

М. Шаль

**Исторический обзор
происхождения и развития
геометрических методов**

Том I. История геометрии

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
М11

М11 **М. Шаль**
Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов: Том
I. История геометрии / М. Шаль – М.: Книга по Требованию, 2019. – 311 с.

ISBN 978-5-458-28523-0

ISBN 978-5-458-28523-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2019

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2019

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ИСТОРИЯ ГЕОМЕТРИИ.

Въ этомъ сочиненіи мы намѣрены изложить краткое обзорѣніе важнѣйшихъ открытій, благодаря которымъ чистая геометрія достигла своего современнаго развитія, и преимущественно тѣхъ изъ нихъ, которыми были подготовлены новѣйшіе методы.

Ниже будетъ указано, какіе изъ этихъ методовъ находятся, по нашему мнѣнію, въ ближайшей связи съ многочисленными новыми теоремами, обогатившими науку въ послѣднее время.

Въ концѣ мы разъясняемъ сущность и философскій характеръ двухъ основныхъ геометрическихъ принциповъ, составляющихъ главный предметъ нашихъ мемуаровъ.

Мы раздѣлили исторію геометріи на пять эпохъ. Читатель по прочтеніи книги можетъ судить, оправдывается ли это раздѣленіе тѣми особыми чертами, которыя мы признали отличительными для каждой эпохи.

Къ этому историческому обзору прибавлены многія примѣчанія. Одни изъ нихъ назначены для болѣе подробнаго развитія такихъ вопросовъ, о которыхъ въ самомъ изложеніи говорится только вкратцѣ; другія заключаютъ въ себѣ нѣкоторые историческія подробности, помѣщать которыя на ряду съ важнѣйшими фактами казалось намъ неудобнымъ, такъ какъ ихъ объемъ могъ бы затруднять чтеніе; наконецъ многія изъ примѣчаній суть плоды нашихъ собственныхъ изслѣдованій о различныхъ предметахъ, относящихся къ разсматриваемымъ здѣсь геометрическимъ теоріямъ; эти примѣчанія представляютъ можетъ быть нѣкоторые новые результаты.

Ихъ не было бы необходимости помѣщать здѣсь, еслибы въ этомъ трудѣ мы имѣли въ виду только одну историческую цѣль. Но, говоря о развитіи геометріи и описывая открытія и новыя

ученія, возникающія въ ней, мы главнымъ образомъ желали на нѣкоторыхъ примѣрахъ показать, что характеръ этихъ новыхъ ученій состоитъ въ стремленіи вносить новыя упрощенія во всѣ части науки о протяженіи и новыя средства для достиженія одного, до сихъ поръ еще неизвѣстнаго, обобщенія всѣхъ геометрическихъ истинъ; это же стремленіе было свойственно и анализу, когда онъ прилагался къ геометріи. Изъ нашего обзора мы заключаемъ, что могущественные приемы, приобрѣтенные геометріею въ послѣднія тридцать лѣтъ, во многихъ отношеніяхъ могутъ сравниться съ аналитическими способами и что они отнынѣ могутъ соперничать съ ними въ весьма многочисленныхъ вопросахъ нашей науки.

Эта мысль будетъ повторена —мы желали бы сказать подтверждена—во многихъ мѣстахъ, потому что ею собственно и вызвано самое сочиненіе и она постоянно руководила насъ при долгихъ изысканіяхъ, которыя были необходимы и для исторической части, и для примѣчаній, и для двухъ мемуаровъ.

Но чтобы устранить всякое несправедливое толкованіе нашихъ намѣреній и мнѣній относительно обоихъ методовъ, присущихъ математическимъ наукамъ, мы спѣшимъ заявить, что наше удивленіе къ современному могуществу аналитическаго способа не имѣетъ границъ и что мы не во всѣхъ вопросахъ ставимъ на ряду съ нимъ способъ геометрический. Но мы убѣждены, что при изысканіи математическихъ истинъ не можетъ быть избытка въ средствахъ изслѣдованія; всѣ истины могутъ сдѣлаться одинаково простыми и наглядными, если только мы найдемъ къ нимъ прямой, свойственный имъ и естественный путь; вотъ почему мы считали не бесполезнымъ, насколько намъ это позволяли наши слабыя средства, показать, что приемы чистой геометріи очень часто и во множествѣ вопросовъ представляютъ именно этотъ простой и естественный путь, проникающій въ самую сущность истинъ; обнаруживающій таинственныя связи, соединяющія ихъ между собою,—путь, ведущій къ самому ясному и полному пониманію ихъ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

ПЕРВАЯ ЭПОХА.

