

**Э. Гурса**

**Курс математического  
анализа**

**Т. 2. Ч. 1. Теория аналитических  
функций**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 51  
ББК 22.1  
Э1

Э1      **Э. Гурса**  
Курс математического анализа: Т. 2. Ч. 1. Теория аналитических функций / Э.  
Гурса – М.: Книга по Требованию, 2021. – 272 с.

**ISBN 978-5-458-25175-4**

По объему это руководство является одним из наиболее полных в современной мировой математической литературе. В то же время излагаемые факты выбраны не по принципу энциклопедичности, выбор проникнут одной руководящей мыслью - дать необходимый материал, на котором основывается разработка наиболее важных проблем современной науки.

**ISBN 978-5-458-25175-4**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

[www.samizday.ru/reprint](http://www.samizday.ru/reprint)



## ОГЛАВЛЕНИЕ.

### Г л а в а   X I I I .

#### ПРОСТЕЙШИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО.

|                                                                                           | <i>Стр.</i> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| I. Общие замечания. Моногенные функции . . . . .                                          | 9           |
| 255. Определения . . . . .                                                                | —           |
| 256. Непрерывные функции комплексного переменного . . . . .                               | 12          |
| 257. Моногенные функции . . . . .                                                         | 13          |
| 258. Голоморфные функции . . . . .                                                        | 16          |
| 259. Рациональные функции . . . . .                                                       | 17          |
| 260. Исследование некоторых иррациональных функций . . . . .                              | 18          |
| 261. Функции однозначные и многозначные . . . . .                                         | 21          |
| II. Целые ряды с мнимыми членами. Простейшие трансцендентные функции . . . . .            | —           |
| 262. Круг сходимости . . . . .                                                            | 22          |
| 263. Ряды рядов . . . . .                                                                 | 25          |
| 264. Разложение бесконечного произведения в степенной ряд . . . . .                       | 26          |
| 265. Показательная функция . . . . .                                                      | 28          |
| 266. Круговые (тригонометрические) функции . . . . .                                      | 30          |
| 267. Логарифмы . . . . .                                                                  | 31          |
| 268. Обратные функции: $\arcsin z$ , $\arctg z$ . . . . .                                 | 33          |
| 269. Приложение к интегральному исчислению . . . . .                                      | 36          |
| 270. Разложение на простые элементы рациональной функции от $\sin z$ и $\cos z$ . . . . . | 38          |
| 271. Разложение $\text{Log}(1+z)$ . . . . .                                               | 41          |
| 272. Распространение формулы бинома . . . . .                                             | 43          |
| III. Понятие о конформном преобразовании . . . . .                                        | 45          |
| 273. Геометрическое истолкование производной . . . . .                                    | —           |
| 274. Теорема Римана . . . . .                                                             | 49          |
| 275. Изотермические линии . . . . .                                                       | 51          |
| Упражнения . . . . .                                                                      | 52          |

### Г л а в а   X I V .

#### ОБЩАЯ ТЕОРИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО КОШИ.

|                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| I. Определенные интегралы между мнимыми пределами . . . . .                              | 56 |
| 276. Определения и общие положения . . . . .                                             | —  |
| 277. Замены переменных . . . . .                                                         | 58 |
| 278. Формулы Вейерштрасса и Дарбу . . . . .                                              | 60 |
| 279. Интегралы по замкнутому контуру . . . . .                                           | 62 |
| 280. Исследование предпосылок, необходимых для доказательства основной теоремы . . . . . | 64 |
| 281. Случай сложных контуров . . . . .                                                   | 65 |
| 282. Распространение формул интегрального исчисления . . . . .                           | 67 |
| 283. Другой вывод предыдущих результатов . . . . .                                       | 69 |

