

В.Г. Штейнгауз

Математический калейдоскоп

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 001
ББК 72
В11

В11 **В.Г. Штейнгауз**
Математический калейдоскоп / В.Г. Штейнгауз – М.: Книга по Требованию, 2023. – 160 с.

ISBN 978-5-458-24547-0

ISBN 978-5-458-24547-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагая польскому читателю второе (а в общем счете — седьмое) издание моего «*Калейдоскопа*», должен сразу же оговорить, как и в предисловии к первому изданию, что эта книга не претендует ни на систематическое построение какого-либо раздела математики, ни на популярное изложение тех или иных математических задач. Это просто книжка с картинками. Основная ее цель — представить математику в зримой форме — сохраняется в качестве главной и в новом издании, хотя я и допускал более длинные словесные комментарии там, где без них было не обойтись.

Ошибался бы тот, кто считал «*Калейдоскоп*» собранием шарад и курьезов, поскольку серьезные вопросы подменяются в нем детскими игрушками. Это верно, что «*Калейдоскоп*» обращен к любознательности ребенка, которому он показывает неведомые и захватывающие воображение предметы. Но не так ли поступает с нами сама природа? И разве из-за этого мир превращается в магазин с игрушками? Думаю, что нет. А если и так, то можно ли это вменить в вину «*Калейдоскопу*»?

Немало найдется таких рисунков, в которых читатель не увидит математики. Эти рисунки просто красивы. Когда они пришли мне в голову, хотелось увидеть модель, а когда модель была готова, хотелось посмотреть, как она выйдет на фотографии — взрослые люди и даже взрослые математики тоже должны иногда поиграть. Все это было бы невозможно без помощи рисовальщиков, модельщиков и фотографов. В первом издании было 180 иллюстраций, во втором число их перевалило за 300. Для первого издания рисунки делали Энгельштейн, Грюнберг и Халицка, а фотографии — Ванда Дьямандувна; к этим именам, которые я вспоминаю с благодарностью, должен присоединить теперь имена Бронислава Купца с кафедры фототехники Вроцлавского политехнического института и рисовальщиков В. Вдовяка, А. Трояновского и А. Тычынського. Модели для нового издания изготовил Рышард Новаковский; эти модели принадлежат математическому кабинету Вроцлавского университета им. Болеслава Берута.

Для понимания книги не требуется знания высшей математики. Есть в ней, правда, и трудные места, но их можно опустить, так как «*Калейдоскоп*» не является каким-либо систематическим руководством.

Кто пожелает, может поразмыслить над предлагаемыми вопросами; некоторые из них легкие, ответы на некоторые другие автору неизвестны, но встречаются и такие, которые в настоящее время никто не умеет решать.

Примечания в конце книги указывают на источники, в которых автор почерпнул большую часть своих замыслов.

Несколько лиц критически прочли рукопись: М. Кац (первое издание), Г. С. М. Коксетер и Г. Роббинс (американское издание); при подготовке настоящего издания я пользовался помощью Я. Мыцельского. Название книги придумано моей женой.

Какова основная идея книги? Их две: 1) предметом математики является действительность, 2) математика универсальна — нет вещи, которая была бы ей чужда. Этих идей читатель не откроет ни в одном рисунке в отдельности, но обзрев их все, почувствует, что таков именно их совокупный смысл.

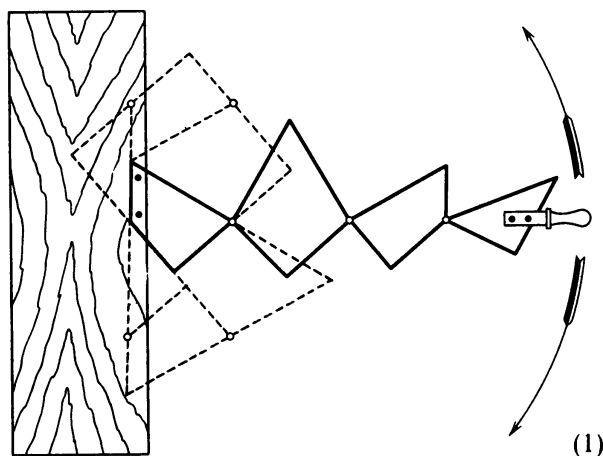
Вроцлав, 16 сентября 1954 г.

