

И. Гейберг

Новое сочинение Архимеда

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
И11

И11 **И. Гейберг**
Новое сочинение Архимеда / И. Гейберг – М.: Книга по Требованию, 2021. –
52 с.

ISBN 978-5-458-66045-7

ISBN 978-5-458-66045-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint



АРХИМЕДЪ

и его новооткрытое произведение.

Архимедъ—величайшій математикъ древности, одинъ изъ величайшихъ геніевъ всѣхъ временъ. Древніе передавали чудесные рассказы о его открытіяхъ и изобрѣтеніяхъ, и слава его пережила многіе вѣка и, нисколько не померкнувъ, дошла до нашего времени. Лейбницъ ставилъ на ряду съ нимъ только двухъ великихъ математиковъ-мыслителей—Галилея и Декарта. Мы могли бы прибавить къ этимъ двумъ именамъ лишь другія два—самого Лейбница и его великаго современника и соперника Ньютона. ¹⁾

Архимедъ родился въ Сиракузахъ, вѣроятно, около 287 г. до Р. Х. Какъ передаютъ нѣкоторые изъ его біографовъ²⁾, онъ въ молодости былъ въ Александріи, гдѣ учился у Евклида, и по возвращеніи оттуда посвятилъ свою жизнь исключительно научнымъ занятіямъ. По смерти сиракузскаго царя Гіерона, съ которымъ, какъ говорятъ, Архимедъ состоялъ въ родствѣ, для родины великаго ученаго наступили черные дни. Гіерону наследовалъ его внукъ, умершій вскорѣ послѣ вступленія на престолъ. Военачальникъ Гиппократъ, желая захватить власть въ свои руки, вступилъ въ сношенія съ Карфагеномъ и, въ угоду своимъ союзникамъ, приказалъ умертвить большое число римлянъ около сицилійскаго города Леонтія. Тогда римляне рѣшили завла-

¹⁾ *Sed scientiae pulcherrimae in clara luce collocatae laus summo Viro Renato Cartesio debebatur.... Si quis.... summam rerum et inventorum multitudinem spectaverit, fatebitur post Archimedem et Galilaeum nullum exstare scriptorem Mathematicum unde plura et majora disci possent.*

²⁾ Главнымъ источникомъ біографическихъ свѣдѣній объ Архимедѣ служило для древнихъ жизнеописаніе, составленное нѣкимъ Гераклидомъ и до насъ не дошедшее. Это былъ, вѣроятно, Гераклидъ изъ Оксиринха, сынъ астронома Серапіона, жившій во II вѣкѣ до Р. Х. Въ настоящее время источниками для жизнеописанія Архимеда служатъ Титъ Ливій (XXV), Цицеронъ (*Tuscul. Disp.* и *C. Verrem*), Діодоръ, Силій Италикъ, Валерій Максимъ. Третцесъ, жившій въ XII в., говорить, что Архимедъ прожилъ 75 лѣтъ, а такъ какъ онъ умеръ въ 212 г. до Р. Х., то долженъ былъ родиться около 287 г. до Р. Х. Особенно интересны свѣдѣнія о той роли, которую игралъ Архимедъ при осадѣ Сиракузъ, передаваемые Плутархомъ въ жизнеописаніи Марцелла. Ср. Heiberg. *Questiones Archimedeae*, Havn. 1879.

дѣтъ Сиракузами. Римскій полководецъ Марцеллъ подступилъ къ городу въ 214 г. до Р. Х. и осадилъ его съ суши и съ моря. Архимедъ приложилъ всѣ свои геніальныя способности, всѣ силы своей великой души къ защитѣ отчизны. Подъ его руководствомъ жители Сиракузъ сопротивлялись римлянамъ въ теченіе двухъ лѣтъ и отражали ихъ нападенія съ помощью удивительныхъ военныхъ орудій, изобрѣтенныхъ самимъ Архимедомъ. Славному ученому не пришлось, однако, спасти родного города. Римлянамъ удалось захватить сиракузянъ врасплохъ и войти въ городъ, Архимедъ, погруженный въ это время въ рѣшеніе геометрической задачи, ничего не зная о происходящемъ. Римскіе солдаты ворвались къ нему въ домъ, и одинъ изъ нихъ убилъ Архимеда. Такъ погибъ въ 212 г. до Р. Х. славный защитникъ Сиракузъ, къ большому огорченію Марцелла, по приказанію котораго Архимеда похоронили съ почестями и на памятникѣ его, по завѣщанію самого геометра, изобразили шаръ, вписанный въ цилиндръ,—фигуру, напоминавшую объ одномъ изъ замѣчательнѣйшихъ его открытій. Цидеронъ, во время своей квестуры въ Сициліи, видѣлъ еще этотъ памятникъ, но онъ тогда уже былъ заброшенъ и заросъ кустарникомъ.