|                                                                                  | <i>Стр.</i> |
|----------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| II. Интеграл Коши. Ряды Тейлора и Лорана. Особые точки. Вычеты . . . . .         | 70          |
| 284. Основная формула . . . . .                                                  | —           |
| 285. Теорема Морера . . . . .                                                    | 73          |
| 286. Ряд Тейлора . . . . .                                                       | 74          |
| 287. Теорема Лиувилля . . . . .                                                  | 76          |
| 288. Ряд Лорана . . . . .                                                        | 77          |
| 289. Разные ряды . . . . .                                                       | 80          |
| 290. Ряды голоморфных функций. Теорема Вейерштрасса . . . . .                    | 82          |
| 291. Полюсы . . . . .                                                            | 84          |
| 292. Мероморфные функции . . . . .                                               | 85          |
| 293. Существенно особые точки . . . . .                                          | 86          |
| 294. Вычеты . . . . .                                                            | 88          |
| III. Приложения общих теорем . . . . .                                           | 90          |
| 295. Различные замечания . . . . .                                               | —           |
| 296. Вычисление простейших определенных интегралов . . . . .                     | 91          |
| 297. Различные определенные интегралы . . . . .                                  | 92          |
| 298. Вычисление произведения $\Gamma(p)\Gamma(1-p)$ . . . . .                    | 95          |
| 299. Приложение к мероморфным функциям . . . . .                                 | 96          |
| 300. Приложение к теории уравнений . . . . .                                     | 98          |
| 301. Формула Иенсена . . . . .                                                   | 99          |
| 302. Формула Лагранжа . . . . .                                                  | 101         |
| 303. Исследование функции при бесконечно-больших значениях переменного . . . . . | 103         |
| IV. Периоды определенных интегралов . . . . .                                    | 106         |
| 304. Полярные периоды . . . . .                                                  | —           |
| 305. Изучение интеграла $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ . . . . .             | 109         |
| 306. Периоды ультраэллиптических интегралов . . . . .                            | 110         |
| 307. Периоды эллиптического интеграла первого рода . . . . .                     | 114         |
| Упражнения . . . . .                                                             | 116         |

## Г л а в а X V.

### ОДНОЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ.

|                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| I. Первичные множители Вейерштрасса. Теорема Миттаг-Леффлера . . . . .           | 126 |
| 308. Выражение целой функции через произведение первичных множителей . . . . .   | —   |
| 309. Род целой функции . . . . .                                                 | 131 |
| 310. Однозначные функции с конечным числом особых точек . . . . .                | —   |
| 311. Однозначные функции с бесконечным множеством особых точек . . . . .         | 132 |
| 312. Теорема Миттаг-Леффлера . . . . .                                           | 133 |
| 313. Исследование некоторых частных случаев . . . . .                            | 136 |
| 314. Способ Коши . . . . .                                                       | 138 |
| 315. Разложение $\operatorname{ctg} x$ и $\sin x$ . . . . .                      | 141 |
| II. Двойкопериодические функции. Эллиптические функции . . . . .                 | 145 |
| 316. Периодические функции. Разложение в ряды . . . . .                          | —   |
| 317. Невозможность существования однозначной функции с тремя периодами . . . . . | 147 |
| 318. Двойкопериодические функции . . . . .                                       | 148 |
| 319. Эллиптические функции. Общие свойства . . . . .                             | 149 |
| 320. Функция $\wp u$ . . . . .                                                   | 152 |
| 321. Алгебраическое соотношение между $\wp u$ и $\wp' u$ . . . . .               | 156 |

|                                                              | <i>Стр.</i> |
|--------------------------------------------------------------|-------------|
| 322. Функция $\zeta$                                         | 158         |
| 323. Функция $\sigma$                                        | 160         |
| 324. Общее выражение эллиптических функций                   | 161         |
| 325. Формулы сложения                                        | 164         |
| 326. Интегрирование эллиптических функций                    | 166         |
| 327. Функция $\theta$                                        | 168         |
| III. Обращение. Кривые первого рода                          | 170         |
| 328. Соотношение между периодами и инвариантами              | —           |
| 329. Функция, обратная эллиптическому интегралу первого вида | 172         |
| 330. Определение функции $\wp$ через инварианты              | 179         |
| 331. Приложение к плоским кривым третьего порядка            | 182         |
| 332. Общие формулы обращения                                 | 184         |
| 333. Кривые первого рода                                     | 188         |
| Упражнения                                                   | 191         |