Г. Шт.

I

ТРЕУГОЛЬНИКИ. КВАДРАТЫ. ИГРЫ.

Из этих четырех дощечек (1) составитсЯ квадрат или равносторонний треугольник, в зависимости от того, в какую сторону повернуть рукоятку.



С помощью прямоугольного треугольника можно разложить квадрат на два квадрата (2); чтобы убедиться, что больший квадрат складывается из двух меньших, проведем через центр среднего квадрата горизонтальную и вертикальную прямые и сместим, не поворачивая, получившиеся четыре части в углы большего квадрата; сместив теперь малый квадрат, мы покроем оставшуюся незанятую среднюю часть большего квадрата. Из равенства $a = b + c$ видно, что малый квадрат точно соответствует размеру этой средней части.

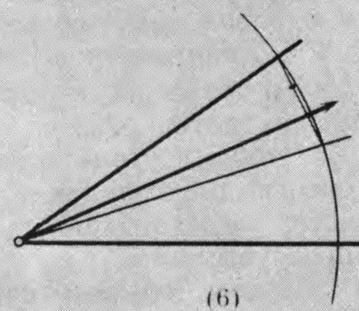
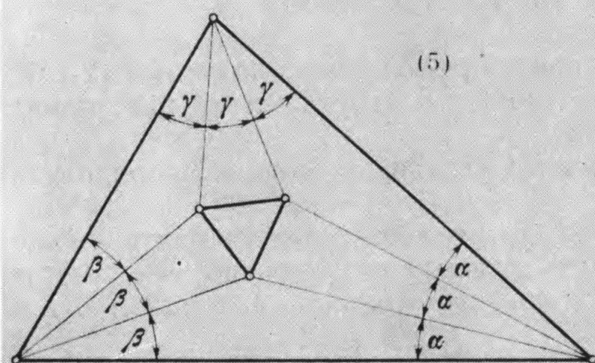
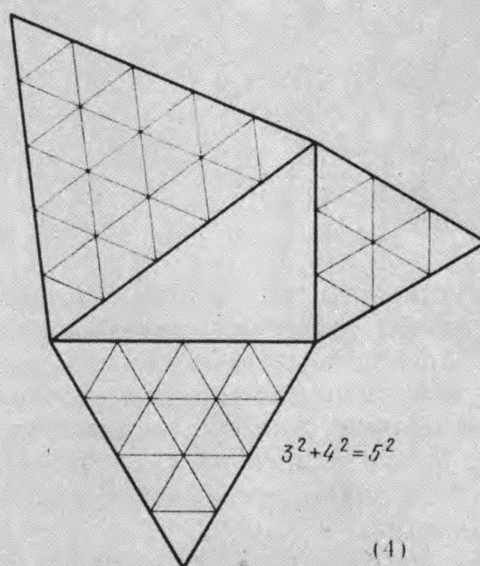
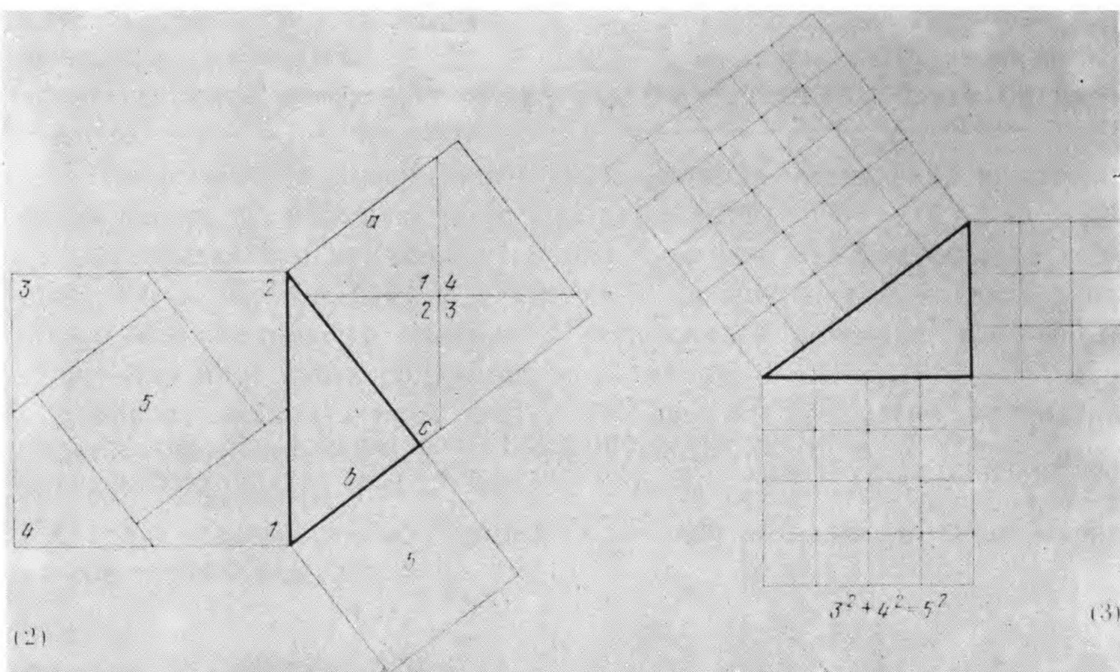
Смысл только что доказанного утверждения становится особенно прозрачным в случае треугольника (3) со сторонами 3, 4 и 5. Имеем: $9 + 16 = 25$.

