Д.В. Клетеник

Сборник задач по аналитической геометрии

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Д11

Д.В. Клетеник

Д11 Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетеник – М.: Книга по Требованию, 2021. – 242 с.

ISBN 978-5-458-25969-9

В данном задачнике Клетеника собраны как задачи, так и теоретический материал по каждой из тем, изучаемых в курсе аналитической геометрии. Задачник содержит ответы и состоит из 2х частей. Первая часть состоит из задач по геометрии на плоскости. Вторая из задач по геометрии в пространстве.

ISBN 978-5-458-25969-9

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

ГЛАВА 1
ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Ось и отрезок оси. Координаты на прямой

Прямая, на которой выбрано положительное направление, называется осью. Отрезок оси, ограниченный какими-нибудь точками A и B, называется направленным, если сказано, какая из этих точек считается началом отрезка, какая — концом. Направленный отрезок с началом A и концом B обозначается символом $\overline{AB}$. Величиной направленного отрезка оси называется его длина, взятая со знаком плюс, если направление отрезка (т. е. направление от начала к концу) совпадает с положительным направлением оси, и со знаком минус, если это направление противоположно положительному направлению оси. Величина отрезка $\overline{AB}$ обозначается символом AB, его длина — символом $|AB|$. Если точки A и B совпадают, то, определяемый ими отрезок называется нулевым; очевидно, в этом случае $AB = BA = 0$ (направление нулевого отрезка следует считать неопределенным).

Пусть дана произвольная прямая a. Выберем некоторый отрезок в качестве единицы измерения длин, назначим на прямой a положительное направление (после чего она становится осью) *) и отметим на этой прямой буквой O какую-нибудь точку. Тем самым на прямой a будет введена система координат.

Координатой любой точки M прямой a (в установленной системе координат) называется число x, равное величине отрезка $\overline{OM}$:

$$x = OM.$$

Точка O называется началом координат; ее собственная координата равна нулю. В дальнейшем символ $M(x)$ означает, что точка M имеет координату x.

Если $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ — две произвольные точки прямой a, то формула

$$M_1M_2 = x_2 - x_1$$

выражает величину отрезка $\overline{M_1M_2}$, формула

$$|M_1M_2| = |x_2 - x_1|$$

выражает его длину.

*) Обычно на чертежах у горизонтальных осей положительным назначается направление слева направо.

1. Построить точки $A(3)$, $B(5)$, $C(-1)$, $D\left(\frac{2}{3}\right)$, $E\left(-\frac{3}{7}\right)$, $F(\sqrt{2})$, $H(-\sqrt{5})$.

2. Построить точки, координаты которых удовлетворяют уравнениям: 1) $|x|=2$; 2) $|x-1|=3$; 3) $|1-x|=2$; 4) $|2+x|=2$.

3. Охарактеризовать геометрически расположение точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам: 1) $x>2$; 2) $x-3\leqslant 0$; 3) $12-x<0$; 4) $2x-3\leqslant 0$; 5) $3x-5>0$; 6) $1<x<3$; 7) $-2\leqslant x\leqslant 3$; 8) $\frac{2-x}{x-1}>0$; 9) $\frac{2x-1}{x-2}>1$; 10) $\frac{2-x}{x-1}<0$; 11) $\frac{2x-1}{x-2}<1$; 12) $x^2-8x+15\leqslant 0$; 13) $x^2-8x+15>0$; 14) $x^2+x-12>0$; 15) $x^2+x-12\leqslant 0$.

4. Определить величину AB и длину $|AB|$ отрезка, заданного точками: 1) $A(3)$ и $B(11)$; 2) $A(5)$ и $B(2)$; 3) $A(-1)$ и $B(3)$; 4) $A(-5)$ и $B(-3)$; 5) $A(-1)$ и $B(-3)$; 6) $A(-7)$ и $B(-5)$.

5. Вычислить координату точки A, если известны: 1) $B(3)$ и $AB=5$; 2) $B(2)$ и $AB=-3$; 3) $B(-1)$ и $BA=2$; 4) $B(-5)$ и $BA=-3$; 5) $B(0)$ и $|AB|=2$; 6) $B(2)$ и $|AB|=3$; 7) $B(-1)$ и $|AB|=5$; 8) $B(-5)$ и $|AB|=2$.