## ГЛАВА XVI.

### АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ.

|                                                            |     |
|------------------------------------------------------------|-----|
| I. Определение аналитической функции одним из ее элементов | 193 |
| 334. Первое понятие об аналитическом продолжении           | —   |
| 335. Другое определение аналитических функций              | 195 |
| 336. Особые точки                                          | 200 |
| 337. Общая задача                                          | 201 |
| II. Различные методы аналитического продолжения            | 203 |
| 338. Замена переменного                                    | —   |
| 339. Подпоследовательности                                 | 206 |
| 340. Преобразование к виду интеграла                       | 207 |
| 341. Теорема Адамара                                       | 211 |
| 342. Теорема Миттаг-Леффлера                               | 213 |
| 343. Теорема Пеппеле                                       | 214 |
| III. Пустые пространства. Разрезы                          | 215 |
| 344. Особые линии. Пустые пространства                     | 216 |
| 345. Примеры                                               | 218 |
| 346. Особенности аналитических выражений                   | 220 |
| 347. Формула Эрмита                                        | 221 |
| Упражнения                                                 | 224 |

## ГЛАВА XVII.

### АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

|                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------|-----|
| I. Общие свойства                                         | 226 |
| 348. Определения                                          | —   |
| 349. Совместные круги сходимости                          | 227 |
| 350. Двойные интегралы                                    | 229 |
| 351. Распространение теорем Коши                          | 231 |
| 352. Функции, изображаемые в виде определенных интегралов | 233 |
| 353. Приложение к функции $\Gamma$                        | 235 |
| 354. Аналитическое продолжение функции двух переменных    | 237 |
| II. Неявные функции. Алгебраические функции               | 238 |
| 355. Теорема Вейерштрасса                                 | —   |
| 356. Критические точки                                    | 242 |
| 357. Алгебраические функции                               | 245 |

|                                                            | <i>Стр.</i> |
|------------------------------------------------------------|-------------|
| 358. Абелевы интегралы . . . . .                           | 248         |
| 359. Теорема Абеля . . . . .                               | 249         |
| 360. Приложение к ультраэллиптическим интегралам . . . . . | 251         |
| 361. Распространение формулы Лагранжа . . . . .            | 255         |
| Упражнения . . . . .                                       | 257         |

## ДОПОЛНЕНИЕ.

### О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

|                                                              |     |
|--------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Общие положения . . . . .                                 | 258 |
| 2. Теорема Вейерштрасса . . . . .                            | 259 |
| 3. Область равномерной сходимости . . . . .                  | 261 |
| 4. Теорема Стильтьеса. Ядро равномерной сходимости . . . . . | —   |
| 5. Теорема Витали . . . . .                                  | 263 |
| 6. Нормальные последовательности . . . . .                   | 265 |
| 7. Неограниченные сходящиеся последовательности . . . . .    | 267 |
| Указатель . . . . .                                          | 269 |

## ГЛАВА XIII.

### ПРОСТЕЙШИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО.

#### I. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ. МОНОГЕННЫЕ ФУНКЦИИ.

**255. Определения.** *Мнимым количеством*, или *комплексным количеством*, называется всякое выражение вида  $a + bi$ , где  $a$  и  $b$  — какие-нибудь действительные числа, и  $i$  — особый символ, ввести который оказалось нужным, чтобы придать алгебре больше общности. В сущности, на комплексное количество можно смотреть как на систему двух действительных количеств, взятых в определенном порядке. Хотя выражения вида  $a + bi$  и не имеют сами по себе никакого конкретного значения, тем не менее, условились применять к ним обыкновенные правила алгебраического вычисления при условии заменять повсюду выражение  $i^2$  через  $-1$ .