1. Геометрія получила начало у Халдеевъ и Египтянъ.

Финикіянинъ **Θалесъ** (639-548 до Р. Х.) ѣздилъ учиться въ Египетъ и, поселившись потомъ въ Милетъ, основалъ Іонійскую школу, въ которой образовались греческіе философы и началось первое развитіе геометріи.

Πυθαгоръ Самосскій (род. 580 до Р. Х.), ученикъ Θалеса, подобно ему, сперва отправился въ Египетъ, а потомъ въ Индію; возвратившись въ Италію, онъ основалъ здѣсь свою школу, которая сдѣлалась гораздо знаменитѣе той, изъ которой онъ произошелъ самъ. Этому философу, сдѣлавшему изъ геометріи часть своей философіи, и его ученикамъ преимущественно принадлежатъ первыя открытія въ геометріи; самыя важныя изъ нихъ: теорія *несоизмѣримости* нѣкоторыхъ линій, напр. діагонали квадрата съ его стороною, и теорія *правильныхъ тѣлъ*. Впрочемъ первые успѣхи науки о протяженіи состояли только изъ нѣсколькихъ простѣйшихъ предложеній о прямой линіи и кругѣ. Между ними наиболѣе замѣчательны: теорема о *квадратѣ гипотенузы* прямоугольнаго треугольника (за открытіе которой, по сказанію исторіи, или басни, **Πυθαгоръ** принесть въ жертву гекатомбу) и то свойство круга и шара, что они изъ всѣхъ фигуръ одинаковаго периметра или одинаковой поверхности суть *наиболѣешія*; эта послѣдняя теорема содержитъ въ себѣ первый зачатокъ ученія объ *изопериметрахъ*.

2. Геометрія оставалась въ такомъ ограниченномъ видѣ до основанія Платоновой школы, которое было эпохою болѣе важныхъ открытій.

Платонъ (430-347 д. Р. Х.). Чтобы изъучить математику, Платонъ, подобно своимъ предшественникамъ, отправился сперва въ египетскимъ жрецамъ, а потомъ въ Италію къ *пифагорейцамъ*. Возвратившись въ Аѣны, онъ сталъ во главѣ новой школы и ввелъ

въ геометрію *аналитическій методъ* ¹⁾, *коническія сѣченія* и ученіе о *геометрическихъ мѣстахъ*. Эти замѣчательныя открытія сдѣлали изъ геометріи какъ бы новую науку въ сравненіи съ существовавшей до этихъ поръ элементарной геометріей, науку высшую, которая учениками Платона названа была *трансцендентною геометріей*.

Съ этого времени стали прилагать съ замѣчательнымъ искусствомъ ученіе о геометрическихъ мѣстахъ ²⁾ къ рѣшенію знаменитыхъ задачъ объ *удвоеніи куба*, о *двухъ среднихъ пропорціональныхъ* и о *дѣленіи угла на три равныя части*.

Первая изъ этихъ задачъ, извѣстная по своей трудности и по своему баснословному происхожденію, занимала геометровъ еще прежде этого времени.

Гиппократъ Хиосскій (около 450 до Р. Х.), достаточно извѣстный квадратурою своихъ *луночекъ*, привелъ задачу о удвоеніи куба къ нахожденію двухъ среднихъ пропорціональныхъ между стороною

¹⁾ Вьетъ, въ началѣ своего сочиненія *Isagoge in artem analyticem*, даетъ слѣдующее объясненіе анализа и синтеза, вполне характеризующее оба эти метода древнихъ: «Въ математикѣ существуетъ способъ изслѣдованія истины, изобрѣтеніе котораго приписывается Платону; Теонъ называлъ его анализомъ и опредѣлялъ слѣдующимъ образомъ: мы разсматриваемъ искомое, какъ извѣстное, и переходимъ отъ слѣдствія къ слѣдствію до тѣхъ поръ, пока не убѣдимся въ истинѣ искомага. Синтезъ же состоитъ въ томъ, что, исходя отъ извѣстнаго, мы, путемъ отъ слѣдствія къ слѣдствію, приходимъ къ открытію искомага.»