6. Охарактеризовать геометрически расположение точек, координаты которых удовлетворяют следующим неравенствам:

1) $|x|<1$; 2) $|x|>2$; 3) $|x|\leqslant 2$; 4) $|x|\geqslant 3$; 5) $|x-2|<3$; 6) $|x-5|\leqslant 1$; 7) $|x-1|\geqslant 2$; 8) $|x-3|\geqslant 1$; 9) $|x+1|<3$; 10) $|x+2|>1$; 11) $|x+5|\leqslant 1$; 12) $|x+1|\geqslant 2$.

7. Определить отношение $\lambda=\frac{AC}{CB}$, в котором точка C делит отрезок $\overline{AB}$ при следующих данных: 1) $A(2)$, $B(6)$ и $C(4)$; 2) $A(2)$, $B(4)$ и $C(7)$; 3) $A(-1)$, $B(5)$ и $C(3)$; 4) $A(1)$, $B(13)$ и $C(5)$; 5) $A(5)$, $B(-2)$ и $C(-5)$.

8. Даны три точки $A(-7)$, $B(-1)$ и $C(1)$. Определить отношение λ, в котором каждая из них делит отрезок, ограниченный двумя другими.

9. Определить отношение $\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}$, в котором данная точка $M(x)$ делит отрезок $\overline{M_1M_2}$, ограниченный данными точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$.

10. Определить координату x точки M, делящей отрезок $\overline{M_1M_2}$, ограниченный данными точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ в данном отношении $\lambda \left(\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}\right)$.

11. Определить координату x середины отрезка, ограниченного двумя данными точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$.

12. Определить координату x середины отрезка, ограниченного двумя данными точками, в каждом из следующих случаев: 1) $A(3)$ и $B(5)$; 2) $C(-1)$ и $D(5)$; 3) $M_1(-1)$ и $M_2(-3)$; 4) $P_1(-5)$ и $P_2(1)$; 5) $Q_1(3)$ и $Q_2(-4)$.

13. Определить координату точки M, если известны:

1) $M_1(3)$, $M_2(7)$ и $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2} = 2$;

2) $A(2)$, $B(-5)$ и $\lambda = \frac{AM}{MB} = 3$;

3) $C(-1)$, $D(3)$ и $\lambda = \frac{CM}{MD} = \frac{1}{2}$;

4) $A(-1)$, $B(3)$ и $\lambda = \frac{AM}{MB} = -2$;

5) $A(1)$, $B(-3)$ и $\lambda = \frac{BM}{MA} = -3$;

6) $A(-2)$, $B(-1)$ и $\lambda = \frac{BM}{MA} = -\frac{1}{2}$.

14. Даны две точки $A(5)$ и $B(-3)$. Определить:

1) координату точки M, симметричной точке A относительно точки B;

2) координату точки N, симметричной точке B относительно точки A.

15. Отрезок, ограниченный точками $A(-2)$ и $B(19)$, разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.

16. Определить координаты концов A и B отрезка, который точками $P(-25)$ и $Q(-9)$ разделен на три равные части.

§ 2. Декартовы прямоугольные координаты на плоскости

Декартова прямоугольная система координат определяется заданием линейной единицы для измерения длин и двух взаимно перпендикулярных осей, занумерованных в каком-нибудь порядке.

Точка пересечения осей называется началом координат, а сами оси — координатными осями. Первая из координатных осей называется осью абсцисс, а вторая — осью ординат.

Начало координат обозначается буквой O, ось абсцисс — символом Ox, ось ординат — символом Oy.

Координатами произвольной точки M в заданной системе называют числа

$$x = OM_x, \quad y = OM_y$$

(рис. 1), где M_x и M_y суть проекции точки M на оси Ox и Oy, OM_x обозначает величину отрезка $\overline{OM_x}$ оси абсцисс, OM_y — величину отрезка $\overline{OM_y}$ оси ординат. Число x называется абсциссой точки M, число y называется ординатой этой же точки. Символ $M(x; y)$ обозначает, что точка M имеет абсциссой число x, а ординатой число y.

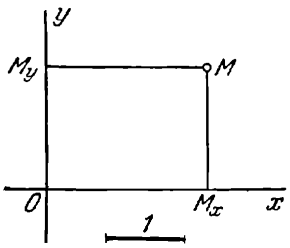

Рис. 1.