Мы можем, следовательно, построить прямой угол с помощью 12-сантиметровой нитки со связанными концами и с отметками на расстоянии 3, 4 и 5 сантиметров одна от другой.

То же свойство прямоугольного треугольника можно проверить и без квадратов (4).

Чтобы построить равносторонний треугольник, можно взять произвольный треугольник (5) и разделить каждый его угол на три равные части; тогда внутри его получится малый треугольник, который и будет равносторонним.

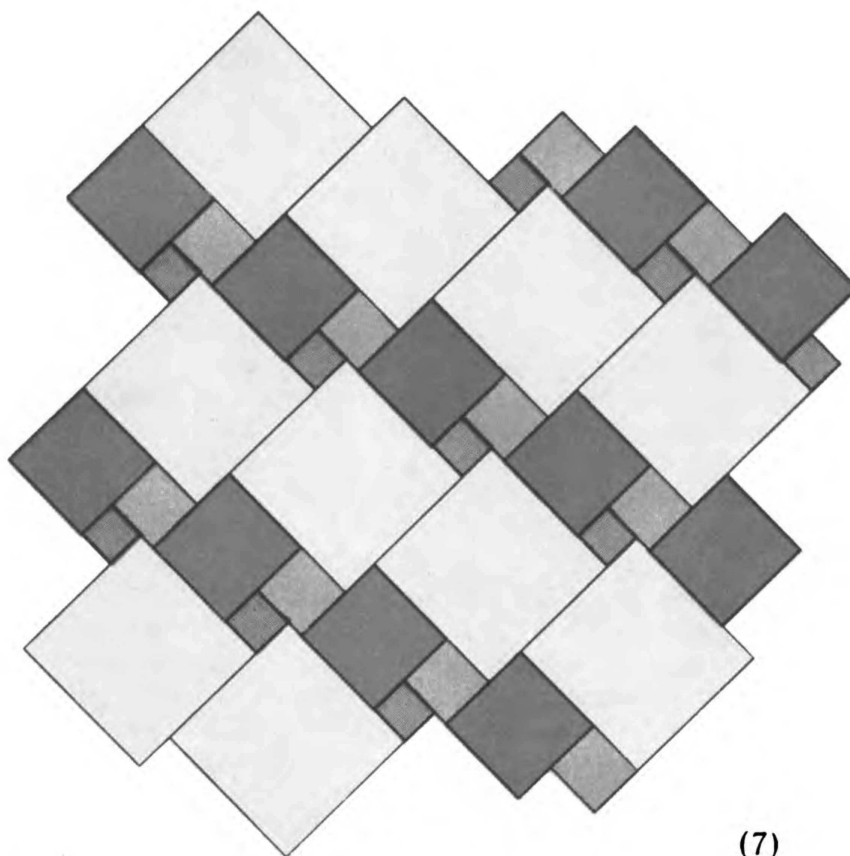
Угол с большой точностью делится на три равные части следующим образом (6): сначала угол делится пополам, а затем хорда половинного



угла делится на три; луч, отсекающий $\frac{2}{3}$ этой хорды, отделяет одну треть всего угла.

