

Б. Н. Делоне, Д. К. Фадеев

**Труды математического института имени В.
А. Стеклова**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Б11

Б11 **Б. Н. Делоне**
Труды математического института имени В. А. Стеклова / Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев – М.: Книга по Требованию, 2017. – 340 с.

ISBN 978-5-458-67542-0

До сих пор в математической литературе не существует монографии по теории кубических иррациональностей. Наша книга заполняет этот пробел. Весьма естественно, что эта монография издается нашей Академией Наук, так как большое число исследований по теории иррациональностей третьей степени принадлежит математикам, так или иначе связанным с нашей Академией: Е. Золотареву, А. Маркову, Г. Вороному, мне, В. А. Тартаковскому, Д. К. Фаддееву, Б. А. Венкову и О. К. Житомирскому. Важнейшие исследования иностранных математиков, сюда относящиеся, принадлежат Эйзенштейну, Туэ, Морделлю, Нагелю, А. Вейлю и Зигелю, а также Дедекинду и Гассе. Исследования этих двух последних математиков мы не включили в монографию, так как они гетерогенны ей по методу и представляют собою скорее применение общей теории поля классов к частному случаю кубического поля.

ISBN 978-5-458-67542-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2017
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2017

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

полнения вычислений, в ней рассматриваемых, и иногда даже сопровождаем их численными примерами. В § 11 я предлагаю одну формулу для непосредственного возвышения кубического числа в любую степень; способ извлечения корня предложен Фаддеевым, он удобен для проверки, основная ли данная единица или нет, а также используется в § 49 для решения задачи, обратной задаче Чирнгаузена, для двух уравнений 4-й степени. В § 13 дано мое [15] решение этой задачи для двух уравнений 3-й степени. § 15 содержит теорию, развитую Ф. Леви [28] и мною [15]. В § 16 изложен мой [15] способ решения задачи эквивалентности для двух кубических двойничных форм без теории приведения. § 17 содержит изложение известного способа Вороного [8] для вычисления базиса кубического поля; способа, бывшего главным результатом его магистерской диссертации, § 18 — алгоритм разложения простого числа на простые идеалы в поле n -го порядка по Золотареву [26] и, в частности, в кубическом поле.

Глава III. В §§ 26—30 и 37—41 дана непосредственная табуляризация решеток, повторяющихся умножением, а следовательно и полей 3-й и 4-й степеней всех сигнатур. Параграфы эти оканчиваются таблицами таких решеток. Табуляризация колец 3-й степени положительного дискриминанта была впервые произведена Арндтом [1—4] в 1852 г., по идее Эйзенштейна [21], как табуляризация классов двойничных кубических форм. Аналогичная табуляризация для отрицательного определителя была произведена Метьюсом (Mathews) и Бервиком [30, 31] и иначе мною [15]. Табуляризация колец 4-й степени с сигнатурой (числом пар комплексных корней) $\tau=0$ была произведена мной, И. Соминским и К. Билевичем [18], а для $\tau=1$ таблица была вычислена Ч. Поплавским. §§ 32—35 содержат геометрию кубических двойничных форм; теория приведения была разработана Метьюсом [30, 31] и мною, рассмотрение кубических двойничных форм как норм принадлежит Фаддееву. Теорема § 36 была доказана Тартаковским еще в 1919 г. в связи с появившимся у нас с ним предположением, возникшим из рассмотрения обширной таблицы дискриминантов кубических единиц, вычисленной в 1918 г. для меня при помощи арифмометров студентами Киевского университета; эта теорема до сих пор осталась нигде не опубликованной.