Два мнимых количества  $a + bi$  и  $a' + b'i$  называются равными, если  $a' = a$ ,  $b' = b$ . Сумма двух мнимых количеств  $a + bi$  и  $c + di$  есть символ того же вида  $(a + c) + i(b + d)$ ; точно так же разность  $(a + bi) - (c + di)$  равна мнимому количеству  $(a - c) + i(b - d)$ . Чтобы получить произведение  $a + bi$  на  $c + di$ , его составляют по обыкновенному правилу алгебраического умножения, заменяя  $i^2$  через  $-1$ ; это дает:

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + i(ad + bc).$$

Частное от деления  $a + bi$  на  $c + di$  есть также мнимый символ  $x + yi$ , произведение которого на  $c + di$  равно  $a + bi$ . На основании правила умножения, равенство

$$a + bi = (c + di)(x + yi)$$

равносильно соотношениям

$$cx - dy = a, \quad dx + cy = b;$$

отсюда имеем:

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Для изображения частного от деления  $a + bi$  на  $c + di$  пользуются обычным изображением алгебраических дробей:

$$x + yi = \frac{a + bi}{c + di};$$

чтобы найти  $x$  и  $y$ , всего проще умножить числитель и знаменатель этой дроби на  $c - di$  и раскрыть полученные произведения.

Все свойства основных алгебраических действий распространяются и на действия над мнимыми символами; так, если  $A, B, C, \dots$  обозначают мнимые символы, то

$$A \cdot B = B \cdot A, (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C), A \cdot (B + C) = AB + AC, \dots$$

и т. д. Мнимые количества  $a + bi$  и  $a - bi$  называются *сопряженными мнимыми количествами*. Два мнимых количества  $a + bi$  и  $-a - bi$ , сумма которых равна нулю, называются *противоположными*, или *симметричными*.

Пусть мы имеем на плоскости систему прямоугольных осей координат  $xOy$ , расположенных обычным образом. Тогда мнимое количество  $a + bi$  изобразится на этой плоскости точкою  $M$  с координатами  $x = a, y = b$ . Таким образом чисто символические выражения получают конкретное истолкование, и каждому предложению, доказанному для мнимых количеств, будет соответствовать теорема планиметрии. В последующем мы всего лучше убедимся в огромных преимуществах этого способа изображать мнимые количества. Действительные количества соответствуют точкам оси  $Ox$ , которая поэтому называется также *действительною осью*. Мнимые сопряженные количества  $a + bi$  и  $a - bi$  соответствуют двум точкам, симметричным относительно оси  $Ox$ ; противоположные количества  $a + bi$  и  $-a - bi$  представятся точками, симметричными относительно точки  $O$ .

Количество  $a + bi$ , соответствующее точке  $M$  с координатами  $(a, b)$ , иногда называется также *аффиксом* этой точки. В тех случаях, когда можно не опасаться неопределенности, мы будем обозначать одною и тою же буквою как мнимое количество, так и ту точку, которая его представляет.

Соединим начало координат с точкою  $m$  с координатами  $(a, b)$ . Расстояние  $Om$  называется *модулем* количества  $a + bi$ , а угол, на который нужно повернуть полупрямую, совпадающую с  $Ox$ , чтобы привести ее в совпадение с  $Om$  (этот угол отсчитывается, как в тригонометрии, от  $Ox$  к  $Oy$ ), называется *аргументом* количества  $a + bi$ . Пусть будут  $\rho$  и  $\omega$  модуль и аргумент количества  $a + bi$ ; действительные количества  $a, b, \rho, \omega$  связаны двумя соотношениями

$$a = \rho \cos \omega, b = \rho \sin \omega,$$

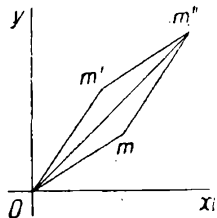
откуда имеем:

$$\rho = +\sqrt{a^2 + b^2}, \cos \omega = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \omega = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Модуль есть вполне определенное существенно положительное число; напротив, аргумент определяется только его тригонометрическими функциями и потому известен только с точностью до  $2\pi$ , что очевидно из самого его определения. Поэтому всякое мнимое количество имеет бесконечное множество аргументов, образующих арифметическую прогрессию с разностью  $2\pi$ . Чтобы два мнимых количества были между собою равны, их модули должны быть равны, и, кроме этого, необходимо,