До насъ дошло, не считая новооткрытаго „Эфодика“, восемь математическихъ сочиненій, приписываемыхъ Архимеду, въ двѣнадцать книгъ, а именно: 1) Двѣ книги о равновѣсіи плоскихъ фигуръ вмѣстѣ съ книгой о квадратурѣ параболы; 2) Двѣ книги о шарѣ и цилиндрѣ; 3) Объ измѣреніи круга; 4) Объ улиткообразныхъ линіяхъ, или спираляхъ; 5) О коноидахъ и сфероидахъ; 6) Псаммитъ, или исчисленіе песку; 7) Двѣ книги о плавающихъ тѣлахъ; 8) Леммы ¹⁾).

Ө. И. Петрушевскій перевелъ на русскій языкъ книги о шарѣ и цилиндрѣ, объ измѣреніи круга, Леммы и книгу Псаммитъ. Пейрардъ (Peugard) перевелъ на французскій языкъ всѣ восемь упомянутыхъ сочиненій Архимеда; Ницце (Nizze) перевелъ ихъ на нѣмецкій языкъ. Въ 1897 г. Хисъ (Heath) издалъ собраніе сочиненій Архимеда съ современными обозначеніями и съ объясненіями—изданіе очень полезное для читателей, владѣющихъ англійскимъ языкомъ. Лучшее, хотя уже устарѣлое, изданіе сочиненій Архимеда

¹⁾ Разборъ всѣхъ сочиненій Архимеда см. въ исторіи математики Кантора, т. I, гл. 14 и 15. Архимеду приписывали еще неопредѣленную задачу, называемую „задачей о быкахъ“, написанную въ стихахъ и едва ли принадлежащую Архимеду. Ср. Heiberg, *Questiones Archimedeae*, 26.

съ комментаріями Евтокія Аскалонскаго, на греческомъ и латинскомъ языкахъ, съ краткими объясненіями, принадлежить Гейбергу¹⁾.

Изъ сочиненій Архимеда дошли до насъ въ подлинникѣ, т. е. на томъ суровомъ дорическомъ діалектѣ греческаго языка, на которомъ говорили въ Сиракузахъ, книги о равновѣсіи плоскихъ фигуръ, о спираляхъ, о коноидахъ и сфероидахъ и Псаммитъ; книги о шарѣ и цилиндрѣ—въ позднѣйшей переработкѣ, въ которой дорическій діалектъ замѣненъ общимъ греческимъ²⁾. Книга о плавающихъ тѣлахъ была извѣстна до послѣдняго времени только по средневѣковому латинскому переводу³⁾. Всѣ сочиненія Архимеда, за исключеніемъ Псаммита, къ тому же содержатъ позднѣйшія вставки въ большемъ или меньшемъ числѣ. Леммы переведены съ арабскаго языка на латинскій и въ томъ видѣ, въ которомъ дошли до насъ, не могли быть написаны Архимедомъ; многія изъ нихъ, однако, вѣроятно принадлежатъ самому Архимеду⁴⁾.

Сочиненіе, вновь открытое Гейбергомъ въ палимпсестѣ на Константинопольскомъ подворьѣ монастыря св. Гроба Господня въ Иерусалимѣ, носитъ заглавіе, которое по-руски могло бы быть переведено такъ: Книга Архимеда, содержащая изложеніе метода, связаннаго съ механическими теоремами. Книгу эту Архимедъ посвятилъ своему современнику, знаменитому александрійскому математику и астроному Эратосѣену. Она была извѣстна Герону Александрійскому, жившему въ концѣ второго вѣка до Р. X.; Геронъ называетъ ее *Ἐφεδικόν*. Свидя говоритъ, что Θεодосій (въ I вѣкѣ до Р. X.) написалъ комментарій къ Архимедовой книгѣ *Ἐφεδικόν*, что значитъ „руководство“.