Относительно классификации кубических областей по квадратичным и областей 4-й степени по кубическим должен сказать следующее. Эйзенштейн в 1841 г. [21] дал любопытную классификацию кубических двойничных форм по их квадратичным ковариантам, которая была затем усовершенствована в работах Арндта [1—4]. На моих семинарах в Ленинградском университете я не раз указывал, что эта теория Эйзенштейна может быть, во-первых, рассматривается как классификация кубических колец по квадратичным областям, во-вторых, геометризирована и, в-третьих, обобщена на области высших порядков. Б. А. Венков впоследствии [6] переизложил классификацию Эйзенштейна на язык теории алгебраических чисел, а О. К. Житомирский [24] закончил ее геометризацию, а именно, указал как надо выбирать оси в пространстве проекции, и после этого мне удалось уже сообразить, в чем состоит обобщение этой теории на области 4-й степени. Подробно обобщение на области 4-й степени проделал Д. К. Фаддеев [59]. В настоящее время я и Фаддеев [62] строим эту теорию для полей любой степени. Если считать прямою задачей теории Галуа нахождение всех алгебраических свойств заданного поля в зависимости от его группы Галуа, а обратную — нахождение по данной группе всех полей, имеющих ее своей группой Галуа, то излагаемая в §§ 42—53 теория является полным решением обратной задачи теории Галуа для полей 3-й и 4-й степеней. Мы приводим здесь эту теорию (в весьма тщательной и подробной обработке Фаддеева) и для полей 4-й степени, так как их классификация основана на рассмотрении полей 3-й степени, и даже, что весьма любопытно, на рассмотрении общих трехмерных решеток, повторяющихся умножением (т. е. также и приводимых), и их побочных решеток.

Глава IV посвящена алгоритму Вороного для вычисления автоморфизмов умножения полей 3-й степени. Сначала мы думали дать все существующие для этой цели алгоритмы: Золотарева [25], Минковского [33], Шарва (Charve) [67]; Вороного [9], Бервика [5] и Успенского [55], однако затем предпочли изложить только алгоритм Вороного, как являющийся самым глубоким. Случай $D > 0$ обработан Д. К. Фаддеевым, а случай $D < 0$ мною (см. также мою заметку [16]). В § 64 дана (усовершенствованная Д. К. Фаддеевым) переработка алгоритма Вороного для $D < 0$, предложенная мною на съезде в Харькове, такая, что приходится вычислять только с целыми рациональными числами. Должен сказать, что Д. К. исключительно изящно усовершенствовал мои вычисления, заметив, что лучше всего преобразовывать параллельно данную тройничную кубическую разложимую форму и ей полярную. Он же ввел треугольный символ для тройничной кубической разложимой формы.

Глава V содержит изложение теоремы Туэ. Основные мысли изложения, данного в §§ 65, 66, 68, принадлежат В. А. Тартаковскому (см. [17]), ему же принадлежит термин: „заградительный ряд“. § 69 и приводимый в нем результат принадлежат В. А. Тартаковскому; этот результат, существенно дополняющий результат Туэ, до сих пор не был опубликован.

В § 70 дан результат Зигеля [46], полученный им из соображений, близких к соображению Туэ, в оригинальной переработке Фаддеева, носящей геометрический и значительно более элементарный характер (не используются гипергеометрические разложения и связанные с ними оценки). Более тщательное проведение оценок позволило дать несколько более сильный результат: 15 решений вместо 18. Этот результат является обобщением моей теоремы § 75 на случай положительного дискриминанта. Надо думать, что граница 18 по Зигелю или 15 по Фаддееву для числа решений — не точная (моя граница 5 для случая отрицательного дискриминанта — точная).

Глава VI включает в первой своей части, в §§ 71, 75, 76, мои исследования [11—14] о представлении чисел кубическими двойничными формами отрицательного определителя и (в конце § 75) добавление Нагеля [42] к моей работе [12], а в §§ 72, 73, 74 — продолжения моего исследования [11], данные Д. К. Фаддеевым [57, 61]; теорема Нагеля [40] содержится в этих исследованиях как частный случай. Во второй части главы VI помещено доказательство основной теоремы Морделля, данное А. Вейлем (André Weil) [7], и исследования Д. К. Фаддеева [58] об уравнении $x^3 + y^3 = Az^3$.

Термином „поле“ мы обозначаем везде конечное алгебраическое расширение поля рациональных чисел. С точки зрения решеток, повторяющихся умножением, рассматриваемых в главе I, поле представляет собою совокупность одноименных координат всех точек некоторой неприводимой решетки, повторяющейся умножением, и этих же координат частных, получающихся от деления ее точек друг на друга. Аналогичную совокупность координат в том случае, если решетка, повторяющаяся умножением, может быть и приводима, мы называем „областью“.