Данный способ не является абсолютно точным.

Всю плоскость можно покрыть квадратными плитками нескольких разных размеров (7).



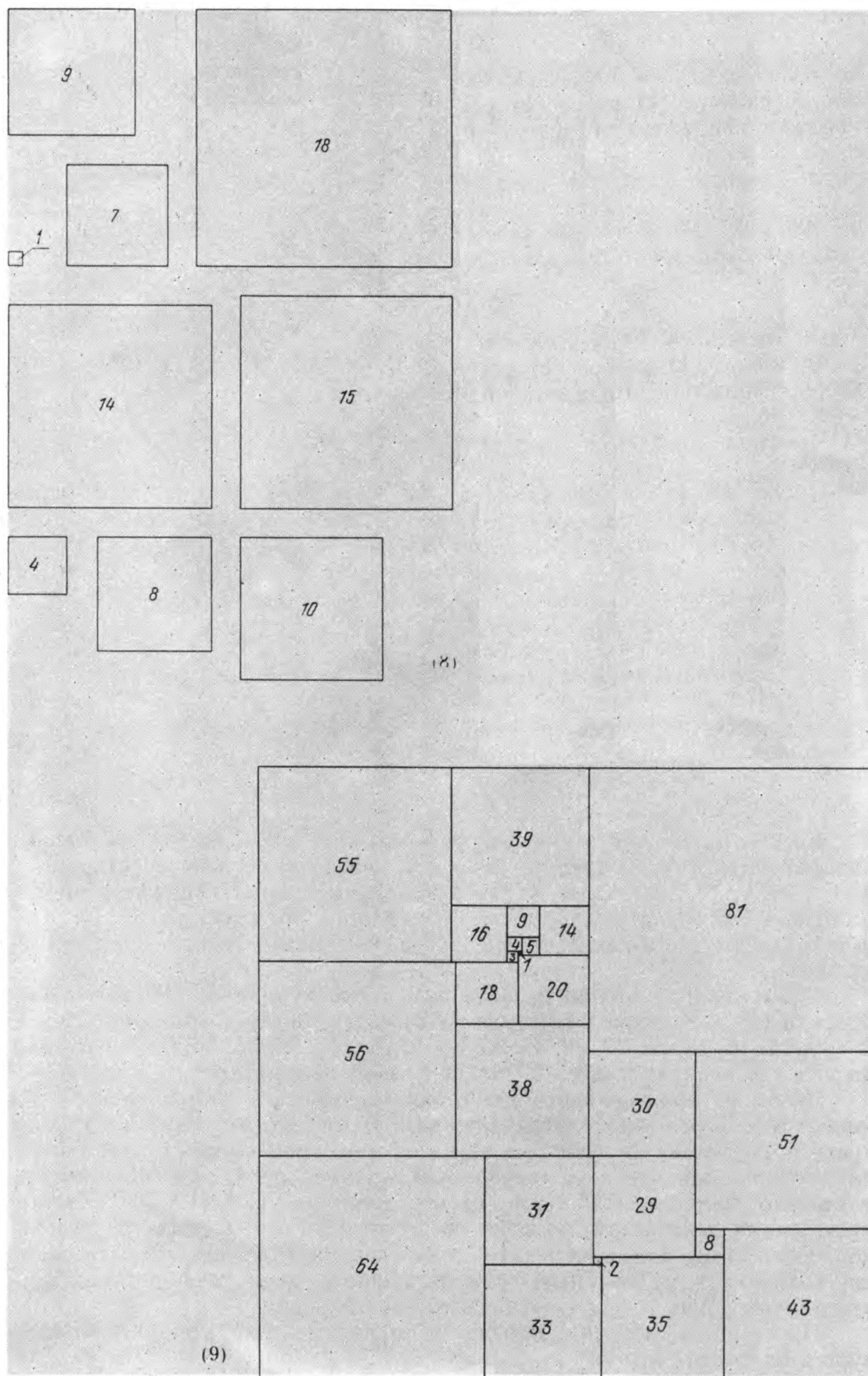
(7)