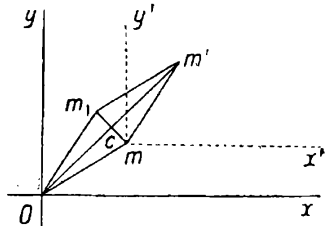
чтобы аргументы разнились между собою на кратное  $2\pi$ ; эти два условия также и достаточны. Модуль мнимого количества  $z$  изображается тем же символом  $|z|$ , как и абсолютное значение действительного количества.

Пусть будут  $z = a + bi$ ,  $z' = a' + b'i$  мнимые количества,  $m$ ,  $m'$  — соответствующие им точки; сумма  $z + z'$  изобразится точкою  $m''$ , лежащею в вершине параллелограмма, построенного на  $Om$  и  $Op'$ . Но стороны треугольника  $Omm''$  (черт. 43), соответственно, равны модулям количеств  $z$ ,  $z'$ ,  $z + z'$ . Отсюда следует, что *модуль суммы не больше суммы и не меньше разности модулей этих количеств*. Так как противоположные количества имеют общий модуль, то эта теорема верна также и для модуля разности. Наконец, тем же способом можно убедиться, что модуль суммы любого числа мнимых количеств не превосходит суммы их модулей, причем равенство имеет место только в том случае, если все точки, представляющие эти различные количества, лежат на одной полупрямой, выходящей из начала координат.



Черт. 43.

Если через точку  $m$  мы проведем прямые  $mx'$ ,  $my'$  параллельно осям  $Ox$  и  $Oy$ , то координаты точки  $m'$  в этой новой системе осей будут  $a' - a$  и  $b - b'$  (черт. 44). Следовательно, точка  $m'$  представляет в новой системе осей разность  $z' - z$ ; модуль разности  $z' - z$  равен длине  $mm'$ , а аргумент равен углу  $\theta$ , образуемому направлением  $mm'$  с направлением  $mx'$ . Проведем через точку  $O$  отрезок  $Om_1$ , равный и параллельный отрезку  $mm'$ ; конец  $m_1$  этого отрезка представляет разность  $z' - z$  в системе осей  $Ox$ ,  $Oy$ . Но фигура  $Omm'm_1$  есть параллелограмм; следовательно, точка  $m_1$  симметрична с точкою  $m$  относительно середины  $c$  отрезка  $Om'$ .



Черт. 44.

Приведем еще формулы для модуля и аргумента любого числа множителей. Пусть будут

$$z_k = \rho_k (\cos \omega_k + i \sin \omega_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

эти множители; применяя правило умножения вместе с формулами сложения тригонометрических функций, получим для произведения:

$$z_1 z_2 \dots z_n = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n [\cos (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) + i \sin (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)];$$

отсюда следует, что *модуль произведения равен произведению модулей и аргумент произведения равен сумме аргументов*. Отсюда легко получается известная формула Муавра (Moivre):

$$\cos m\omega + i \sin m\omega = (\cos \omega + i \sin \omega)^m,$$

закрывающая в сжатом виде все формулы умножения тригонометрических функций.

Введение мнимых символов позволило дать теории алгебраических уравнений совершенные общность и симметрию, и самые эти символы появились впервые в связи с уравнениями второй степени. Эти символы имеют не меньшую важность и в анализе, и мы прежде всего выясним с точностью, что следует понимать под словами: *функция мнимого переменного*.

