

А. Ф. Александров

Основы электродинамики плазмы

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 50
ББК 22
А11

А11 **А. Ф. Александров**
Основы электродинамики плазмы / А. Ф. Александров – М.: Книга по Требованию, 2021. – 408 с.

ISBN 978-5-458-25717-6

В книге изложены основы электродинамики материальных сред с пространственной и временной дисперсией, рассмотрены линейные электромагнитные явления в термодинамически равновесной и неравновесной плазме, флуктуации, квазилинейная теория колебаний и нелинейное взаимодействие электромагнитных волн в плазме. Предназначается для студентов физических и инженернофизических специальностей.

ISBN 978-5-458-25717-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

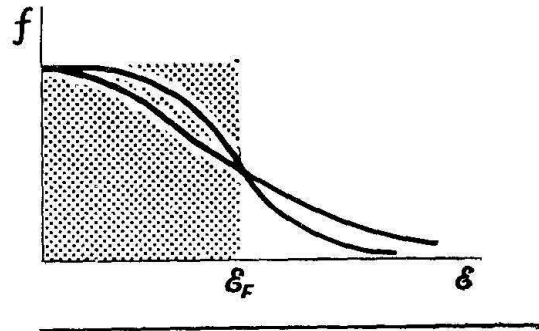
Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Часть 1 ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ РАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЫ



Глава I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ

§ 1. Определение плазмы

Прежде чем перейти к последовательному изложению основ электродинамики плазмы, необходимо ответить на вопросы: что такое плазма, как она распространена в природе и каковы ее наиболее характерные особенности?

В настоящее время представление о плазме как о четвертом состоянии вещества прочно входит в повседневную жизнь наряду с такими понятиями, как газ, жидкость и твердое тело. Это объясняется чрезвычайно широким распространением плазменного состояния вещества в природе, а также большими перспективами практического использования плазмы в различных областях новой техники.

Впервые термин «плазма» был введен И. Ленгмюром в 1923 г. при изучении явлений, происходящих при электрическом разряде в газах. Таким образом, первое определение плазмы было связано непосредственно с представлением об ионизованном газе, что оказалось очень плодотворным. Дадим предварительное определение плазмы как ионизованного газа, состоящего из большого числа положительно и отрицательно заряженных частиц, а в ряде случаев также

из нейтральных атомов и молекул. Именно наличие в плазме большого числа заряженных частиц обуславливает те характерные ее свойства, которые позволяют определить плазму как четвертое состояние вещества и существенно отличают от обычных газов.

Приведенное определение плазмы является не строгим и далеко не полным. Полного определения плазмы по существу невозможно дать, так как оно должно охватывать очень широкий круг явлений в самых разнообразных условиях. В настоящей книге понятие плазмы будет раскрыто также лишь частично, поскольку предметом ее изучения являются только электродинамические свойства плазмы.

С ионизованным газом приходится встречаться практически всюду. Он присутствует в верхних слоях атмосферы Земли — ионосфере. Если в нижних слоях атмосферы до высот порядка 100 км число заряженных частиц ничтожно мало, то выше их число становится достаточно большим и на высотах 300 ÷ 500 км достигает максимума. Именно этот слой ионосферы, называемый *F*-слоем, обеспечивает распространение электромагнитных волн вокруг Земли и устойчивую радиосвязь на Земле. Еще выше число заряженных частиц падает, и на очень больших высотах происходит переход к разреженной межпланетной плазме.

Другой распространенный пример — это плазма звездных атмосфер. Вещество в большинстве космических объектов (звезды, туманности и т. п.) находится в ионизованном состоянии, т. е. в состоянии плазмы. В плазме звезд, в частности Солнца, происходят реакции синтеза легких элементов, так называемые термоядерные реакции, обеспечивающие огромное выделение энергии и нагрев плазмы. В настоящее время ученые многих стран мира изучают возможности создания подобной высокотемпературной плазмы в земных условиях, поставив перед собой задачу осуществления управляемого термоядерного синтеза и обеспечения человечества неисчерпаемым запасом энергии. Именно с развитием этих исследований связано второе рождение понятия плазмы, расширившее и обогатившее знания о плазме и сделавшее науку о плазме важным и самостоятельным разделом физики.

