с соответствующими данными начальными условиями и ее интегралы — какое-то гигантское обобщение законов механики, установленных на протяжении XVII—XVIII вв.

Развитие механики в рассматриваемое время происходило в непосредственном переплетении с прогрессом математического анализа, гораздо более тесном, чем ранее. В XVII в. задачи механики оказывали мощное влияние на математику, и к их решению постоянно привлекались различные инфинитезимальные приемы. Однако, как говорилось во II томе, новое исчисление бесконечно малых не было еще положено в основу великой системы механики, разработанной Ньютоном. Только в XVIII в., и притом со второй трети его, структура анализа, именно дифференциального и интегрального исчисления Лейбница, переносится в механику Ньютона. Впервые в широком объеме этот перенос был осуществлен в 1736 г. Эйлером в двухтомной «Механике, или науке о движении, изложенной аналитическим методом» (*Mechanica, sive motus scientia analytice exposita*, Petropoli, 1736).

Предисловие к этому классическому труду ярко выражает положение дел в механике, как оно рисовалось ученым, владевшим исчислением бесконечно малых, и мы приведем из него несколько выдержек.

Кратко охарактеризовав математические методы, примененные в «Математических началах натуральной философии» Ньютона и в одном (впрочем, малозначительном) сочинении Я. Германа (1716), Эйлер писал: «Однако, если анализ где-либо и необходим, так это особенно относится к механике. Хотя читатель и убеждается в истине выставленных предложений, но он не получает достаточно ясного и точного их понимания, так что, если чуть-чуть изменить те же самые вопросы, он едва ли будет в состоянии разрешить их самостоятельно, если не прибегнет сам к анализу и те же предложения не разрешит аналитическим методом»<sup>1</sup>. Это случилось и с самим Эйлером, и он решил «выделить анализ из этого синтетического метода», благодаря чему «нашел много новых методов», обогативших и механику, и анализ. «Таким образом и возникло это сочинение о движении, в котором я изложил аналитическим методом и в удобном порядке как то, что я нашел у других в их работах о движении тел, так и то, что я получил в результате своих размышлений»<sup>2</sup>.

После того как Эйлер аналитически разработал в цитированном труде динамику точки, новые методы быстро становятся преобладающими во всех областях механики. За исключением Маклорена, следовавшего в решении некоторых вопросов за Ньютоном, все крупные механики — они же математики — того времени (Клеро, Даламбер, Лагранж и Лаплас), а за ними и другие применяли анализ бесконечно малых Лейбница. Рамки теоретической механики при этом чрезвычайно раздвинулись. Эйлер, помимо динамики точки, разработал систему динамики твердого тела (1765); Д. Бернулли внес крупный вклад в гидравлику и гидродинамику (1738), основные дифференциальные уравнения которой для идеальной жидкости дал Эйлер (1757); Маклорен (1742), Клеро (1743) и Даламбер исследовали первые задачи теории фигур равновесия вращающейся тяжелой жидкой массы, а Лежандр и Лаплас с начала 80-х годов далеко продвинули вперед теорию потенциала... Перечисление успехов теоретической

<sup>1</sup> Л. Эйлер. Основы динамики точки. Перевод В. С. Гохмана и С. П. Кондратьева под редакцией В. П. Егоршина. М.—Л., 1938, стр. 33—34.

<sup>2</sup> Там же, стр. 34.