¹⁾ Петрушевскій. Архимеда двѣ книги о шарѣ и цилиндрѣ, измѣреніе круга и леммы, Спб., 1823.—Архимеда Псаммитъ, или исчисленіе песку въ пространствѣ, равномъ шару неподвижныхъ звѣздъ, Спб., 1824—Peyrard. Oeuvres d'Archimède, traduites littéralement, avec un commentaire etc. Paris, 1807.—Archim. Werke, übers. u. erklärt v. E. Nizze, Stralsund, 1824.—Arch. edited. in modern notation w. introd. chapters by T. L. Heath. Cambr., 1897.

²⁾ О языкѣ Архимеда см. Heiberg, Philol. Stud., XIII, 4: Ueber den Dialekt des Archimedes, pp. 543—566. Questiones Archimedeae, p. 69. Ср. также Susemihl, Geschichte der Griechischen Literatur in der Alexandrinerzeit, Bd. I. Leipz., 1891, pp. 729, 730.

³⁾ Латинскій переводъ книги *περί βυζονιζόντων* сдѣланъ въ XIII в. доминиканцемъ Вильгельмомъ фонъ Мёрбеке (Wilh. v. Moerbecke) изъ восточной Фландріи. См. Val. Rose, Deutsche Literaturzeit, 1884, s. 210; Heiberg, Neue Studien zu Archimedes въ Zeitschr. f. Math. und Phys., XXXVI (1889), Supplementheft.

⁴⁾ О Леммахъ, которыя можно считать принадлежащими Архимеду, см. Cantor, Vorlesungen über Gech. der Mathem., Bd. I, 3-te Aufl., pp. 298-300.

Эфодикъ, какъ я буду называть новое сочиненіе Архимеда, близко подходитъ по содержанію своему, съ одной стороны, къ книгамъ о равновѣсіи плоскихъ фигуръ и о квадратурѣ параболы, съ другой—къ книгамъ о шарѣ и цилиндрѣ и, въ особенности, о коноидахъ и сфероидахъ. Всѣ эти сочиненія связываются, такимъ образомъ, въ одно цѣлое—непрерывный рядъ изслѣдованій, составляющихъ важнѣйшую часть научной дѣятельности Архимеда. Вмѣстѣ съ тѣмъ Эфодикъ открываетъ намъ впервые ту сторону работы греческихъ математиковъ, которая, по словамъ самого Архимеда, представляетъ „разсужденія, основанныя на методѣ, но не являющіяся еще доказательствами“,—приводящія лишь къ открытію такихъ доказательствъ. Эта сторона работы древнихъ геометровъ до сихъ поръ оставалась для насъ скрытой,—можетъ быть, потому, что они, по большей части, не издавали сочиненій, содержащихъ изложеніе эвристическихъ методовъ, которыми они пользовались въ своихъ произведеніяхъ, а можетъ быть, и потому, что современники ихъ предпочитали знакомиться съ тѣми же изслѣдованіями въ ихъ блестящей діалектической обработкѣ и забывали мало-по-малу о болѣе скромныхъ „Эфодикахъ“, полезныхъ только какъ руководства для дальнѣйшей самостоятельной разработки науки.

Наиболѣе замѣчательной чертой Архимедова метода является устанавливаемая имъ связь между геометрией и механикой. Еще до Архимеда грекамъ были извѣстны нѣкоторыя механическія предложенія, въ томъ числѣ теорема, въ силу которой два вѣса, дѣйствующие на концы прямолинейнаго рычага, находятся въ равновѣсіи, если они обратно пропорціональны плечамъ этого рычага¹⁾. Понятіе о центрѣ тяжести было, повидимому, введено еще до Архимеда: онъ пользуется имъ безъ опредѣленія. Архимедъ, однако, первый оцѣнилъ значеніе механики, какъ математической науки, которая можетъ быть обоснована и развиваема совершенно такъ же, какъ геометрія, и связь которой съ геометрией настолько велика, что на нее можно смотрѣть, какъ на особый методъ изслѣдованія и доказательства геометрическихъ истинъ. Чтобы имѣть возможность дать болѣе или менѣе строгое научное обоснованіе механикѣ, Архимедъ отбросилъ всѣ туманныя динамическія соображенія своихъ предшественниковъ и превратилъ такимъ образомъ механику въ статику—теорію равновѣсія²⁾. Первоначальныя основы этой науки

¹⁾ Archimedis Opera. Cum commentariis Eutocii, ed. J. L. Heiberg, Vol. II. Lips. 1881, pp. 153, 159. De planorum equilibriis etc., I. I, prop. VI, VII.

²⁾ Cp. P. Duhem. Les origines de la Statique, t. I. Paris, 1905, Ch. I. Aristote et Archimède.