²⁾ Мѣстомъ въ геометріи называется послѣдовательность точекъ, изъ которыхъ каждая рѣшаетъ предложенную задачу, или каждая обладаетъ извѣстнымъ свойствомъ, не принадлежащимъ никакой точкѣ, взятой вѣ этого мѣста. Древніе подраздѣляли геометрическія мѣста на различныя роды. Они называли прямую линію и кругъ плоскими мѣстами, потому что ихъ прямо чертили на плоскости; тѣлесными мѣстами назывались коническія сѣченія, потому что они получались на тѣлѣ (конусѣ); наконецъ линейными мѣстами назывались всѣ кривыя высшихъ порядковъ, какъ конхоиды, циссоиды, спирали и квадратриксы. Мѣстною теоремою называлась такая теорема, въ которой доказывалось, что послѣдовательность точекъ прямой или кривой линіи удовлетворяетъ даннымъ условіямъ вопроса, и мѣстною задачею, — задача, въ которой требовалось найти послѣдовательность точекъ, удовлетворяющихъ даннымъ условіямъ.

даннаго куба и удвоенною стороною его; по всей вѣроятности, это и было поводомъ къ общей задачѣ о двухъ среднихъ пропорціональныхъ. Эта послѣдняя задача была рѣшена весьма различными способами, которые всѣ дѣлаютъ честь геометрамъ древняго міра. Первое рѣшеніе принадлежитъ Платону, который для этого изобрѣлъ особый снарядъ, состоявшій изъ прямого угла, на одной сторонѣ котораго двигалась прямая, оставаясь параллельною другой сторонѣ: безспорно это былъ первый примѣръ механическаго рѣшенія геометрической задачи.

Менехмъ, ученикъ Платона, пользовался для той же цѣли *геометрическими мѣстами*: двумя параболами, оси которыхъ взаимно перпендикулярны, а также параболою и гиперболою между асимптотами.

Евдоксъ, другой ученикъ и другъ Платона, прилагалъ другія кривыя, нарочно для этой цѣли изобрѣтенныя имъ; къ сожалѣнію, его рѣшеніе не дошло до насъ и мы даже не знаемъ, какія это были кривыя.

Рѣшеніе знаменитаго пифагорейца **Архитаса**, чтенія котораго слушалъ Платонъ въ Италіи, было чисто умозрительное. Оно замѣчательно тѣмъ, что основывалось на употребленіи *кривой двоякой кривизны*; это была первая кривая такого рода, разсмотрѣнная геометриями; по крайней мѣрѣ она самая древняя изъ извѣстныхъ намъ ³⁾.

³⁾ Образованіе этой кривой слѣдующее: «На діаметрѣ основанія прямого круглаго цилиндра вообразимъ себѣ описанный полукругъ, плоскость котораго перпендикулярна къ плоскости основанія цилиндра; будемъ вращать діаметръ вмѣстѣ съ описаннымъ на немъ полукругомъ около одного изъ концовъ, оставляя плоскость полукруга по прежнему перпендикулярной къ основанію; этотъ полукругъ во всякомъ положеніи будетъ пересѣкать поверхность цилиндра въ одной точкѣ; послѣдовательность такихъ точекъ и образуетъ кривую двоякой кривизны, о которой идетъ рѣчь».

Чтобы рѣшить задачу о двухъ среднихъ пропорціональныхъ, Архитасъ пересѣкаетъ эту кривую круглымъ конусомъ, ось вращенія котораго есть образующая цилиндра, проходящая черезъ неподвижный конецъ вращающагося діаметра: точка пересѣченія доставляетъ искомое рѣшеніе.