механики можно было бы продолжить далеко. Мы упомянем по крайней мере такое выдающееся достижение механики упругих и гибких тел, как решения задачи о колебаниях струны, т. е. решения волнового уравнения, предложенные Даламбером, Эйлером и Д. Бернулли (1747—1755), а также огромный цикл работ по небесной механике Клеро, Даламбера, Эйлера и Лапласа, укрепивших систему Ньютона и подтвердивших предложенный им закон всемирного тяготения, которому, казалось, противоречили видимое движение Луны, фигура Земли и некоторые другие факты. Все эти исследования сопровождалось поисками общих принципов, позволяющих дедуктивно строить систему механики, исходя из немногих начал. Вехами на пути этих поисков, которые вели еще Стевин, Галилей, Я. Бернулли, Герман и другие ученые, были принцип Даламбера (1743), сводящий динамические задачи к статическим, и принцип наименьшего действия, высказанный Мопертюи и в более удачной форме Эйлером (1744). Дальнейшее развитие и, главное, современную трактовку принципы механики получили у Лагранжа, который дал своему основополагающему в этой области труду характерное название «Аналитическая механика» (*Mécanique analytique*. Paris, 1788). В предисловии к этому сочинению Лагранж подчеркивал, что в нем «совершенно отсутствуют какие бы то ни было чертежи. Излагаемые мною методы не требуют ни построений, ни геометрических или механических рассуждений; они требуют только алгебраических операций, подчиненных планомерному и однообразному ходу. Все любящие анализ с удовольствием убедятся в том, что механика становится новой отраслью анализа, и будут мне благодарны за то, что этим путем я расширил область его применения»<sup>1</sup>.

Многие трудные задачи общей и небесной механики были тесно связаны с практическими работами. Такова была давно поставленная проблема определения долготы в открытом море. Еще в 1733 г. английский парламент назначил премию в 20 000 фунтов стерлингов за удовлетворительное решение этой проблемы, хотя бы с точностью до полградуса (впоследствии требования к точности повысились). Одним из способов здесь могло служить достаточно точное знание местоположения Луны относительно Солнца или неподвижных звезд. Однако определение движения Луны, в котором требовалось учитывать совместное действие притяжения Солнца и Земли (это частный случай «задачи трех тел»), оказывалось более трудным, чем анализ движения планет. Еще в конце XVII в. ошибка в предсказании лунных затмений достигала часа и даже более. На аналогичные трудности наталкивалось использование таблиц движения спутников Юпитера. Когда гёттингенский астроном Тобиас Майер (1723—1762), используя методы Эйлера и свои личные наблюдения, составил новые лунные таблицы (1753), они получили высокую оценку прославившегося открытием аберрации света и нутации земной оси Джемса Брадлея (1693—1762) и затем Невилля Маскелайна (1732—1811). В 1765 г., уже после смерти Майера, его труды были премированы суммой в 3000 ф. ст., Эйлеру было присуждено 300 ф. ст., а 10 000 ф. ст. получил замечательный конструктор Джон Гаррисон (1693—1776), хронометр которого с маятником, почти не подверженным температурным влияниям, отличался удивительной точностью; за месяц путешествия его ошибка была меньше полминуты. Но и лунные таблицы широко применялись мореплавателями

<sup>1</sup> Ж. Лагранж. Аналитическая механика, т. I. Перевод В. С. Гохмана, под редакцией Л. Г. Лойцянского и А. И. Лурье. М.—Л., 1950, стр. 9—10.

еще более ста лет и с 1767 до 1915 г. включались в морские справочники, — после этого их полностью вытеснили радиосигналы, позволяющие всегда знать точное время на корабле и при посредственном хронометре.

Академии наук специально поощряли исследования по прикладной математике, организуя международные конкурсы и назначая высокие премии за лучшие работы. Таковы были многочисленные конкурсы по теории движения планет и комет, неоднократно объявлявшиеся Парижской и Петербургской академиями, конкурс Парижской академии по теории морских приливов и отливов 1740 г., целый ряд конкурсов по вопросам кораблестроения и кораблевождения, компасному делу, оптической технике и т. д.