изложены имъ въ двухъ книгахъ о равновѣсіи плоскихъ фигуръ. Главное содержаніе этихъ книгъ—разысканіе центровъ тяжести фигуръ прямолинейныхъ и криволинейныхъ. Интересъ автора сосредоточивается, повидимому, не столько на механикѣ, сколько на геометріи; его интересуютъ не рычаги и вѣсомыя тѣла, а доказательства относящихся къ нимъ теоремъ и ихъ геометрическій смыслъ.

Между двумя книгами о равновѣсіи должна быть вставлена книга о квадратурѣ параболы, содержащая теорему о томъ, что площадь параболическаго сегмента вчетверо больше трети треугольника, имѣющаго тоже основаніе и ту же высоту, что и сегментъ. Архимедъ даетъ сначала механическое доказательство своей теоремы, затѣмъ геометрическое. Въ механическомъ доказательствѣ онъ предполагаетъ подвѣшенными къ противоположнымъ концамъ рычага и находящимися въ равновѣсіи, съ одной стороны, треугольникъ или трапецію, съ другой—нѣкоторую прямоугольную площадь и опредѣляетъ, на основаніи теоремы о рычагѣ, отношеніе двухъ подвѣшенныхъ площадей. Параболическій сегментъ, площадь котораго требуется опредѣлить, представляется заключеннымъ между двумя переменными суммами площадей, имѣющихъ видъ трапеціи или треугольника. Эти суммы находятся въ равновѣсіи съ соответствующими суммами опредѣленныхъ прямоугольныхъ площадей, благодаря чему является возможность найти предѣлы, между которыми заключена площадь параболическаго сегмента. Такъ какъ предѣлы эти переменны и могутъ быть сближены неопредѣленно, и такъ какъ, кромѣ того, между тѣми же предѣлами заключенъ треугольникъ, равновеликій сегменту, то равновеликость эту можно легко доказать отъ обратнаго—*per reductionem ad absurdum*. Для всѣхъ доказательствъ подобнаго рода древніе пользовались болѣе или менѣе однообразными приѣмами. Сущность этихъ приѣмовъ можно передать слѣдующимъ образомъ:

Пусть A и B будутъ двѣ величины, равенство которыхъ требуется доказать, и пусть каждая изъ этихъ величинъ заключена между двумя переменными X и Y , изъ которыхъ первая всегда меньше второй, и разность которыхъ Z можетъ быть сдѣлана какъ угодно малой. Допустимъ, что A и B не равны, и пусть разность ихъ есть D ; такъ какъ $X \leq A \leq Y$ и $X \leq B \leq Y$, то $D \leq Z$. Но, съ другой стороны, переменная величина Z можетъ быть сдѣлана меньше, чѣмъ D , что обна-

руживается нелѣпность допущенія $A \leq B$; итакъ, $A = B$; что и требовалось доказать¹⁾.

Той же механической методой пользуется Архимедъ и въ Эфодикѣ, съ той только разницей, что доказательство *per reductionem ad absurdum* отсутствуетъ, а трапеціи, сумма которыхъ при увеличеніи ихъ числа постепенно истощаетъ сегментъ параболы, превращаются въ параллельныя прямыя линіи, которыя въ безчисленномъ множествѣ сплошь покрываютъ площадь сегмента, наполняютъ этотъ сегментъ. Подобныя же соображенія Архимедъ прилагаетъ далѣе къ нѣкоторымъ тѣламъ и ихъ отрѣзкамъ, къ цилиндрамъ, конусамъ, шарамъ, а также къ сфероидамъ и коноидамъ, т. е. къ тѣламъ, полученнымъ отъ вращенія эллипсовъ и параболъ около ихъ осей (сфероиды и параболическіе коноиды) или отъ вращенія гиперболъ около ихъ поперечныхъ осей (гиперболическіе коноиды). Онъ разсматриваетъ ихъ при этомъ, какъ состоящія изъ безчисленнаго множества параллельныхъ круговыхъ сѣченій, наполняющихъ ихъ объемы или объемы ихъ сегментовъ. При такомъ преобразованіи методъ теряетъ свою аподиктическую доказательность, но зато приобретаетъ простоту, которая дѣлаетъ его могучимъ