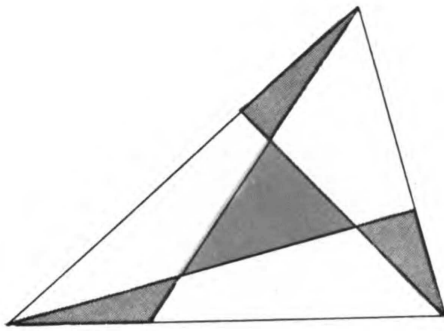
Весьма интересно разбиение прямоугольника на одни только разные квадраты. На стр. 10 представлены (8) девять квадратов со сторонами 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 18. Задача: составить из этих квадратов прямоугольник. Это простейший пример разбиения прямоугольника на разные квадраты. Ни в каком разбиении не может быть меньше девяти квадратов.

Даже квадрат можно разбить на разные квадраты. Мы здесь изобразили (9) одно такое разбиение на 24 квадрата со сторонами 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 14, 16, 18, 20, 29, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 43, 51, 55, 56, 64, 81. Можно ли разбить квадрат менее чем на 24 разных квадрата?

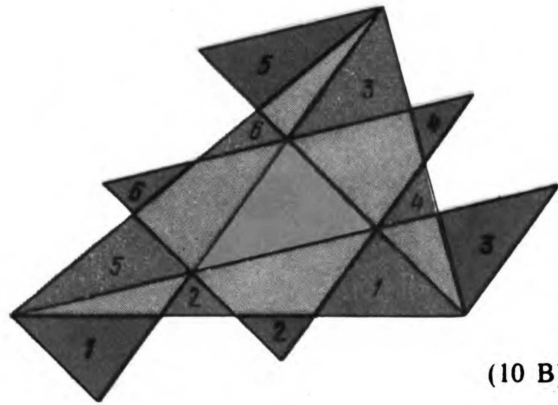
Чтобы из произвольного треугольника вырезать треугольник с площадью в семь раз меньше, отделяем (10 А) от каждой стороны по одной трети и соединяем полученные точки с противоположными вершинами; то, что площадь красного треугольника равна одной седьмой площади исходного треугольника, видно из соседнего рисунка (10 В): красный треугольник равновелик каждому из шести серо-коричневых треугольников; выступающими коричневыми треугольниками можно покрыть синие треугольники; следовательно, общая площадь семи равновеликих треугольников равна площади исходного треугольника.

Простейшее разбиение плоскости на равные квадраты (11) используется во многих играх.



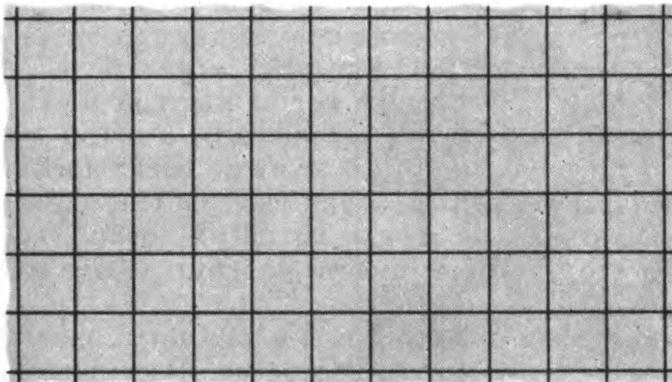


(10 A)



(10 B)

На доске (12) размером 3×3 можно играть в крестики-нолики следующим образом. Игроки поочередно ставят по одному крестику (первый игрок) или нулику (второй игрок). После того, как выставлено по три крестика и нулика, каждый игрок при очередном ходе имеет право переставить один свой крестик или нулик на одну из соседних свободных клеток (но не наискосок). Выигрывает тот, кто первый займет три клетки по вертикали, горизонтали или диагонали. Начинаящий обеспечит себе выигрыш, если он своим первым ходом займет центральную клетку, а затем будет должным образом отвечать на ходы противника. Действительно, если первый игрок поставит сначала крестик в клетку *e*, то второй игрок может поставить нулик либо в одну из прилегающих, либо в угловую клетку. Пусть нулик поставлен в угловую клетку, например, клетку *a*. Тогда первый игрок должен поставить крестик в клетку *h*, вынуждая противника занять клетку *b*; на это первый игрок отвечает занятием клетки *c*, и второй игрок должен будет поставить нулик в клетку *g*. Теперь первый игрок за два следующих хода переставляет крестики из клетки *e* в клетку *i* и из клетки *h* в клетку *i* и выигрывает. Если второй игрок займет сначала одну из прилегающих к *e* клеток, например, клетку *b*, то первый займет *g*, второй должен будет занять *c*; тогда первый займет *a*, вынуждая второго занять *d* — и второй игрок не успеет помешать первому переставить крестик с *g* сначала на *h*, а затем на *i*. Можно условиться, что начинающий не имеет права занимать первым ходом центральную клетку, тогда при правильной игре обоих партнеров игра никогда не закончится.