Математиков привлекали и непосредственно, как экспертов, к решению различных технических вопросов, что, разумеется, в той или иной мере направляло их теоретические интересы. Укажем, для примера, на многолетние занятия Эйлера в 30-е и 40-е годы проблемами «морской науки» по поручению Петербургской академии, а в 40-е и 50-е годы — баллистикой и каналостроением по поручению короля Фридриха; добавим к этому работы Эйлера по конструированию и расчету реактивных водяных турбин, которыми он интересовался в ходе переписки с И. А. Зегнером, профессором естествознания и математики в Иене, Гёттингене и Галле, имя которого известно и сейчас каждому школьнику («Зегнерово колесо»). Глубокие исследования Эйлера по гидродинамике приходится на то же время, что и по гидротехнике, и это не случайно. Другое дело, что здесь, как и во многих других случаях, практическое применение теории оказывалось возможным далеко не сразу, частично потому, что теория сперва строилась для слишком упрощенных физических моделей, частично потому, что требовалось время для преодоления чисто математических трудностей.

Заметим, что столь популярная в XVIII в. паровая машина еще не возбудила тогда математических исследований, так как учение о теплоте находилось еще в совершенно неразвитом состоянии. Однако уже в самом начале следующего столетия одна из сторон этого учения — теория теплопроводности — была подвергнута глубокой аналитической разработке Фурье.

### Основные направления математики

Если механика оставалась в XVIII в. ведущей среди наук о природе, то в математике доминирующее положение продолжал занимать анализ, который — опять-таки подобно механике — разделялся на несколько относительно самостоятельных дисциплин. Эта дифференциация была обусловлена как внутренними потребностями самой математики, так и запросами естествознания, более всего механики, контакт с которой особенно усилился после придания ей аналитической структуры. Собственно дифференциальное и интегральное исчисление распространяется на функции многих переменных; впервые вводятся элементарные функции комплексного переменного, причем методы теории аналитических функций вскоре находят применения в решении уравнений с частными производными и в картографии, которая поставила перед математикой несколько важных и трудных задач. В недрах интегрального исчисления, отчасти в связи с интерполированием последовательностей и с решением дифференциальных уравнений математической физики, а отчасти в развитие ранее

поставленных геометрических задач, выделяется учение об определенных интегралах и специальных функциях — эллиптических интегралах, цилиндрических функциях, функциях В и Г, интегральном логарифме и других (знаменитая  $\zeta$ -функция появляется в другой ситуации). В середине XVIII в. выделяется, как новая отрасль анализа, теория дифференциальных уравнений, разделяющаяся на две ветви — обыкновенных уравнений и уравнений с частными производными; механика поставляет при этом все новые и новые классы уравнений и их систем, для решения которых приходится прибегать к бесконечным рядам — степенным, обобщенным степенным, тригонометрическим и некоторым другим разложениям по ортогональным функциям. В самой теории рядов возникают новые направления: асимптотические разложения и суммирование расходящихся рядов. Так же в середине XVIII в. оформляется в самостоятельную дисциплину вариационное исчисление. Наконец, тогда же велась большая и плодотворная работа в области оснований анализа, нередко в форме острых дискуссий о понятиях бесконечно малой величины и предела, о допустимом объеме понятия функции и о допустимости расходящихся рядов и т. д. И если механика становилась наукой аналитической, то анализ постепенно все более выходил из-под господства геометрических или механических представлений, и мышление аналитиков приобретало специфический алгебраико-арифметический характер. Исследования по основаниям анализа предвещали его близкую реформу, произведенную в первой половине следующего века.

Успехи анализа в немалой степени отразились на развитии других математических наук, и его методы проникали в теорию чисел, алгебру, учение о конечных разностях, теорию вероятностей, геометрию. В алгебре принципиально новые идеи были порождены в ходе изучения вопроса о разрешимости уравнений в радикалах, как и вопроса о приводимости уравнений; здесь зарождалось уже теоретико-групповое мышление. Теория чисел, эта кузнечная мастерская, в которой издавна выковывались и оттачивались многие методы общего значения, получает значительное развитие и с тех пор привлекает к себе внимание многих крупнейших математиков. В теории вероятностей важнейшим событием была посмертная публикация закона больших чисел Я. Бернулли, о чем уже говорилось, но и впоследствии имелись немалые достижения — установление центральной предельной теоремы, теоремы о вероятностях гипотезы, работы по теории ошибок, приложения к статистике народонаселения и страховому делу.