¹⁾ Методъ истощенія древнихъ геометровъ обыкновенно примѣнялся ими въ такой формѣ. Лемма. Данный безконечный процессъ (А) производить рядъ величинъ $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$, которыя, будучи частями нѣкоторой величины А, постепенно истощаютъ эту послѣднюю: продолжая этотъ процессъ достаточно долго, можно сдѣлать разность между А и A_n какъ угодно малою. Теорема. Даны двѣ однородныя величины А и В. Помощью процесса (А) образуемъ рядъ величинъ $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$, истощающихъ А; подобный же процессъ (В) дастъ соответственный рядъ величинъ $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n, \dots$, истощающихъ В. Пусть отношеніе $A_n : B_n$ не зависитъ отъ n и равно отношенію величинъ С и D. Мы утверждаемъ, что $A : B = C : D$. Доказательство. Если бы отношеніе С къ D не было равно отношенію А къ В, оно было бы больше или меньше его; допустимъ, что оно больше; значитъ, $C : D = A' : B'$, гдѣ B' — величина однородная съ В и меньшая этой послѣдней. Мы можемъ найти (Лемма) B_n , болѣе близкое къ В, чѣмъ B' , и, слѣдовательно, большее, чѣмъ B' ; тогда изъ пропорціи $A_n : B_n = C : D = A' : B'$ слѣдуетъ: $A_n : A = B_n : B'$, чего не можетъ быть, ибо A_n меньше, чѣмъ А, а $B_n > B'$; точно такъ же можно показать несообразность предположенія, что отношеніе С : D больше, чѣмъ отношеніе А : В. Откуда слѣдуетъ, что $A : B = C : D$, что и требовалось доказать. Не трудно видѣть, какъ пришлось бы измѣнять доказательство, если бы отношеніе $A_n : B_n$ зависѣло отъ n , но стремилось бы къ опредѣленному предѣлу. Архимедъ связываетъ методъ истощенія съ аксіомой: разность двухъ однородныхъ величинъ можно повторить столько разъ, что полученная сумма превзойдетъ каждую изъ двухъ данныхъ величинъ. Этой аксіомой пользовались, по словамъ Архимеда, и другіе геометры до него, въ томъ числѣ и Евдоксъ; ее же встрѣчаемъ мы и у Аристотеля. Ср. Archimedis l. de quadrat. parabol., ed. Heib., v. II, p. 296. De Sphaera et Cyl. l. I, postul. 5, ed. Heib., v. I, p. 10; Euclidis Elem., V., def. 4; Aristotelis physic. ausc. l. VIII.

орудіемъ для открытія новыхъ предложеній. Обратный переходъ къ строгой геометрической формѣ доказательства не всегда, конечно, легокъ, но Архимедъ справедливо замѣчаетъ въ предисловіи—посвященіи Эратосѣену, что „легче найти доказательство, когда мы посредствомъ этого метода составляемъ себѣ представленіе объ изслѣдуемомъ вопросѣ, чѣмъ сдѣлать это безъ такого предварительнаго представленія“.

Въ концѣ книги Архимедъ, какъ онъ общаетъ въ предисловіи, далъ, повидимому, строгія геометрическія доказательства открытыхъ имъ теоремъ, но, къ сожалѣнію, въ дошедшей до насъ рукописи ни одно изъ этихъ доказательствъ не сохранилось цѣликомъ: удалось восстановить начало только одного изъ нихъ¹⁾. Это начало, впрочемъ, довольно характерно и представляетъ особый интересъ благодаря особенностямъ нѣкоторыхъ выраженій, которыми пользуется Архимедъ. Онъ говоритъ о сегментѣ цилиндра, отсѣченномъ плоскостью, проходящей черезъ центръ одного основанія и черезъ прямую, касательную къ другому основанію: объемъ этого сегмента равновеликъ $\frac{1}{6}$ описанной призмы съ квадратнымъ основаніемъ. „Въ этотъ сегментъ“, утверждаетъ Архимедъ, „возможно вписать и вокругъ него описать по фигурѣ, которая состоитъ изъ призмъ, имѣющихъ равныя высоты и въ основаніяхъ подобные треугольники, такъ что описанная фигура будетъ превосходить вписанную на величину, меньшую всякой произвольной величины“. Эти слова показываютъ намъ, что для построенія аподиктическихъ доказательствъ служилъ методъ истощенія, и что Архимедъ хорошо сознавалъ общее значеніе этого метода для всѣхъ доказательствъ подобнаго рода. Въ выраженіи „описанная фигура будетъ превосходить вписанную на величину, меньшую всякой произвольной величины“ можно уже усмотрѣть зачатки теории предѣловъ²⁾.