Б. Делоне

ЛИТЕРАТУРА

1. Arndt. Versuch einer Theorie der homogenen Functionen des dritten Grades mit zwei Variabeln. Archiv d. Math. und Phys., 17, 1851.
2. — Untersuchungen über die Anzahl der cubischen Klassen, welche zu einer determinierenden quadratischen Klasse gehören. Archiv d. Math. und Phys., 19, 1852.
3. — Tabellarische Berechnung der reducierten binären kubischen Formen und Klassification derselben. Archiv d. Math. und Phys., 31, 1858.
4. — Zur Theorie der binären kubischen Formen. Journ. f. Math., 53, 1857.
5. Berwick. An algorithm for finding units in cubic fields of negative discriminant. Proc. of the London Math. Soc., 1913.
6. Вейков. Классификация кубических областей по квадратичным. Труды II Всесоюзного съезда математиков в Ленинграде в 1934 г.
7. Weil. A. Sur un théorème de Mordell. Bull. Sci. Math., 2 Ser., t. 54, 1930.
8. Вороной. О целых алгебраических числах, зависящих от корня уравнения 3-ей степени. СПб. 1894.
9. — Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей. Варшава, 1896.
10. Dedekind. Ueber reine cubische Körper. Journ. f. Math., 121, 1900.
11. Делонэ. Решение неопределенного уравнения $X^3q + Y^3 = 1$. Изв. Ак. Наук 1922.
12. — О числе представлений числа кубической двойичной формой отрицательного определителя. Изв. Ак. Наук 1922.
13. — Math. Z. Bd. 28 и 31, перевод работ 11 и 12.
14. — Ueber den Algorithmus der Erhöhung. Журн. Лен. М. О. 1927.
15. — Решение задачи эквивалентности и табуляризация кубических двойичных форм отрицательного определителя. Журн. Лен. М. О. 1926.
16. — Interprétation géométrique de la généralisation de l'algorithme des fractions continues donné par Voronoï. C. R. 1923.
17. — О неопределенных уравнениях. Труды Всеросс. съезда мат. в Москве в 1927 г.
18. — Таблица чисто вещественных областей 4-го порядка совместно с И. Соминым и К. Билевичем. Изв. Ак. Наук 1935.
19. — К геометрии теории Галуа. Юбилейный сборник Граве 1939.
20. Eisenstein. Théorème sur les formes cubiques... Crelle 27, 1844.
21. — Untersuchungen über die cubischen Formen mit zwei Variabeln. Crelle, 27, 1844.
22. — Eigenschaft der Ausdrücke, welche bei der Auflösung cubischer Gleichungen erscheinen. Crelle 27, 1844.
23. — Allgemeine Untersuchungen über die Formen dritten Grades mit drei Variabeln, welche der Kreistellung ihre Entstehung verdanken. Crelle, 28, 1844.
24. Житомирский. Sur la classification des formes cubiques. Изв. Ак. Наук, 1935.
25. Золотарев. Об одном неопределенном уравнении 3-й степени. СПб. 1869.
26. — Теория целых комплексных чисел с приложением к интегральному исчислению. СПб. 1874.
27. Klein. Ausgewählte Kapiteln der Zahlentheorie. Литограф. лекц. Göttingen 1896.
28. Levi F. Kubische Zahlkörper und binäre kubische Formenklassen. Berichte der Sächsischen Ges. d. Wiss. Bd. 66, 1914.
29. Марков. Sur les nombres entiers dépendants d'une racine cubique d'un nombre entier ordinaire. Mém. de l'Acad. de St. Petersburg VII ser. t. 38.
30. Matthews a. Berwick. On the reduction of arithmetical binary cubics which have a negative determinant. Proc. London Math. Soc. 10, 1912.
31. — On the reduction and classification of binary cubics which have a negative determinant. Proc. London Math. Soc. 10, 1912.
32. Minkowski. Diophantische Approximationen. 1905.
33. — Zur Theorie der Kettenbrüche. Ges. Abh. u. Ann. de l'École Normale supérieure, 3 sér., t. XIII.
34. Mordell. Note on the integer solutions of the equation $Ey^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Messenger of Math., vol. 51, 1922.
35. — On the integer solutions of the equation $ey^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Proc. London Math. Soc., vol. 21, 1922.