В геометрии, наряду с дальнейшим прогрессом аналитической и особенно дифференциальной геометрии пространственных кривых и поверхностей, а также с применением некоторых новых важных преобразований, следует особо отметить два обстоятельства. Одним из них было тесно связанное с задачами строительства и фортификации развитие новых методов начертательной геометрии, подготавливавшее почву прежде всего для проективной геометрии, возродившейся в начале XIX в. (идеи Дезарга к тому времени были забыты). Другим явился резкий подъем в исследованиях по теории параллельных линий, за которыми естественно последовало, уже в начале XIX в. открытие неевклидовой геометрии.

Дифференциация математики не влекла за собой утраты единства этой науки. Напротив, по мере возникновения новых ее отделов усиливались внутренние связи между ними, понятия и методы одних областей плодотворно применялись в других. Математика развивалась как единое целое.



## Научные центры

Основными центрами развития математики, как и всей науки в XVIII в., остаются академии наук, при которых работали крупнейшие ученые. По большей части — наиболее видным исключением являлось Лондонское королевское общество — это были государственные учреждения, деятельность которых субсидировалась, контролировалась и в некоторой степени направлялась правительствами. Значение университетов в научном исследовании было еще невелико, если не считать опять-таки Англию и те страны, где академий не имелось, как, например, Швейцарию или отдельные немецкие княжества. Ведущими академиями в XVIII в. были Парижская, Берлинская, особенно после ее реорганизации в 1745 г., и Петербургская; из многих других мы назовем только две, игравшие некоторое время заметную роль в прогрессе математики, — Туринскую академию, основанную в 1757 г., и Мюнхенскую, созданную двумя годами позднее, в 1759 г.

Помимо организации чисто теоретических исследований, академии снаряжали географические экспедиции, составляли карты, вели астрономические и метеорологические наблюдения, изучали флору, фауну и недра земли; им нередко поручалось также решение насущных задач техники, мореплавания и военного дела; академические конкурсы стимулировали разработку широкого круга научных и технических вопросов. Некоторые академии, как Петербургская, имели в своем составе учебные заведения, где велась подготовка научных кадров, а также вспомогательного персонала обсерваторий и лабораторий, механических и оптических мастерских, учителей и переводчиков и т. д. Математики принимали во всем этом деятельное участие. Одной из важнейших функций академий являлся обмен научной информацией и прежде всего издание журналов и монографий.

По сравнению с XVII в. значительно увеличился выпуск периодической литературы. Здесь академиям принадлежало первое место. Специальные математические журналы начали появляться только в самом конце рассматриваемого столетия, так что статьи по математике печатались вместе с другими в общих академических записках. Эти записки обычно выходили ежегодно, но нередко с опозданием (на один-два года и даже более); поэтому в дальнейшем мы указываем две даты: в скобках официальный год тома и затем фактический год издания. Вот некоторые наиболее важные периодические издания, которые появились в XVIII в. в дополнение к выходящим с 1665 г. «Philosophical Transactions» Лондонского королевского общества, к лейпцигским «Acta Eruditorum» (1682—1731), продолжением которых явились «Nova Acta Eruditorum» (1732—1795), и к парижскому «Journal des Savants» (1665—1792). С 1699 г. начался выпуск ежегодников «Histoire et mémoires de l'Académie des sciences de Paris»<sup>1</sup>, прекратившийся после 1790 г. в связи с закрытием в 1793 г. Парижской академии наук, вместо которой в 1795 г. был создан I класс Национального института наук и искусств, вновь переименованный в Академию наук Института Франции в 1816 г. Помимо того, с 1750 по 1786 гг. Парижская академия издавала «Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'Académie des sciences par divers savants», т. е. сочинения, представлявшиеся ей посторонними учеными. Берлинская академия издала в 1710—1743 гг.

<sup>1</sup> Далее цитируется сокращенно: Mém. Ac. Paris.