Примером распространенной в природе плазмы является также плазма газового разряда. Интенсивные исследования плазмы газового разряда связаны с потребностями развития классической и квантовой электроники, для которых газоразрядные приборы играют большую роль.

Наконец, следует особо отметить твердотельную плазму — электронную плазму металлов и электронно-дырочную плазму полупроводников.

Перечисленный ряд можно продолжить практически неограниченно, говоря о плазме в магнитогидродинамических и термоионных преобразователях тепловой энергии в электрическую, о плазме в растворах электролитов и т. д. Однако приведенных примеров достаточно для того, чтобы убедиться в чрезвычайно широком распространении плазмы в природе и важности изучения ее свойств.

§ 2. Параметры плазмы

Как отмечалось, плазма состоит из заряженных и нейтральных частиц. Положительно заряженными частицами плазмы являются положительные ионы (газовая плазма) и дырки (плазма твердого тела), а отрицательно заряженными частицами — электроны и отрицательные ионы. Как правило, отрицательные ионы не играют большой роли в плазменных явлениях, и в дальнейшем их влиянием будем пренебрегать.

Состав нейтральной компоненты плазмы может быть достаточно сложным: помимо атомов и молекул в нормальном состоянии в плазме в гораздо большем количестве могут присутствовать атомы и молекулы в различных возбужденных состояниях. Но поскольку плазма — это газ, для ее описания используются те же понятия, что и для обычного газа. Введем основные параметры плазмы, исходя из простых молекулярно-кинетических представлений.

Прежде всего необходимо знать концентрацию (плотность) частиц разного сорта N_α , где индекс α означает сорт частиц. Далее все величины, относящиеся к электронам плазмы, будем обозначать индексом e , к ионам (дыркам) — индексом i , а к нейтральным частицам — индексом n . Если в плазме присутствуют ионы нескольких сортов, следует задавать отдельно концентрацию ионов каждого сорта. В дальнейшем, однако, нас будет мало интересовать квантовомеханическое состояние атомов и молекул, поэтому под N_n будем понимать полное число нейтральных частиц в единице объема независимо от того, находятся ли эти частицы в нормальном или возбужденном состоянии.

Состав плазмы удобно также характеризовать другим параметром — отношением концентрации электронов к концентрации нейтральных частиц, или степенью ионизации $r = N_e/N_n^*$. По степени ионизации плазму обычно подразделяют на слабую ионизованную ($r < 10^{-2} \div 10^{-3}$) и полностью ионизованную ($r \rightarrow \infty$), т. е. плазму, состоящую только из заряженных частиц.

Поскольку в плазме присутствуют частицы различных сортов, нужно знать их заряд e_α и массу m_α . В газовой плазме заряд электронов $e_e \equiv e$, причем $|e| = 4,8 \cdot 10^{-10}$ СГСЕ, масса $m_e = m = 9,1 \cdot 10^{-28}$ г; заряд ионов $e_i = Ze$ (Z — кратность ионизации), масса $m_i = M = A \cdot 1,66 \cdot 10^{-24}$ г, где A — атомный вес соответствующего газа**. Для нейтральных частиц, очевидно, $e_n = 0$, а $m_n \approx m_i = M$. В плазме твердого тела массы носителей заряда (электронов и дырок) отличны от массы свободного электрона. Поэтому там, где могут возникнуть

* Часто под степенью ионизации понимают $r = N_e/(N_n + \sum_i N_i)$. При таком определении для полной ионизации $r = 1$; при $r > 1$ степень ионизации равна среднему заряду ионов плазмы.