36. Mordell. On the rational solutions of the indeterminate equations of the third and fourth degrees. Proc. Cambridge Philos. Soc., vol. 21, 1922.
37. — Indeterminate equations of the third degree. Science Progress London, 1923.
38. Nagell. Vollständige Lösung einiger unbestimmten Gleichungen dritten Grades. Skrifter Videnskapselskapet, Cristiania, 1922.
39. — Ueber die Einheiten in reinen kubischen Zahlkörpern. Ibid. 1923.
40. — Solution complète de quelques équations cubiques à deux indéterminées. Journ. de Math., 9 ser., t. 4, 1925.
41. — Ueber einige kubische Gleichungen mit zwei Unbestimmten. Math. Z. 24, 1925.
42. — Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit negativer Diskriminante. Math. Z. 28, 1928.
43. — Zur Theorie der kubischen Irrationalitäten. Acta Math. 55, 1930.
44. — L'analyse indéterminée de degré supérieur. Mémoires des Sciences Mathématiques, fasc. XXXIX, 1929.
45. Reid. Tafel der Klassenzahlen für kubische Zahlkörper. Diss. Göttingen, 1899.
46. Siegel. Ueber einige Anwendungen diophantischer Approximationen. Abh. der Preuss. Akad. der Wiss. 1929.
47. — Die Gleichung $ax^n - by^n = c$. Math. Ann. 114, 1937.
48. Тартаковский. Решение уравнения $x^4 - py^4 = 1$. Изв. Ак. Наук 1926.
49. Thue. Bemerkungen über gewisse Näherungsbrüche algebraischer Zahlen. Cristiania Videnskapselskaps Skrifter, 1908.
50. — Ueber rationale Annäherungswerte der reellen Wurzeln der ganzen Functionen dritten Grades $x^3 - ax - b$. Ibidem 1908.
51. — Om en general i store vele tal uløstbar ligning. Ibidem 1908.
52. — Ueber Annäherungswerte algebraischer Zahlen. Journ. für Math. 135.
53. — Eine Lösung der Gleichung $P(x) - Q(x) = (x - \rho)^n \cdot Pr(x)$ in ganzen Functionen P, Q und R für jede beliebige ganze Zahl, wenn ρ eine Wurzel einer beliebigen ganzen Function bedeutet. Vidensk. Skrifter, 1909.
54. — Ein Fundamentaltheorem zur Bestimmung von Annäherungswerten aller Wurzeln gewisser ganzen Functionen. Journ. für Math. 138.
55. Успенский. A method of finding unites in cubic orders of a negative discriminant. Trans. Amer. Math. Soc. 33, 1931.
56. Фаддеев. Табуляризация областей и колец Галуа третьего порядка. Труды Физ.-Мат. инст. Ак. Наук СССР, т. V, 1934.
57. — Об уравнении $x^4 - Ay^4 = 1$ (ibidem).
58. — Об уравнении $x^3 + y^3 = Az^3$ (ibidem).
59. — Классификация алгебраических областей четвертого порядка по их кубическим резольвентам. Труды II Всес. съезда мат. в Ленинграде в 1934 г.
60. — Об одном свойстве группы классов идеалов областей третьей степени. Ibidem.
61. — Об одном классе неопределенных уравнений 3-й степени. Ibidem.
62. — Построение алгебраических областей, группой Галуа которых является группа кватернионов. Уч. зап. Л. Г. У. 1937.
63. Furtwängler. Kubische Zahlkörper und Zahlengitter. Diss. Göttingen.
64. Hasse. Arithmetische Theorie der kubischen Zahlkörper auf klassenkörpertheoretischer Grundlage. Math. Z. 31, 1930.
65. Чеботарев. Основы теории Галуа I и II.
66. — Задача, обратная задаче Чирнгаузена. Вестн. чист. и прикл. знан. Одесса 1922.
67. Charve. De la réduction des formes quadratiques ternaires positives et de son application aux irrationnelles du 3-me degré (Ann. Sc. de l'Ecole Norm. Sup., supplément au t. 9 (2 série) 1880.

ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Предисловие</i>	Стр. 3
<i>Литература</i>	7

Глава I

ТЕОРИЯ РЕШЕТОК, ПОВТОРЯЮЩИХСЯ УМНОЖЕНИЕМ

§ 1. Решетки в K_n , повторяющиеся умножением	13
§ 2. Теорема о существовании бесконечного числа максимальных неприводимых решеток любого данного измерения $n > 1$ и данной сигнатуры τ	21
§ 3. Геометрия теории Галуа	26
§ 4. Автоморфизмы умножения (единицы) решеток в K_n	31
§ 5. Идеалы максимальной решетки, группа их классов, однозначность разложения	37
§ 6. Основная фигура, состоящая из главной решетки O и $h-1$ побочных решеток	44
§ 7. Квадратичные формы решетки в K_n	48
§ 8. Разложимые формы решетки в K_n	53
§ 9. Взаимные решетки и взаимные разложимые формы	57
ПРИЛОЖЕНИЕ. Некоторые вспомогательные леммы о решетках в вещественном евклидовом пространстве	63

Глава II

НЕКОТОРЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ КУБИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

§ 10. Кубическое поле, преобразование Чирнгаузена, целые числа поля	69
§ 11. Действия сложения, вычитания, умножения, деления, возвышения в степень и извлечения корня для чисел кубического поля и вычисление их нормы и дискриминанта	71
§ 12. Дробнолинейное представление чисел кубического поля	77
§ 13. Решение задачи, обратной задаче Чирнгаузена, для двух кубических уравнений	78
§ 14. Базис целых чисел поля	80
§ 15. Связь между кубическими кольцами и классами неприводимых кубических двойничных форм	83
§ 16. Решение задачи эквивалентности для двух целочисленных неприводимых кубических двойничных форм	87
§ 17. Вычисление базиса кубического поля по Вороному	88
§ 18. Разложение рациональных простых чисел на простые идеалы в кубическом поле	91
§ 19. Разложение рациональных простых чисел на простые идеалы в любой максимальной трехмерной решетке	98
§ 20. Теорема о дискриминанте поля	99
§ 21. Дальнейшие теоремы о разложении рациональных простых чисел на простые идеалы в кубическом поле	100
§ 22. Определение группы классов идеалов кубического поля	101
§ 23. Различные формы, связанные с кубическим полем	103
§ 24. Кубические циклические поля	105
§ 25. Чисто кубические поля	108
<i>Таблицы Reid'a</i> и Дедекинда	112

Глава III

ГЕОМЕТРИЯ, ТАБУЛЯРИЗАЦИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ
ПОЛЕЙ 3-й И 4-й СТЕПЕНИ