Механическія основанія Архимедова метода ясно изложены имъ въ восьми предложеніяхъ, приведенныхъ безъ доказательствъ въ концѣ его предисловія. Первые пять изъ нихъ изложены имъ и въ 1-ой книгѣ о равновѣсіи плоскихъ фигуръ. Къ этимъ механическимъ предложеніямъ присоединена алгебраическая лемма, доказанная имъ въ сочиненіи о коноидахъ и сфероидахъ. Лемма эта состоитъ въ слѣдующемъ: если члены двухъ рядовъ величинъ—

¹⁾ Глава XIV. Cp Zeuthen. Eine neue Schrift des Archimedes, Commentar, Bibl. Mathem., 3 Folge, Bd. 7, p. 356.

²⁾ Cp. Archimedis l. de conoid et sphaer., prop. XIX, ed. Heib., t. I, p. 374, prop. XX, p. 380. Zeuthen. l. c., p. 355 (примѣчаніе).

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$, съ одной стороны, и $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, b_n$, съ другой. — связаны между собою пропорціями $a_1:a_2=b_1:b_2$; $a_2:a_3=b_2:b_3$; ...; $a_{n-1}:a_n=b_{n-1}:b_n$, а съ членами другихъ двухъ рядовъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_m$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \dots \beta_m$ (гдѣ $m \leq n$) пропорціями $a_1:\alpha_1=b_1:\beta_1$; $a_2:\alpha_2=b_2:\beta_2$; $a_3:\alpha_3=b_3:\beta_3$; ... $a_m:\alpha_m=b_m:\beta_m$, то

$$\sum_{k=1}^n a_k : \sum_{k=1}^m \alpha_k = \sum_{k=1}^n b_k : \sum_{k=1}^m \beta_k,$$

т. е. всѣ a такъ относятся ко всѣмъ α , какъ всѣ b ко всѣмъ β ¹⁾. Архимедъ примѣняетъ эту лемму и въ томъ случаѣ, когда число членовъ рядовъ безконечно велико, — когда ряды превращаются въ сплошныя системы величинъ, отрѣзковъ прямыхъ или площадей.

Методъ Архимеда въ геометрической своей части есть, такимъ образомъ, тотъ самый методъ недѣлимыхъ, который былъ открытъ въ XVII вѣкѣ Бонавентурой Кавальери, на разработку котораго тратили свои силы лучшіе математики этого вѣка до открытія дифференціального и интегрального исчисленій²⁾. Геніальные математики XVII вѣка прилежно изучали творенія Архимеда и старались найти тѣ пути, которыми онъ пришелъ къ своимъ открытіямъ. Ихъ генію удалось проникнуть въ самую глубину его мысли и возстановить тотъ именно методъ, которымъ Архимедъ въ дѣйствительности пользовался, въ связи съ механическими теоремами, въ своемъ Эфодикѣ, хотя самъ Эфодикъ былъ, повидимому, неизвѣстенъ ученымъ XVII вѣка. Замѣчательно, что Кавальери въ своихъ сочиненіяхъ пользуется тѣми же самыми выраженіями, какія встрѣчаются въ соотвѣтствующихъ случаяхъ и у Архимеда: они оба говорятъ о всѣхъ линіяхъ, составляющихъ, или наполняющихъ площадь, о всѣхъ плоскихъ фигурахъ, наполняющихъ объемъ³⁾. Архимедъ не даетъ никакихъ правилъ для перехода отъ разсужденій, связанныхъ съ его методомъ, къ аподиктическимъ доказательствамъ, между тѣмъ только съ помощью такихъ правилъ

¹⁾ Archimedis l. de conoid. et. sphaer., prop. I, ed Heib., t. I pp. 290 — 294.

²⁾ Bonaventura Cavalieri изъ Милана (1598—1647), ученикъ Галилея, изложилъ свой методъ въ двухъ сочиненіяхъ: 1) *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*. Bonon. 1635, 2-ое изд. ibid., 1653. 2) *Exercitationes Geometricae* sex. Bonon. 1647.

³⁾ Cum ergo nulla sit ex praefatis lineis assignabilis in dicto quadrato et nullum ex praefatis quadratis assignabilis in cubo, per quae non transeat aliquando seu in aliquo momento motum planum (qua ratione dico id ab ipso describi), ideo ea omnia, ita mente collecta, ut nullum excludi supponatur, vocavi: *omnes lineas et omnia plana*. Cavalieri. Exerc. geom., Exerc. III in P. Guldinum, p. 199.