**256. Непрерывные функции комплексного переменного.** Комплексное количество  $z = x + yi$ , где  $x$  и  $y$  — действительные независимые переменные, называется *комплексным переменным*. Если мы сохраним за словом функция его наиболее общий смысл, то естественно называть всякое другое мнимое количество  $u$ , значение которого зависит от значения  $z$ , *функцией* переменного  $z$ . Ряд данных в предыдущем определении непосредственно распространяется и на функции мнимого переменного. Так, функция  $u = f(z)$  называется *непрерывной*, если модуль разности  $f(z+h) - f(z)$  стремится к нулю при приближении модуля  $h$  к нулю, т. е. если можно найти для всякого положительного числа  $\epsilon$  такое другое положительное число  $\eta$ , чтобы было

$$|f(z+h) - f(z)| < \epsilon$$

всякий раз, когда  $|h|$  меньше числа  $\eta$ .

Ряд

$$u_0(z) + u_1(z) + \dots + u_n(z) + \dots,$$

все члены которого суть функции комплексного переменного  $z$ , называется *равномерно сходящимся* в области  $A$  плоскости, если для всякого положительного числа  $\epsilon$  можно найти такое целое число  $N$ , чтобы при всех значениях  $z$ , взятых в области  $A$ , было

$$|R_n| = |u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \dots| < \epsilon,$$

если  $n > N$ . Как и выше (т. I, § 30), можно доказать, что сумма ряда, равномерно сходящегося в области  $A$ , все члены которого суть в этой области непрерывные функции от  $z$ , сама есть функция переменного  $z$ , непрерывная в той же области; ряд будет равномерно сходящимся, если при всех рассматриваемых значениях переменного  $z$  модуль любого члена ряда  $|u_n|$  меньше соответствующего члена  $v_n$  сходящегося ряда, все члены которого суть постоянные положительные числа. В этом случае ряд  $u_0 + u_1 + \dots$  будет одновременно равномерно и абсолютно сходящимся.

Всякая непрерывная функция комплексного переменного  $z$  имеет вид  $u = P(x, y) + iQ(x, y)$ , где  $P$  и  $Q$  — действительные непрерывные функции действительных переменных  $x, y$ . Поэтому, если бы мы не прибавили к предыдущему определению никаких других условий, то изучение функций комплексного переменного  $z$  привелось бы, в сущности, к изучению системы двух функций двух действительных переменных, и введение символа  $i$  не дало бы никаких существенных упрощений. Чтобы теория функций комплексного переменного представляла некоторую аналогию с теорией функций действительного переменного, найдем, следуя Коши, каким условиям должны удовлетворять функции  $P$  и  $Q$ , чтобы выражение  $P + iQ$  обладало основным свойством

функций действительного переменного, к которым применимо исчисление бесконечно-малых.

**257. Моногенные функции.** Если  $f(x)$  есть функция действительного переменного  $x$ , имеющая производную, то отношение  $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$  при приближении  $h$  к нулю стремится к пределу  $f'(x)$ . Найдем также, в каких случаях частное

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\Delta P + i \Delta Q}{\Delta x + i \Delta y}$$

стремится к определенному пределу всякий раз, как модуль  $|\Delta z|$  стремится к нулю, т. е. всякий раз, как  $\Delta x$  и  $\Delta y$  отдельно стремятся к нулю. Легко предвидеть, что этого не будет, если функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  будут вполне произвольными, так как предел предыдущего отношения зависит, вообще, от предела  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , т. е. от того пути, по которому точка, представляющая значение количества  $z + \Delta z$ , стремится к точке, представляющей значение количества  $z$ .