Ось Oy разделяет всю плоскость на две полуплоскости; та из них, которая расположена в положительном направлении оси Ox, называется правой, другая — левой. Точно так же ось Ox разделяет плоскость на две полуплоскости; та из них, которая расположена в положительном направлении оси Oy, называется верхней, другая нижней.

Обе координатные оси вместе разделяют плоскость на четыре четверти, которые нумеруют по следующему правилу: первой координатной четвертью называется та, которая лежит одновременно в правой и в верхней полуплоскости, второй — лежащая в левой и в верхней полуплоскости, третьей — лежащая в левой и в нижней полуплоскости, четвертой — лежащая в правой и в нижней полуплоскости.

17. Построить точки $A(2; 3)$, $B(-5; 1)$, $C(-2; -3)$, $D(0; 3)$, $E(-5; 0)$, $F\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

18. Найти координаты проекций на ось абсцисс точек $A(2; -3)$, $B(3; -1)$, $C(-5; 1)$, $D(-3; -2)$, $E(-5; -1)$.

19. Найти координаты проекций на ось ординат точек $A(-3; 2)$, $B(-5; 1)$, $C(3; -2)$, $D(-1; 1)$, $E(-6; -2)$.

20. Найти координаты точек, симметричных относительно оси Ox точкам: 1) $A(2; 3)$; 2) $B(-3; 2)$; 3) $C(-1; -1)$; 4) $D(-3; -5)$; 5) $E(-4; 6)$; 6) $F(a; b)$.

21. Найти координаты точек, симметричных относительно оси Oy точкам: 1) $A(-1; 2)$; 2) $B(3; -1)$; 3) $C(-2; -2)$; 4) $D(-2; 5)$; 5) $E(3; -5)$; 6) $F(a; b)$.

22. Найти координаты точек, симметричных относительно начала координат точкам: 1) $A(3; 3)$; 2) $B(2; -4)$; 3) $C(-2; 1)$; 4) $D(5; -3)$; 5) $E(-5; -4)$; 6) $F(a; b)$.

23. Найти координаты точек, симметричных относительно биссектрисы первого координатного угла точкам: 1) $A(2; 3)$; 2) $B(5; -2)$; 3) $C(-3; 4)$.

24. Найти координаты точек, симметричных относительно биссектрисы второго координатного угла точкам: 1) $A(3; 5)$, 2) $B(-4; 3)$; 3) $C(7; -2)$.

25. Определить, в каких четвертях может быть расположена точка $M(x; y)$, если: 1) $xy > 0$; 2) $xy < 0$; 3) $x-y=0$; 4) $x+y=0$; 5) $x+y>0$; 6) $x+y<0$; 7) $x-y>0$; 8) $x-y<0$.

§ 3. Полярные координаты

Полярная система координат определяется заданием некоторой точки O, называемой полюсом, луча OA, исходящего из этой точки, называемого полярной осью, и масштаба для измерения длин. Кроме того, при задании полярной системы должно быть сказано, какие повороты вокруг точки O считаются положительными (на чертежах обычно положительными считаются повороты против часовой стрелки).

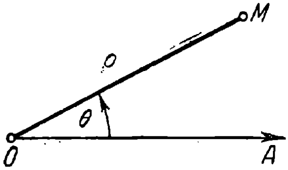

Рис. 2.

Полярными координатами произвольной точки M (относительно заданной системы) называются числа $\rho = OM$ и $\theta = \measuredangle AOM$ (рис. 2). Угол θ при этом следует понимать так, как принято в тригонометрии. Число ρ называется первой координатой, или полярным радиусом, число θ — второй координатой, или полярным углом точки M (θ называют также амплитудой) *).

Символ $M(\rho; \theta)$ обозначает, что точка M имеет полярные координаты ρ и θ.

Полярный угол θ имеет бесконечно много возможных значений (отличающихся друг от друга на величину вида $\pm 2n\pi$, где n — целое положительное число). Значение полярного угла, удовлетворяющее неравенствам $-\pi < \theta \leqslant +\pi$, называется главным.