** Далее всюду под m подразумевается масса свободного электрона, а под M — масса иона.

недоразумения, будем обозначать их m_e^* и m_i^* . В металлах $m_e^* \approx m_e$, а в полупроводниках, как правило, $m_e^* \approx (0,01 \div 0,1) m_e$, а $m_i^* \approx m_e$. Заряд отрицательных носителей равен заряду электрона, а заряд положительных носителей $e_i = -e$.

Частицы, образующие плазму, находятся в состоянии хаотического теплового движения. Для характеристики этого движения вводят понятие температуры плазмы в целом T или отдельных ее компонент T_α . Температура плазмы вводится в предположении, что плазма в целом находится в состоянии термодинамического равновесия, а функции распределения частиц всех сортов по импульсам p_α (скоростям) являются максвелловскими с одной и той же температурой T ; в этом случае плазма называется *и з о т е р м и ч е с к о й*. Гораздо чаще в плазме имеется частичное термодинамическое равновесие, когда отдельные ее компоненты имеют максвелловские распределения по скоростям с различными температурами:

$$f_{\alpha} = \frac{N_\alpha}{(2\pi m_\alpha T_\alpha)^{3/2}} \exp \left(-\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha T_\alpha} \right). \quad (2.1)$$

Такая плазма является *н е и з о т е р м и ч е с к о й*. В случае максвелловской функции распределения частиц температура T_α характеризует среднюю кинетическую энергию теплового движения частиц данного сорта:

$$\frac{3}{2} \kappa T_\alpha = \left(\overline{m_\alpha v_\alpha^2} \right), \quad (2.2)$$

где $\kappa = 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/град — постоянная Больцмана; T_α — температура частиц сорта α , К; v_α — скорость хаотического теплового движения частиц сорта α , см/с (черта сверху означает усреднение по всем частицам данного сорта α). Часто пользуются понятием температуры плазмы и тогда, когда функция распределения частиц отличается от максвелловской, понимая под температурой T_α величину, определенную соотношением (2.2).

Температуру компонент плазмы будем измерять в основном в градусах абсолютной шкалы; кроме того, будем использовать энергетическую систему единиц измерения, в которой постоянная Больцмана $\kappa = 1$, а T_α измеряется в электрон-вольтах ($1 \text{ эВ} = 11\,600 \text{ К} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$).

Сделаем еще одно замечание, связанное с функцией распределения частиц и определением температуры плазмы. Как известно из курса статистической физики, о максвелловском распределении частиц можно говорить лишь при достаточно высоких температурах, когда отсутствует фермиевское *в ы р о ж д е н и е*, обусловленное принципом Паули. Явление фермиевского вырождения возможно для частиц с полужелым спином (электроны, дырки и ионы атома водорода) и становится существенным, когда энергия Ферми превышает тепловую:

$$\varepsilon_{F\alpha} = \frac{p_{F\alpha}^2}{2m_\alpha} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 N_\alpha^{2/3}}{2m_\alpha} \gg kT_\alpha, \quad (2.3)$$

где $p_{F\alpha} = (3\pi^2)^{1/3} \hbar N_\alpha^{1/3}$ — граничный импульс Ферми, а $\hbar = h/(2\pi) = 1,05 \cdot 10^{-27}$ эрг·с — постоянная Планка.

При этом распределение частиц по импульсам определяется выражением

$$f_{F\alpha} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \left\{ \exp \left[\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} - \varepsilon_{F\alpha}/T_\alpha \right] + 1 \right\}^{-1}, \quad (2.4)$$

называемым функцией распределения Ферми.

Неравенство (2.3) выполняется при относительно низких температурах и высоких концентрациях: $N_\alpha \gg 5 \cdot 10^{15} T_\alpha^{3/2} (m_\alpha/m)^{3/2}$. В вырожденной плазме понятие температуры как меры энергии среднего хаотического движения частиц теряет смысл. Эту роль играет энергия Ферми $\varepsilon_{F\alpha} \approx 5 \cdot 10^{-27} N_\alpha^{2/3} (m/m_\alpha)$ эрг, не зависящая от температуры плазмы и возрастающая с увеличением концентрации частиц.