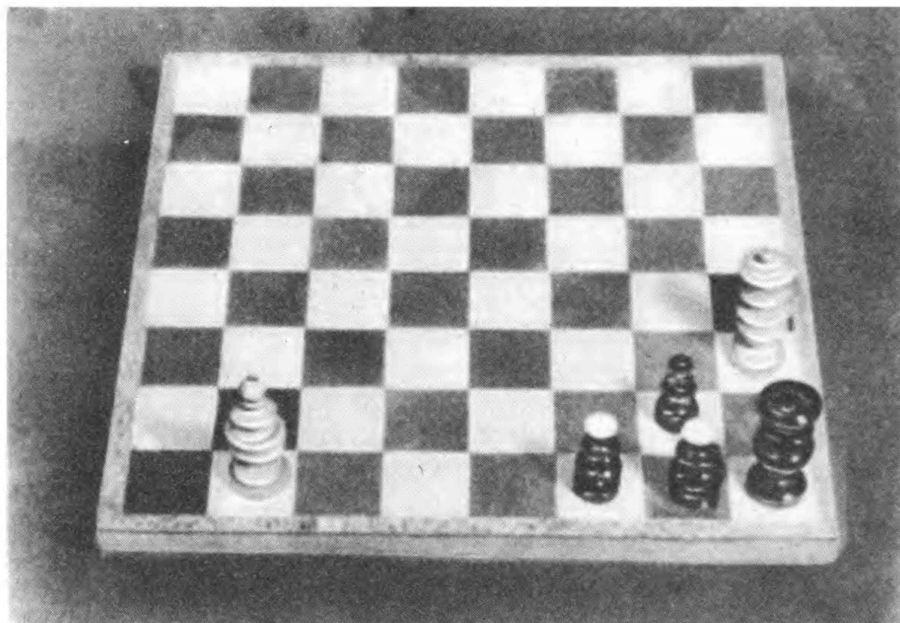


(11)

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>

(12)

Некоторые шахматные позиции можно точно проанализировать. Например, в эндшпиле д-ра Бергера (13) у белых имеется только один ход, $Fb1 - b8$, обеспечивающий им победу. При этом ходе и дальнейшей правильной игре белых их выигрыш уже после восьми ходов становится



(13)

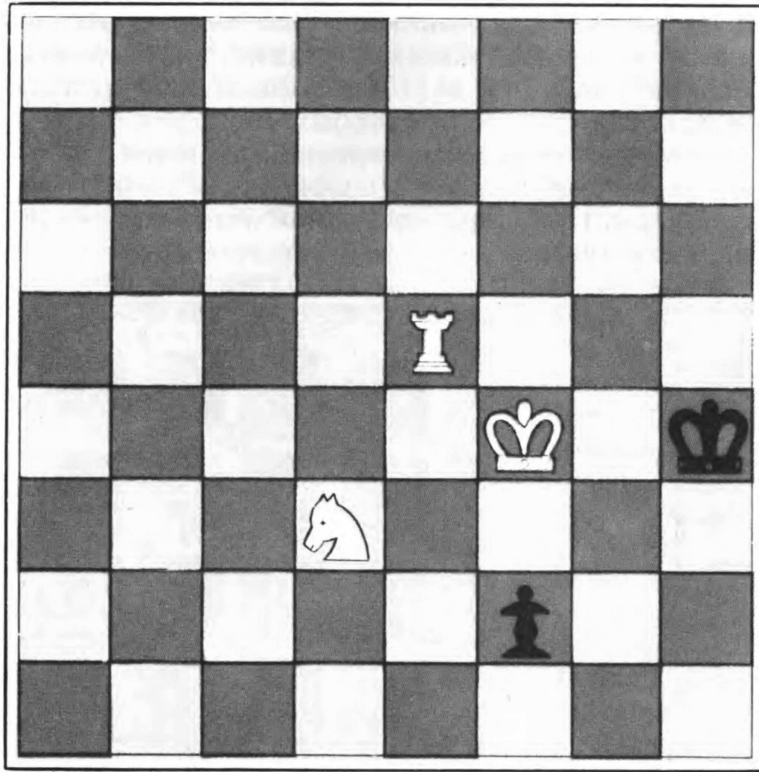
очевидным. При всяком же другом ходе белых и правильной игре черных победу одерживают черные.