В случаях одновременного рассмотрения декартовой и полярной систем координат условимся: 1) пользоваться одним и тем же масштабом, 2) при определении полярных углов считать положительными повороты в том направлении, в каком следует вращать положительную полуось абсцисс, чтобы кратчайшим путем совместить ее с положительной полуосью ординат (таким образом, если оси декартовой системы находятся в обычном расположении, т. е. ось Ox направлена вправо, а ось Oy — вверх, то и отсчет полярных

*) Здесь OM обозначает длину отрезка, понимаемую как в элементарной геометрии (т. е. абсолютно, без учета знака). Употреблять более громоздкий символ $|OM|$ в данном случае нет надобности, поскольку точки O и M рассматриваются как произвольные точки плоскости, а не как точки некоторой оси. Подобное упрощение символики в аналогичных случаях часто делается и дальше.

углов должен быть обычным, т. е. положительными следует считать те углы, которые отсчитываются против часовой стрелки).

При этом условии, если полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс, то переход от полярных координат произвольной точки к декартовым координатам той же точки осуществляется по формулам

$$x=\rho\cos\theta, \quad y=\rho\sin\theta.$$

В этом же случае формулы

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}$$

являются формулами перехода от декартовых координат к полярным.

При одновременном рассмотрении в дальнейшем двух полярных систем координат условимся считать направление положительных поворотов и масштаб для обеих систем одинаковыми.

26. Построить точки, заданные полярными координатами: $A\left(3;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $B(2;\ \pi)$, $C\left(3;\ -\frac{\pi}{4}\right)$, $D\left(4;\ 3\frac{1}{7}\right)$, $E(5;\ 2)$ и $F(1;\ -1)$ (для точек D, E и F выполнить построение приближенно, пользуясь транспортиром).

27. Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полярной оси точкам $M_1\left(3;\ \frac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(2;\ -\frac{\pi}{2}\right)$, $M_3\left(3;\ -\frac{\pi}{3}\right)$, $M_4(1;\ 2)$ и $M_5(5;\ -1)$, заданным в полярной системе координат.

28. Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полюса точкам $M_1\left(1;\ \frac{\pi}{4}\right)$, $M_2\left(5;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $M_3\left(2;\ -\frac{\pi}{3}\right)$, $M_4\left(4;\ \frac{5}{6}\pi\right)$ и $M_5(3;\ -2)$, заданным в полярной системе координат.

29. В полярной системе координат даны две вершины $A\left(3;\ -\frac{4}{9}\pi\right)$ и $B\left(5;\ \frac{3}{14}\pi\right)$ параллелограмма $ABCD$, точка пересечения диагоналей которого совпадает с полюсом. Определить две другие вершины этого параллелограмма.

30. В полярной системе координат даны точки $A\left(8;\ -\frac{2}{3}\pi\right)$ и $B\left(6;\ \frac{\pi}{3}\right)$. Вычислить полярные координаты середины отрезка, соединяющего точки A и B.

31. В полярной системе координат даны точки $A\left(3;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(2;\ -\frac{\pi}{4}\right)$, $C(1;\ \pi)$, $D\left(5;\ -\frac{3}{4}\pi\right)$, $E(3;\ 2)$ и

$F(2; -1)$. Положительное направление полярной оси изменено на противоположное. Определить полярные координаты заданных точек в новой системе.

32. В полярной системе координат даны точки $M_1\left(3; \frac{\pi}{3}\right)$, $M_2\left(1; \frac{2}{3}\pi\right)$, $M_3(2; 0)$, $M_4\left(5; \frac{\pi}{4}\right)$, $M_5\left(3; -\frac{2}{3}\pi\right)$ и $M_6\left(1; \frac{11}{12}\pi\right)$. Полярная ось повернута так, что в новом положении она проходит через точку M_1. Определить координаты заданных точек в новой (полярной) системе.

33. В полярной системе координат даны точки $M_1\left(12; \frac{4}{9}\pi\right)$ и $M_2\left(12; -\frac{2}{9}\pi\right)$. Вычислить полярные координаты середины отрезка, соединяющего точки M_1 и M_2.

34. В полярной системе координат даны точки $M_1(\rho_1; \theta_1)$ и $M_2(\rho_2; \theta_2)$. Вычислить расстояние d между ними.

35. В полярной системе координат даны точки $M_1\left(5; \frac{\pi}{4}\right)$ и $M_2\left(8; -\frac{\pi}{12}\right)$. Вычислить расстояние d между ними.

36. В полярной системе координат даны две смежные вершины квадрата $M_1\left(12; -\frac{\pi}{10}\right)$ и $M_2\left(3; \frac{\pi}{15}\right)$. Определить его площадь.