Остановимся на абсолютных значениях основных параметров плазмы N_α и T_α в зависимости от конкретных условий. Так, в F-слое ионосферы $N_e \approx N_i \approx 10^6$ см⁻³, $N_n \ll 10^{10}$ см⁻³, т. е. $r \gg 10^{-4}$, а температура плазмы оказывается довольно высокой, порядка $(3 \div 5) \cdot 10^3$ К. На больших высотах, превышающих радиус Земли, в межпланетной плазме концентрация заряженных частиц колеблется в пределах 10^{-2} см⁻³ $\approx N_e \approx N_i \ll 10$ см⁻³, причем $N_n \ll N_e$, т. е. плазма практически полностью ионизована, а температура $T \approx 10^4$ К. Концентрация N и температура T плазмы звезд меняются в очень широких пределах: концентрация от $10^2 \div 10^3$ см⁻³ до $10^{22} \div 10^{26}$ см⁻³ и выше, температура от $10^4 \div 10^5$ К до $10^9 \div 10^{10}$ К, при этом плазма полностью ионизована. Так, например, в солнечной короне $N_e \approx N_i \approx 10^4 \div 10^8$ см⁻³, а $T \approx 10^6 \div 10^8$ К. В установках для получения термоядерного синтеза, поскольку реакции слияния ядер пороговые, температура плазмы должна превышать $T \gg 10^8$ К, концентрация же заряженных частиц в зависимости от методов нагрева и удержания плазмы составляет либо $N_e \approx N_i \approx 10^{14} \div 10^{15}$ см⁻³, либо $N_e \approx N_i \approx 10^{22} \div 10^{23}$ см⁻³.

Плазму газового разряда в противоположность термоядерной часто называют низкотемпературной. Ее температура обычно не превышает $10^4 \div 10^5$ К, а концентрация заряженных частиц $N_e \approx N_i \approx 10^8 \div 10^{15}$ см⁻³, причем такая плазма практически всегда слабоионизована, так как $N_n \approx 10^{12} \div 10^{17}$ см⁻³. В плазме сильноточного разряда, образующейся при электрическом взрыве металлических проволок $T \approx 10^4 \div 10^5$ К, а концентрации заряженных частиц $N_e \approx N_i \approx 10^{18} \div 10^{20}$ см⁻³ при практически полной ионизации. В металлах электронную плазму образуют свободные носители заряда, концентрация которых $N \approx 10^{21} \div 10^{22}$ см⁻³, причем эффективная масса носителей зарядов имеет порядок массы сво-

бодного электрона. При столь высоких концентрациях свободные электроны в металлах оказываются вырожденными, и условие вырождения (2.3) выполняется вплоть до температур $T \ll 10^4$ К. Твердотельная плазма полупроводников, образованная из отрицательных (электронов) и положительных (дырок) носителей заряда, может быть как вырожденной, так и невырожденной. В полупроводниках с большим числом легких носителей (электронов) при $N_e \geq 10^{16} \div 10^{18} \text{ см}^{-3}$ и эффективной массой $m_e^* \approx 10^{-2}m$ вырождение наступает при температурах $T_a < 10^2$ К, вырождение по тяжелым носителям заряда (дыркам) наступает при еще более низких температурах, в то время как в полупроводниках с малым числом носителей при $N_e \leq 10^{14} \div 10^{15} \text{ см}^{-3}$, как правило, электронно-дырочная плазма оказывается невырожденной.

Разумеется, приведенные численные значения являются ориентировочными и указывают лишь на порядок величин N_a и T_a в различных условиях.