Четыре приведенныя здѣсь рѣшенія задачи о двухъ среднихъ пропорціональныхъ, какъ мы видимъ, существенно различны между собою. Та же задача и послѣ того въ теченіе многихъ вѣковъ занимала геометровъ и потому число рѣшеній ея значительно увеличилось. Евтоцій, математикъ шестаго столѣтія по Р. Х., въ своемъ комментаріи ко второй книгѣ *о шарѣ и цилиндрѣ* Архимеда, приводитъ рѣшенія Эратосѣена, Аполлонія, Никомеда, Герона, Филона, Паппа, Диоклеса и Спора. О всѣхъ этихъ математикахъ мы упомянемъ далѣе въ хронологическомъ порядкѣ.

3. Превосходные методы, указаные Платономъ и учениками его, ревностно разрабатывались ихъ послѣдователями и были предметомъ многихъ замѣчательныхъ сочиненій, въ которыхъ развиты были главнѣйшія свойства коническихъ сѣченій, этихъ знаменитыхъ кривыхъ линій, которымъ 2000 лѣтъ спустя пришлось играть такую важную роль въ небесной механикѣ, когда Кеплеръ узналъ въ нихъ истинные пути, описываемые планетами и спутниками, и Ньютонъ въ ихъ фокусахъ открылъ средоточіе силы, приводящей въ движеніе всѣ тѣла вселенной.

Важнѣйшимъ изъ такихъ сочиненій было сочиненіе **Аристееа** (около 450 до Р. Х.), которое состояло изъ пяти книгъ о коническихъ сѣченіяхъ и о которомъ древніе отзываются съ необыкновенною похвалою. Къ сожалѣнію оно не дошло до насъ, также какъ пять книгъ *«о тѣлесныхъ мѣстахъ»* того же геометра ⁴⁾.

4. Къ тому же почти времени относится открытіе *квадратриксъ* **Динострата**. Главное свойство этой кривой даетъ способъ дѣ-

⁴⁾ Пять книгъ *«о тѣлесныхъ мѣстахъ»*, о которыхъ говоритъ Паппъ въ седьмой книгѣ его *«Математическаго Собранія»* (*Collectiones mathematicae*) были по этому указанію восстановлены Вивіани совершенно въ духѣ древней геометріи подъ заглавіемъ: *De locis solidis secunda divinatio geometrica in quinque libros injuria temporum amissos Aristaei senioris geometricae auctore Vincentio Viviani* и т. д. (in folio, Флоренція, 1701 г.) Еще въ 1659 году Вивіани восстановилъ пятую книгу коническихъ сѣченій Аполлонія, которая вмѣстѣ съ 6-ю и 7-ю книгами была найдена Борелли въ то самое время, когда Вивіани оканчивалъ свой трудъ; до этого же времени были извѣстны только четыре первыя книги.

лить уголъ на нѣсколько частей, пропорціональныхъ даннымъ линіямъ, и вѣроятно она была изобрѣтена для рѣшенія возбужденной въ Платоновой школѣ задачи о дѣленіи угла на три равныя части. Еслибы эта кривая могла быть построена геометрически, то ею рѣшалась бы также задача о квадратурѣ круга; вслѣдствіе этого она и получила отъ древнихъ свое названіе—квадратрикса. Паппъ предполагаетъ, что это свойство кривой было открыто Диностратомъ, братомъ Менехма, отчего новые геометры и назвали ее квадратриксою Динострата. Но изъ двухъ мѣстъ Прокла³⁾ можно кажется заключить, что кривую эту открылъ и обнаружилъ ея свойства Гиппій, геометръ и философъ, жившій во время Платона⁶⁾.

5. Къ этой же первой эпохѣ развитія геометріи должно отнести **Персея**, который приобрѣлъ извѣстность открытіемъ *улиткообразныхъ линій* (*lignes spiriques*). Онъ получалъ эти кривыя, пересѣкая различнымъ плоскостями кольцообразную поверхность (*torus*), образуемую вращеніемъ круга около неподвижной оси, лежащей въ той же плоскости.

Объ этомъ предметѣ осталось только одно указаніе Прокла въ его комментаріи къ первой книгѣ Евклида⁷⁾, гдѣ онъ ясно описываетъ образованіе этихъ кривыхъ на кольцообразной поверхности и открытіе ихъ приписываетъ Персею. Спустя нѣсколько строкъ

³⁾ Смори 9-ю теорему 3-ей книги и начало 4-й книги комментаріевъ Прокла къ первой книгѣ Евклида.