37. В полярной системе координат даны две противоположные вершины квадрата $P\left(6; -\frac{7}{12}\pi\right)$ и $Q\left(4; \frac{1}{6}\pi\right)$. Определить его площадь.

38. В полярной системе координат даны две вершины правильного треугольника $A\left(4; -\frac{1}{12}\pi\right)$ и $B\left(8; \frac{7}{12}\pi\right)$. Определить его площадь.

39. Одна из вершин треугольника OAB находится в полюсе, две другие суть точки $A(\rho_1; \theta_1)$ и $B(\rho_2; \theta_2)$. Вычислить площадь этого треугольника.

40. Одна из вершин треугольника OAB находится в полюсе O, две другие суть точки $A\left(5; \frac{\pi}{4}\right)$ и $B\left(4; \frac{\pi}{12}\right)$. Вычислить площадь этого треугольника.

41. Вычислить площадь треугольника, вершины которого $A\left(3; \frac{1}{8}\pi\right)$, $B\left(8; \frac{7}{24}\pi\right)$ и $C\left(6; \frac{5}{8}\pi\right)$ заданы в полярных координатах.

42. Полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс. В полярной системе координат даны точки $M_1\left(6; \frac{\pi}{2}\right)$, $M_2(5; 0)$, $M_3\left(2; \frac{\pi}{4}\right)$, $M_4\left(10; -\frac{\pi}{3}\right)$, $M_5\left(8; \frac{2}{3}\pi\right)$, $M_6\left(12; -\frac{\pi}{6}\right)$. Определить декартовы координаты этих точек.

43. Полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс. В декартовой прямоугольной системе координат даны точки $M_1(0; 5)$, $M_2(-3; 0)$, $M_3(\sqrt{3}; 1)$, $M_4(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $M_5(1; -\sqrt{3})$. Определить полярные координаты этих точек.

§ 4. Направленный отрезок. Проекция отрезка на произвольную ось. Проекции отрезка на оси координат. Длина и полярный угол отрезка. Расстояние между двумя точками

Прямолинейный отрезок называется направленным, если указано, какая из ограничивающих его точек считается началом, какая — концом. Направленный отрезок, имеющий точку A своим началом и точку B концом (рис. 3), обозначается символом $\overline{AB}$ (т. е. так же, как отрезок оси; см. § 1). Длина направленного отрезка $\overline{AB}$ (при заданном масштабе) обозначается символом $|\overline{AB}|$ (или AB; см. сноску на стр. 13).

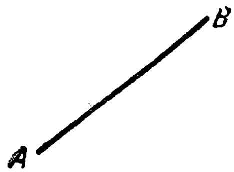

Рис. 3.

Проекцией отрезка $\overline{AB}$ на ось u называется число, равное величине отрезка $\overline{A_1B_1}$ оси u, где точка A_1 является проекцией на ось u точки A, а B_1 — проекцией на эту же ось точки B.

Проекция отрезка $\overline{AB}$ на ось u обозначается символом $\text{пр}_u\, \overline{AB}$. Если на плоскости задана система декартовых прямоугольных координат, то проекция отрезка на ось Ox обозначается символом X, его проекция на ось Oy — символом Y.

Если известны координаты точек $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, то проекции X и Y на оси координат направленного отрезка $\overline{M_1M_2}$ могут быть вычислены по формулам

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1.$$

Таким образом, чтобы найти проекции направленного отрезка на оси координат нужно от координат его конца отнять соответствующие координаты начала.

Угол θ, на который нужно повернуть положительную полуось Ox так, чтобы ее направление совпало с направлением отрезка $\overline{M_1M_2}$, называется полярным углом отрезка $\overline{M_1M_2}$.

Угол θ понимается, как в тригонометрии. Соответственно этому θ имеет бесконечно много возможных значений, которые отличаются друг от друга на величину вида $\pm 2n\pi$ (где n — целое положительное число). Главным значением полярного угла называется то из его значений, которое удовлетворяет неравенствам $-\pi < \theta \leqslant +\pi$.

Формулы

$$X = d \cdot \cos\theta, \quad Y = d \cdot \sin\theta$$

выражают проекции произвольного отрезка на координатные оси через его длину и полярный угол. Отсюда же вытекают формулы

$$d = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \cos\theta = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}},$$

которые выражают длину и полярный угол отрезка через его проекции на оси координат.