§ 3. Квазинейтральность. Плазменная частота и дебаевский радиус

Данное выше определение плазмы является неточным. Дело в том, что не всякий ионизованный газ представляет собой плазму. Нужно еще, чтобы он обладал свойством квазинейтральности, т. е. в среднем за достаточно большие промежутки времени и на достаточно больших расстояниях был в целом нейтральным. Выясним, каковы эти характерные промежутки времени и расстояния, или иначе, каковы временные и пространственные масштабы разделения зарядов и нарушения нейтральности плазмы. Требование квазинейтральности накладывает связь на величины концентраций электронов и ионов:

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha} N_{\alpha} = 0, \quad (3.1)$$

где e_{α} , N_{α} — соответственно заряд и концентрация частиц сорта α .

В случае, когда в плазме имеются однократно ионизованные ионы только одного сорта, это условие записывается в виде

$$[N_e = N_i, \quad (3.2)$$

так как заряд электрона $e = -e_i$.

Оценим вначале из простых физических соображений временной масштаб разделения зарядов. Представим себе, что какой-либо электрон плазмы отклонился от своего первоначального равновесного положения в плазме. При этом возникает возвращающая сила, по порядку величины равная средней силе взаимодействия частиц, т. е. $F \approx \approx e^2/r_{\text{ср}}^2$, где $r_{\text{ср}}$ — среднее расстояние между частицами: $r_{\text{ср}} =$

$= \left(\frac{3}{4\pi N_e} \right)^{1/3}$. В результате электрон начнет колебаться около равновесного положения с частотой

$$\omega \approx \sqrt{\frac{F}{mr_{cp}}} \approx \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_e}{3m}} \sim \omega_{Le}, \quad (3.3)$$

где величина

$$\omega_{Le} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_e}{m}}$$

называется электронной ленгмюровской, электронной плазменной или просто плазменной частотой и является чрезвычайно важной характеристикой плазмы. Естественно принять за временной масштаб разделения зарядов величину, обратную электронной ленгмюровской частоте:

$$\tau \sim 1/\omega_{Le}, \quad (3.4)$$

поскольку за отрезки времени $t \gg \tau$ частицы совершат много колебаний около равновесного положения и плазма в целом будет вести себя как квазинейтральная система. Плазменная частота не зависит от температуры, поэтому она одинакова для вырожденной и невырожденной плазмы: $\omega_{Le} \approx \sqrt{3 \cdot 10^9 N_e}$, для полупроводниковой плазмы $\omega_{Le} \sim \sqrt{3 \cdot 10^9 N_e \frac{m}{m_e}}$. По этим формулам легко оценить

порядок величины плазменной частоты для различных реальных плазм. Так, для ионосферной плазмы $\omega_{Le} \approx 5 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$, для термоядерной плазмы и плазмы газового разряда $\omega_{Le} \approx 10^8 \div 10^{16} \text{ с}^{-1}$, а для плазмы твердых тел $\omega_{Le} \approx 10^{13} \div 5 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$.

Рассмотрим теперь пространственный масштаб разделения зарядов. Из простых физических соображений ясно, что его величина должна определяться длиной, на которую может сместиться возмущение плотности заряженных частиц вследствие их теплового движения за время, равное периоду плазменных колебаний. Таким образом, пространственный масштаб разделения зарядов для невырожденной плазмы равен

$$d \approx \frac{v_{Te}}{\omega_{Le}} = \sqrt{\frac{\chi T_e}{4\pi e^2 N_e}} = r_{De}, \quad (3.5)$$

где $v_{Te} = \sqrt{\frac{\chi T_e}{m}}$ — скорость теплового движения электронов, а величина

$$r_{De} = \sqrt{\frac{\chi T_e}{4\pi e^2 N_e}} \approx 7 \sqrt{\frac{T \text{ (K)}}{N_e \text{ (см}^{-3}\text{)}}} \text{ [см]} \quad (3.6)$$

носит название электронного дебаевского радиуса и играет в физике плазмы фундаментальную роль.