Некоторые эндшпили замечательны богатством вариантов и неожиданностью внешне скрытого решения. Так, например, начинающему игроку нелегко будет догадаться, каким образом в этой позиции (14) белые дают мат самое большое в четыре хода.

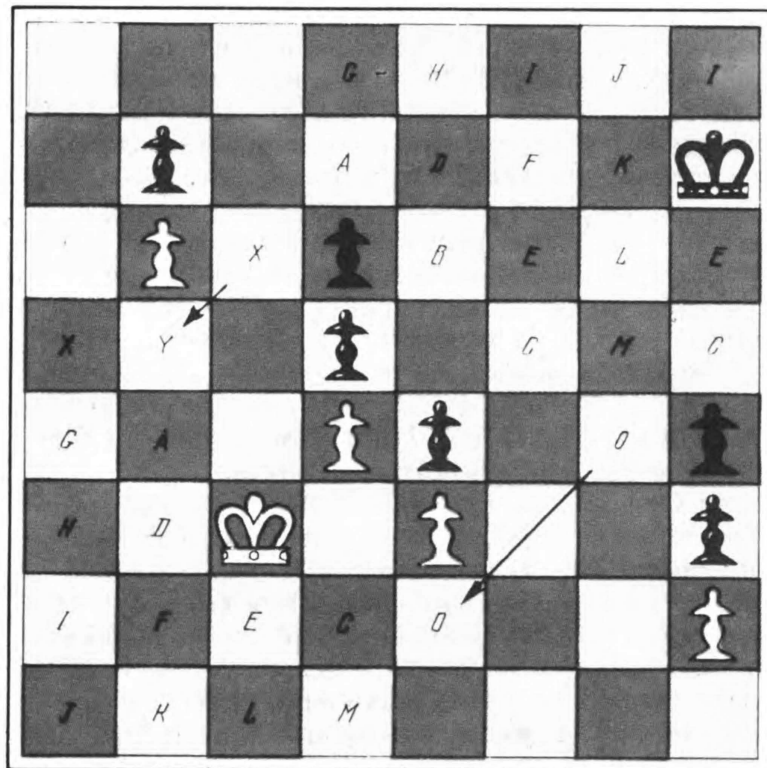
Эндшпиль д-ра Эберса (15) носит чисто математический характер. Можно точно доказать, что белые не позволят черному королю взять какую-либо из своих пешек, если только всегда будут ходить своим королем на поле, обозначенное той же буквой, что и поле, на котором стоит черный король. В соответствии с этим правилом первый ход белых есть ход $B - F$. Если белые ни разу не отступят от этого правила, то результат будет ничейным. Если они нарушат его хотя бы однажды, то черные смогут при желании не позволить белым вернуться к указанной тактике, их король проникнет в лагерь белых по одной из диагоналей $X - Y$ или $O - O$ и черные добьются победы.

Читателю не нужно быть блестящим игроком, чтобы добиться результата 1:1 в одновременной игре на двух досках против двух мастеров. Достаточно потребовать, чтобы один из мастеров (А) играл белыми, а другой (В) — черными и чтобы матч начинался ходом мастера А. Тем же самым ходом читатель должен начать свою партию с В, а когда тот ответит — повторить его ответ в партии с А и т. д. В итоге на обеих досках будет разыграна одна и та же партия. Читатель либо выиграет на одной доске и проиграет на другой, либо сделает ничью на обеих досках, поэтому в любом случае он и оба его партнера вместе наберут по одному очку.