Если на плоскости даны две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, то расстояние d между ними определяется формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

44. Вычислить проекцию отрезка на ось u, если даны его длина d и угол φ наклона к оси: 1) $d = 6$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$; 2) $d = 6$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$; 3) $d = 7$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$; 4) $d = 5$, $\varphi = 0$; 5) $d = 5$, $\varphi = \pi$; 6) $d = 4$, $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

45. Построить на чертеже отрезки, исходящие из начала координат, зная их проекции на координатные оси: 1) $X = 3$, $Y = 2$; 2) $X = 2$, $Y = -5$; 3) $X = -5$, $Y = 0$; 4) $X = -2$, $Y = 3$; 5) $X = 0$, $Y = 3$; 6) $X = -5$, $Y = -1$.

46. Построить на чертеже отрезки, имеющие началом точку $M(2; -1)$, зная их проекции на координатные оси: 1) $X = 4$, $Y = 3$; 2) $X = 2$, $Y = 0$; 3) $X = -3$, $Y = 1$; 4) $X = -4$, $Y = -2$; 5) $X = 0$, $Y = -3$; 6) $X = 1$, $Y = -3$.

47. Даны точки $M_1(1; -2)$, $M_2(2; 1)$, $M_3(5; 0)$, $M_4(-1; 4)$ и $M_5(0; -3)$. Найти проекции на координатные оси следующих отрезков: 1) $\overline{M_1M_2}$, 2) $\overline{M_3M_1}$, 3) $\overline{M_4M_5}$, 4) $\overline{M_5M_3}$.

48. Даны проекции отрезка $\overline{M_1M_2}$ на оси координат $X = 5$, $Y = -4$; зная, что его начало в точке $M_1(-2; 3)$, найти координаты его конца.

49. Даны проекции отрезка $\overline{AB}$ на оси координат $X=4$, $Y=-5$; зная, что его конец в точке $B(1; -3)$, найти координаты его начала.

50. Построить на чертеже отрезки, исходящие из начала координат, зная длину d и полярный угол θ каждого из них: 1) $d=5$, $\theta=\frac{\pi}{5}$; 2) $d=3$, $\theta=\frac{5}{6}\pi$; 3) $d=4$, $\theta=-\frac{\pi}{3}$; 4) $d=3$, $\theta=-\frac{4}{3}\pi$.

51. Построить на чертеже отрезки, имеющие началом точку $M(2; 3)$, зная длину и полярный угол каждого из них: 1) $d=2$, $\theta=-\frac{\pi}{10}$; 2) $d=1$, $\theta=\frac{\pi}{9}$; 3) $d=5$, $\theta=-\frac{\pi}{2}$ (координаты точки M — декартовы).

52. Вычислить проекции на координатные оси отрезков, зная длину d и полярный угол θ каждого из них: 1) $d=12$, $\theta=\frac{2}{3}\pi$; 2) $d=6$, $\theta=-\frac{\pi}{6}$; 3) $d=2$, $\theta=-\frac{\pi}{4}$.

53. Даны проекции отрезков на координатные оси: 1) $X=3$, $Y=-4$; 2) $X=12$, $Y=5$; 3) $X=-8$, $Y=6$. Вычислить длину каждого из них.

54. Даны проекции отрезков на координатные оси: 1) $X=1$, $Y=\sqrt{3}$; 2) $X=3\sqrt{2}$, $Y=-3\sqrt{2}$; 3) $X=-2\sqrt{3}$, $Y=2$. Вычислить длину d и полярный угол θ каждого из них.

55. Даны точки $M_1(2; -3)$, $M_2(1; -4)$, $M_3(-1; -7)$ и $M_4(-4; 8)$. Вычислить длину и полярный угол следующих отрезков: 1) $\overline{M_1M_2}$, 2) $\overline{M_1M_3}$, 3) $\overline{M_2M_4}$, 4) $\overline{M_4M_3}$.

56. Длина d отрезка равна 5, его проекция на ось абсцисс равна 4. Найти проекцию этого отрезка на ось ординат при условии, что он образует с осью ординат: 1) острый угол, 2) тупой угол.

57. Длина отрезка $\overline{MN}$ равна 13; его начало в точке $M(3; -2)$, проекция на ось абсцисс равна -12. Найти координаты конца этого отрезка при условии, что он образует с осью ординат: 1) острый угол, 2) тупой угол.