Для вырожденной плазмы энергия хаотического движения электронов представляет собой энергию Ферми, поэтому в выражении (3.6) κT_e следует заменить на ϵ_{Fe} :

$$r_{De} = \sqrt{\frac{\epsilon_{Fe}}{4\pi e^2 N_e}}. \quad (3.7)$$

Итак, для квазинейтральности плазмы необходимо, чтобы ее характерные размеры L были много большими дебаевского радиуса:

$$L \gg r_{De}. \quad (3.8)$$

Только при этом условии систему заряженных частиц можно считать плазмой, т. е. материальной средой с новыми качественными свойствами. В противном случае получается простая совокупность отдельных заряженных частиц, к которой применима электродинамика вакуума.

Приведем численные оценки величины r_{De} . Для ионосферной плазмы $r_{De} \approx 10^{-1}$ см, для термоядерной плазмы и плазмы газового разряда $r_{De} \approx 10^{-3} \div 10^{-4}$ см, для плазмы твердых тел $r_{De} \approx 10^{-5} \div 10^{-7}$ см. Из этих оценок следует, что в реальных условиях дебаевский радиус — очень малая величина, и условие (3.8) практически всегда выполняется с большим запасом.

§ 4. Газовое приближение. Плазменный параметр

В приведенном определении плазма была охарактеризована как газ заряженных частиц. Но газом нельзя считать любую систему частиц. Совокупность заряженных частиц образует газ, или, как говорят, для нее применимо **газовое приближение**, если средняя потенциальная энергия частиц мала по сравнению с их средней кинетической (тепловой) энергией. Только при этом условии частицы газа являются почти свободными и слабо взаимодействуют между собой. Для кулоновски взаимодействующих частиц указанное требование записывается в виде

$$\frac{e^2}{r_{cp}} \sim e^2 N^{1/3} \ll \kappa T. \quad (4.1)$$

С этим неравенством связана важная характеристика плазмы:

$$\eta = \frac{e^2}{r_{cp} \kappa T} = \frac{e^2 N^{1/3}}{\kappa T} \sim \frac{e^2 4\pi e^2 N}{r_{cp} \kappa T 4\pi e^2 N} \sim \frac{r_{cp}^2}{r_{De}^2} \ll 1. \quad (4.2)$$

Величина η называется **плазменным параметром**, и условие применимости газового приближения сводится к требованию $\eta \ll 1$. Неравенство (4.2) означает, что среднее расстояние между заряженными частицами в плазме должно быть меньше дебаевского

радиуса, или иначе, внутри дебаевской сферы (радиус сферы r_D) должно находиться много частиц.

В реальной газовой плазме неравенства (4.1) и (4.2), как правило, выполняются с большим запасом: для ионосферной плазмы $\eta \leq 10^{-4}$, а для термоядерной плазмы и плазмы газового разряда $\eta \leq 10^{-2}$.

Для вырожденной плазмы плазменный параметр η есть отношение средней потенциальной энергии к энергии Ферми:

$$\eta = \frac{e^2 N^{1/3}}{\epsilon_{Fe}} = \frac{2me^2}{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 N^{1/3}} \sim \frac{r_{cp}^2}{4\pi r_{De}^2} \ll 1. \quad (4.3)$$

Из сравнения неравенств (4.2) и (4.3) видно, что в невырожденной плазме условие применимости газового приближения при заданной температуре выполняется тем лучше, чем меньше плотность заряженных частиц N , в то время как в вырожденной плазме выполнение этого условия облегчается с ростом N . Газовое приближение применимо в металлах лишь при концентрации носителей заряда $N_e \geq 10^{22} \text{ см}^{-3}$, а в полупроводниках с эффективной массой носителей $m^* = 10^{-2} m$ и при меньших концентрациях носителей заряда — порядка $N_e > (10^{16} \div 10^{17}) \text{ см}^{-3}$. Таким образом, условие (4.3) для реальных металлов находится на грани применимости.