	<i>Стр.</i>
А. Табуляризация полей 3-й степени	116
§ 26. Система W и сетки \bar{W}_0, \bar{W}_1 для $n=3, \tau=0.1$	116
§ 27. Выключение приводимых точек в обоих случаях	119
§ 28. Ограничение для q и n при данном s и L	121
§ 29. Нахождение 3-го числа базиса для каждой из пойманных точек	123
§ 30. Таблица действий	124
<i>Таблица всех кубических решеток с $\tau=0$ для всех $D < 1296$</i>	125
<i>Таблицы всех кубических решеток с $\tau=1$ для всех $D < 1000$</i>	126
§ 31. Непосредственная табуляризация кубических циклических максимальных решеток	125
Б. Некоторые геометрические теоремы	130
§ 32. Геометрия кубической двойичной формы и ее ковариантов	130
§ 33. Теория приведения кубической двойичной формы	135
§ 34. Двойичные кубические формы, как нормы	136
§ 35. Оценка минимума кубической двойичной формы	137
§ 36. Одна теорема Тартаковского	141
В. Табуляризация полей 4-й степени	143
§ 37. Система W и сетки $\bar{W}_0, \bar{W}_1, \bar{W}_2$ для $n=4, \tau=0$	143
§ 38. Выключение приводимых точек	145
§ 39. Ограничение коэффициентов p, q, n при данных s и L	146
§ 40. Проектирование параллельно квадратичному подполю	148
§ 41. Таблица действий	153
<i>Таблица полей 4-й степени с $\tau=0$ для всех $D \leq 8112$</i>	155
<i>Таблица полей 4-й степени с $\tau=1$ для всех $D \leq 848$</i>	156
<i>Таблица полей 4-й степени, имеющих квадратичное подполе с $\tau=2$ для всех $D < 1296$</i>	156
Г. Построение кубических областей по квадратичным	157
§ 42. Опираие кубических областей на квадратичные	157
§ 43. Некоторые теоремы о проекциях кубических чисел	158
§ 44. Свойства проекции максимальной кубической решетки	161
§ 45. Построение максимальных кубических решеток	164
§ 46. Некоторые свойства дискриминантов кубических полей	168
Примеры	168
Д. Построение областей четвертого порядка по кубическим	170
§ 47. Опираие областей четвертого порядка на кубические	170
§ 48. Некоторые теоремы о проекциях чисел четвертого порядка	172
§ 49. Решение задачи, обратной задаче Чирнгаузеня, для двух уравнений 4-й степени	174
§ 50. Свойства проекции максимальной решетки 4-го порядка	175
§ 51. Построение максимальных решеток 4-го порядка по решеткам L	176
§ 52. Структура области 4-го порядка и кубической области, на которую она опирается, в зависимости от группы Гауа	130
§ 53. Другой способ построения областей четвертого порядка с группами $\mathcal{O}, \mathcal{C}, \mathcal{X}$	185

Глава IV

АЛГОРИФМ ВОРОНОГО

А. Случай $D > 0$	189
§ 54. Цепочки относительных минимумов	189
§ 55. Теорема о параллельных цепочках	192
§ 56. Теоремы о цепочках разных направлений	194
§ 57. Решение задачи о подобии двух решеток	196
§ 58. Разыскание основных автоморфизмов умножения решетки	193
§ 59. Алгоритм для разыскания относительного минимума, смежного с данным	200
Пример	206
Б. Случай $D < 0$	208
§ 60. Теорема Вороного о соседнем относительном минимуме	208
§ 61. Алгоритм для разыскания относительного минимума, смежного с данным	215

	<i>Стр.</i>
§ 62. Решение задачи подобия для двух решеток	218
§ 63. Разыскание основного автоморфизма умножения решетки	218
Пример	219
§ 64. Алгоритм для $D < 0$, основанный на параллельном преобразовании разложимой формы решетки и ей полярной формы	221
Пример	225
Таблица основных единиц для всех кубических колец с $\tau=1$ для всех $ D \leq 379$	230
Таблица единиц для всех чисто кубических полей $\mathbb{Q} \sqrt[3]{a}$ для всех $a \leq 70$	231

Глава V

ТЕОРЕМА ТУЭ

§ 65. Гипербола Лиувилля и гипербола Туэ	233
§ 66. Заградительный ряд и гипербола B	235
§ 67. Две леммы Туэ	236
§ 68. Вывод из этих лемм существования гиперболы B	239
§ 69. Об ограничении методом Туэ самых решений, по Тартаковскому	240
§ 70. Улучшение теоремы Зигеля о числе решений неравенства $ f(x, y) \leq k$	246

Глава VI

О НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ УРАВНЕНИЯХ 3-Й СТЕПЕНИ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