Мы не располагаем математической теорией игры в шахматы, однако для некоторых более простых игр такая теория построена. Рассмотрим,

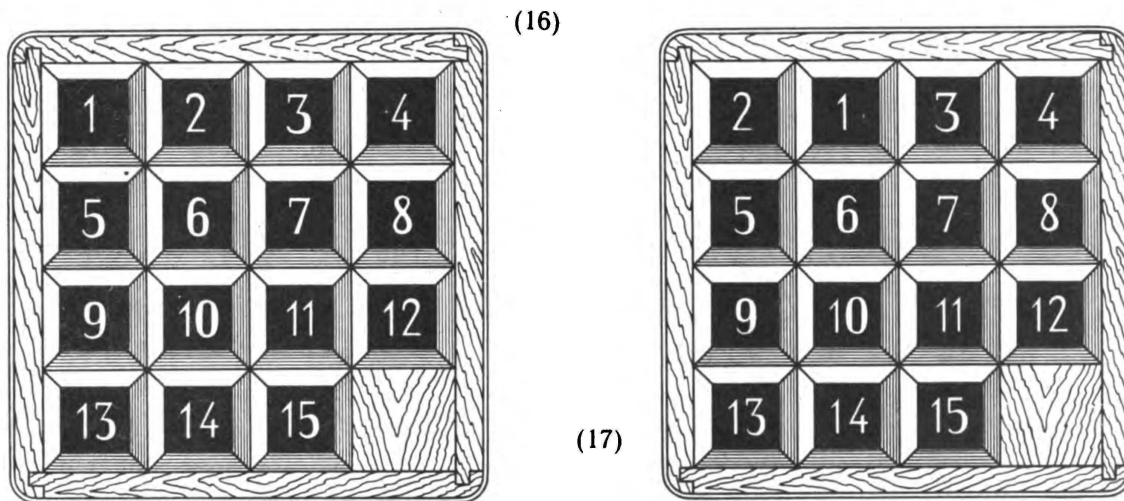


(14)



(15)

например, следующую игру (16). В квадратной коробочке имеется 16 ячеек; одна из них свободна, а остальные заполнены фишками, занумерованными числами от 1 до 15. На рисунках (16) и (17) показаны два расположения фишек в ячейках коробочки, первое из которых считается начальным, а второе выбрано произвольно. Можно ли, передвигая фишки внутри коробочки, перевести произвольно выбранное расположение в начальное? Ознакомимся с теорией этой игры. Припишем свободной ячейке номер 16; каждому расположению фишек отвечает некоторая расстановка чисел 1,



2, 3,...15, 16. От расстановки этих чисел в их естественном порядке можно перейти к любой другой расстановке за несколько шагов, каждый из которых состоит в перестановке двух соседних чисел. Например, расстановку 2, 1, 3, 4,..., 16 можно получить за один шаг — переставив единицу с двойкой.

Одни расстановки требуют четного числа шагов, другие — нечетного, но никакая расстановка не может быть получена из начальной как за четное, так и за нечетное число шагов. Если бы к некоторой расстановке вело два пути — с четным и нечетным числом шагов, то можно было бы пойти первым путем и затем вернуться вторым путем, выполняя соответствующие шаги в обратном порядке. В результате получился бы путь, ведущий от начальной расстановки к ней же, в котором число шагов, будучи суммой чисел разной четности, было бы нечетным. Это, однако, невозможно — никакую расстановку нельзя перевести в себя за нечетное число шагов. Ведь на каждом шагу переставляются какие-нибудь два числа: если имеется шаг, преобразующий пару соседних чисел (3, 7) в пару (7, 3), то должен существовать обратный шаг, преобразующий пару (7, 3) в пару (3, 7). Действительно, пусть, например, в исходной расстановке, к которой мы хотим вернуться, тройка стояла слева от семерки; тогда мы должны скомпенсировать перескок тройки направо от семерки — при любых дальнейших перемещениях тройка не сможет вернуться на свое место иначе, как перескочив снова налево от семерки. Это относится ко всем парам — число шагов, в которых участвуют любые два заданных числа, четно. Следовательно, четно и общее число шагов. Мы убедились, таким образом, что существуют расстановки четные и нечетные — первые получаются из начальной расстановки за четное, а вторые — за нечетное число шагов. Если какая-нибудь расстановка четна, то она не может быть нечетной.