Задачи к главе I

Задача 1. Исследовать колебания однородной газовой плазмы, возникшие при малом смещении электронов относительно ионов.

Решение. Обозначим вектор смещения электронов относительно ионов через S . Плотность нескомпенсированного заряда электронов при смещении S будет равна

$$\rho = \text{div } eN_e S = eN_e \text{div } S.$$

Этот заряд создает электрическое поле E , величина которого определяется из уравнения Пуассона:

$$\text{div } E = 4\pi\rho = 4\pi eN_e \text{div } S.$$

Отсюда, учитывая, что при $S = 0$ и $E = 0$, можно написать

$$E = 4\pi eN_e S.$$

Таким образом, поле E параллельно смещению электронов S и действует на каждый электрон с силой

$$F = -eE = -4\pi e^2 N_e S,$$

стремящейся вернуть электрон в первоначальное равновесное положение. В результате имеем уравнение движения электрона вида

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = -eE = -4\pi e^2 N_e S.$$

Это уравнение описывает колебания плазмы около равновесного положения ($S = 0$) с частотой

$$\omega_0 = \omega_{Le} = \left(\frac{4\pi e^2 N_e}{m} \right)^{1/2}.$$

Задача 2. Найти потенциал пробного заряда q , помещенного в пространственно однородную газовую плазму с температурой электронов T_e и ионов T_i .

Решение. Заряд q создает электрическое поле, которое поляризует плазму. В результате в плазме наряду с плотностью внешнего заряда $q\delta(\mathbf{r})$ появится индуцированная плотность заряда $\rho(\Phi)$, где Φ — искомый потенциал. Потенциал подчиняется уравнению Пуассона:

$$\Delta\Phi = -4\pi\rho(\Phi) - 4\pi q\delta(\mathbf{r}). \quad (1)$$

Плотность индуцированного заряда в плазме равна

$$\rho = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \tilde{N}_{\alpha}, \quad (2)$$

где $\tilde{N}_{\alpha}(\Phi)$ — плотность частиц сорта α в плазме при наличии поля Φ .

Согласно барометрической формуле

$$\tilde{N}_{\alpha}(\Phi) = N_{\alpha} e^{-\frac{e_{\alpha}\Phi}{\chi T_{\alpha}}}, \quad (3)$$

где N_{α} — плотность частиц в отсутствие поля Φ (в отсутствие заряда q), поэтому по условию квазинейтральности плазмы $\sum_{\alpha} e_{\alpha} N_{\alpha} = 0$. Таким образом, из уравнения Пуассона имеем

$$\Delta\Phi = -4\pi q\delta(\mathbf{r}) - 4\pi \sum_{\alpha} e_{\alpha} N_{\alpha} e^{-\frac{e_{\alpha}\Phi}{\chi T_{\alpha}}} \approx -4\pi q\delta(\mathbf{r}) + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2 N_{\alpha}}{\chi T_{\alpha}} \Phi. \quad (4)$$

Здесь потенциал точечного заряда считается достаточно слабым, так что $e_{\alpha}\Phi \ll \chi T_{\alpha}$.

Разложив потенциал $\Phi(\mathbf{r})$ в ряд Фурье:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \Phi(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (5)$$

и используя соотношение

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \quad (6)$$

находим решение уравнения Пуассона в виде

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi q}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k^2 + \frac{1}{r_D^2}}, \quad (7)$$

где

$$\frac{1}{r_D^2} = \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2 N_{\alpha}}{\chi T_{\alpha}} = \frac{1}{r_{De}^2} + \frac{1}{r_{Di}^2} \quad (8)$$

(r_{De} , r_{Di} — дебаевские радиусы электронов и ионов соответственно).

Интегрирование полученного выражения лучше всего провести методом теории функций комплексного переменного с обходом полюса $k = i/r_D$ и замыканием контура интегрирования по большой окружности в верхней полуплоскости комплексного k . В результате получим

$$\Phi(r) = \frac{q}{r} e^{-r/r_D}$$