А. Решение в целых числах	260
§ 71. Решение неопределенного уравнения $aX^3 + Y^3 = 1$	261
§ 72. Обобщение метода § 71 на уравнение $I(X, Y) = 27$	267
§ 73. Дальнейшее обобщение метода § 71	273
§ 74. Обобщение метода § 71 на уравнение $x^4 - Ay^4 = \pm 1$	281
§ 75. О числе представлений числа неприводимой кубической двойничной формой отрицательного определителя	289
§ 76. Дальнейшие исследования об алгоритме повышения	306
§ 77. О целых кубических уравнениях с данным дискриминантом	313
§ 78. Об уравнении $U^3 - V^2 = k$	314
Таблица всех решений всех уравнений вида $(a, b, c, d) = 1$ для всех $-300 \leq D < 0$	317
Таблица представителей всех параллелей целых уравнений с $-172 \leq D < 0$	318
Б. Решение в дробных числах	318
§ 79. О рациональных точках на кривой 3-го порядка	318
§ 80. Бирациональное преобразование	321
§ 81. Доказательство теоремы Морделля, данное А. Вейлем	324
§ 82. Об уравнении $x^3 + y^3 = Az^3$	331
Таблица основных решений уравнений $x^3 + y^3 = Az^3$ для всех $A \leq 50$	340
ПРИЛОЖЕНИЕ. Чертежи сеток \overline{W} и \overline{W}_1 для $l=3$ и $\tau=0, 1$	341

ГЛАВА I

ТЕОРИЯ РЕШЕТОК, ПОВТОРЯЮЩИХСЯ УМНОЖЕНИЕМ

§ 1. Решетки в n -мерном комплексном пространстве, повторяющиеся умножением

Мы будем рассматривать n -мерное комплексное пространство K_n , т. е. будем считать точкой систему любых n комплексных чисел $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$, которые будем называть координатами этой точки, причем номера координат мы везде будем обозначать верхними значками в скобочках. Самую же эту точку будем кратко обозначать той же буквой без верхних знаков. Пусть $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ представляют n точек K_n , комплексно некопланарных с началом, т. е. определитель из их координат

$$\begin{vmatrix} \omega_1^{(1)} & \omega_2^{(1)} & \dots & \omega_n^{(1)} \\ \omega_1^{(2)} & \omega_2^{(2)} & \dots & \omega_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{(n)} & \omega_2^{(n)} & \dots & \omega_n^{(n)} \end{vmatrix} \quad (1)$$

не равен нулю. Условимся называть суммой, разностью, Произведением и частным двух точек пространства K_n точку, каждая из координат которой есть сумма, разность, произведение или частное соответственных координат обеих рассматриваемых точек. Мы будем называть n -мерной решеткой в K_n , или просто решеткой в K_n , совокупность всех точек вида $u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + \dots + u_n\omega_n$, где u_1, u_2, \dots, u_n — все возможные системы n целых рациональных чисел, т. е. совокупность всех точек K_n , получающихся сложением и вычитанием из точек $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Самую решетку эту мы будем обозначать $[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]$ или $[\omega]$ и называть $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ее базисом, или ее основным n -векторником. Бывают, оказывается, *решетки, которые повторяются умножением*, т. е. имеют то свойство, что произведение любых двух точек такой решетки есть опять точка этой же решетки. Целью настоящей главы является построение полной теории таких решеток.

Основными пунктами этой теории будут следующие. В настоящем параграфе мы покажем, что всякая такая решетка может быть дополнена до некоторой максимальной, т. е. такой решетки, которая дальше не может уже быть сгущена при условии сохранения свойства повторяться умножением; затем мы покажем, что всякая максимальная решетка либо сама *неприводима*, либо есть прямая сумма таких неприводимых решеток, каждая из которых уже не может быть дальше упрощена. В § 2 мы покажем, что для всякого числа измерений n и всякой *сигнатуры* τ существует бесконечно много различных неприводимых решеток. В § 3 мы построим теорию Галуа таких решеток. В § 4 рассмотрим теорию *автоморфизмов умножения* для произвольных решеток в K_n , т. е. существуют ли такие точки в K_n и каковы такие точки, после умножения на которые некоторой решетки в K_n решетка эта совмещается сама с собою. В §§ 5 и 6 мы построим теорию идеалов решеток, повторяющихся умножением, которая нам дальше понадобится в главе III в теории классификации полей