Оставим сначала  $y$  постоянным и дадим  $x$  близкое значение  $x + \Delta x$ ; мы получим:

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{P(x + \Delta x, y) - P(x, y)}{\Delta x} + i \frac{Q(x + \Delta x, y) - Q(x, y)}{\Delta x}.$$

Чтобы это отношение имело предел, функции  $P$  и  $Q$  должны иметь частные производные по  $x$ ; тогда этот предел будет иметь выражение:

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Предположим затем, что  $x$  постоянно, и дадим  $y$  значение  $y + \Delta y$ ; мы получим:

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{P(x, y + \Delta y) - P(x, y)}{i \Delta y} + \frac{Q(x, y + \Delta y) - Q(x, y)}{\Delta y}.$$

Если функции  $P$  и  $Q$  имеют частные производные по  $y$ , то предел этого отношения равен

$$\frac{\partial Q}{\partial y} - i \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Чтобы пределы отношения  $\frac{\Delta u}{\Delta z}$  в обоих случаях были между собою равны, должно быть:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (1)$$

Предположим, что функции  $P$  и  $Q$  удовлетворяют этим условиям, и что частные производные  $\frac{\partial P}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y}$  непрерывны. Дадим те-

перь  $x$  и  $y$  какие-нибудь приращения  $\Delta x$  и  $\Delta y$ ; обозначая через  $\theta$  и  $\theta'$  положительные числа, меньшие единицы, получим:

$$\begin{aligned}\Delta P &= P(x + \Delta x, y + \Delta y) - P(x + \Delta x, y) + P(x + \Delta x, y) - P(x, y) = \\ &= \Delta y P'_y(x + \Delta x, y + \theta \Delta y) + \Delta x P'_x(x + \theta' \Delta x, y) = \\ &= \Delta x [P'_x(x, y) + \epsilon] + \Delta y [P'_y(x, y) + \epsilon_1],\end{aligned}$$

и точно так же

$$\Delta Q = \Delta x [Q'_x(x, y) + \epsilon'] + \Delta y [Q'_y(x, y) + \epsilon'_1],$$

где  $\epsilon$ ,  $\epsilon'$ ,  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon'_1$  бесконечно малы вместе с  $\Delta x$  и  $\Delta y$ . Принимая во внимание условия (1), мы можем представить приращение  $\Delta u = \Delta P + i \Delta Q$  в виде:

$$\begin{aligned}\Delta u &= \Delta x \left( \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \Delta y \left( -\frac{\partial Q}{\partial x} + i \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \eta \Delta x + \eta' \Delta y = \\ &= (\Delta x + i \Delta y) \left( \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \eta' \Delta x + \eta \Delta y,\end{aligned}$$

где  $\eta$ ,  $\eta'$  бесконечно малы. Отсюда имеем:

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\eta \Delta x + \eta' \Delta y}{\Delta x + i \Delta y},$$

причем, если  $|\eta|$  и  $|\eta'|$  меньше некоторого числа  $\alpha$ , то модуль дополнительного члена меньше  $2\alpha$ . Следовательно, при приближении  $\Delta x$  и  $\Delta y$  к нулю, этот член стремится к нулю, и мы имеем:

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Таким образом соотношения (1) представляют необходимые и достаточные условия того, чтобы отношение  $\frac{\Delta u}{\Delta z}$  имело единственный предел для каждого значения переменного  $z$  при условии непрерывности частных производных от функций  $P$  и  $Q$ . Такая функция  $u$  называется *моногенной*, или *аналитической*\*, функцией переменного  $z$ ; если мы обозначим ее через  $f(z)$ , то производная  $f'(z)$  будет равна любому из следующих выражений, которые для моногенных функций все между собою равнозначны:

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} - i \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (2)$$

Необходимо обратить внимание на то, что ни одна из функций  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  не может быть взята произвольно. В самом деле, предпо-

\* Словом *моногенная* функция часто пользовался Коши. Иногда употребляют также термин *синектическая* функция. Мы будем чаще пользоваться термином *аналитическая* функция; ниже мы увидим, что последнее определение вполне согласно с определением аналитических функций, которое было дано ранее (т. I, § 188).