⁶⁾ Леотодъ, математикъ 17-го столѣтія, хорошо знакомый съ геометриєю древнихъ, издалъ особое сочиненіе объ этой кривой, въ которомъ онъ обнаруживаетъ множество любопытныхъ ея свойствъ, оправдывающихъ заглавіе этого сочиненія: *Liber in quo mirabiles quadratricis facultates variae exponuntur*. Авторъ сравниваетъ квадратриксу съ спиралью Архимеда и съ параболой, прилагаетъ ее къ опредѣленію центровъ тяжести, открываетъ ея безконечныя вѣтви и пр. Иванъ Бернуллі также открылъ нѣсколько свойствъ этой кривой (См. Томъ I, стр. 447 его сочиненій и Томъ II, стр. 176 и 179 его переписки съ Лейбницемъ).

⁷⁾ Къ четвертому опредѣленію Евклида. Проклъ говоритъ объ улиткообразныхъ линіяхъ еще въ комментаріи къ 7-му опредѣленію и въ началѣ своей 4-й книги, гдѣ онъ опять называетъ эти линіи—улиткообразными Персея.

онъ прибавляетъ, что Геминъ также писалъ объ улиткообразныхъ, и это замѣчаніе очень важно: оно доказываетъ, что Персей жилъ раньше Гемина, о которомъ извѣстно, что онъ существовалъ около времени Гиппарха въ двухъ первыхъ столѣтіяхъ до Р. Х. Очень жаль, что сочиненія Персея и Гемина не дошли до насъ; было бы интересно узнать ихъ геометрическую теорію улиткообразныхъ, потому что это кривыя четвертаго порядка, изслѣдованіе которыхъ въ настоящее время требуетъ употребленія уравненій поверхностей и довольно трудныхъ вычисленій.

6. **Евклидъ** (285 г. до Р. Х.). Въ лицѣ Евклида, знаменитаго творца элементовъ геометріи, соединяется Платонова школа, въ которой онъ получилъ свое образованіе, съ вновь возникшею Александрійскою школою.

Еще до Евклида многіе греческіе геометры писали объ элементахъ геометріи. Проклъ, который оставилъ намъ имена ихъ, особенно отличаетъ слѣдующихъ: Гиппократъ Хіосскаго; Леона, сочиненіе котораго было полнѣе и полезнѣе предыдущаго; Ѳедія Магнезійскаго, замѣчательнаго по тому порядку, въ которомъ онъ расположилъ свое сочиненіе; Гермотима Колофонскаго, который усовершенствовалъ открытія Евдокса и Ѳетеса и присоединилъ къ элементамъ многія собственныя изслѣдованія. Вскорѣ послѣ этого явился Евклидъ, который, по словамъ Прокла, «собралъ элементы, привелъ въ надлежащій порядокъ многое открытое Евдоксомъ, дополнилъ начатое Ѳетесомъ и доказалъ строго все, что до него было доказано еще неудовлетворительно»⁸⁾.

Евклидъ ввелъ въ элементы геометріи методъ, извѣстный подъ названіемъ *reductio ad absurdum* и состоящій въ доказательствѣ, что всякое предположеніе, несогласное съ доказываемой теоремой, ведетъ къ противорѣчію; этотъ методъ особенно полезенъ въ такихъ изысканіяхъ, гдѣ входитъ понятіе о безконечности подъ видомъ несоизмѣримыхъ количествъ. Архимедъ въ большинствѣ своихъ сочиненій употреблялъ этотъ способъ доказательства; Аполлоній пользовался имъ съ успѣхомъ въ 4-й книгѣ о коническихъ сѣченіяхъ; новѣйшіе геометры извлекли изъ него также много поль-

⁸⁾ Прокла 2-я книга, 4-я глава, въ комментаріяхъ къ первой книгѣ Евклида.

зы въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ наука не въ состояніи дать прямого доказательства, которое одно доводитъ истину до совершенной очевидности и вполне удовлетворяетъ требованіямъ нашего ума.

Элементы Евклида состоятъ изъ 13 книгъ, къ которымъ обыкновенно присоединяютъ двѣ книги о пяти правильныхъ тѣлахъ, приписываемыя Гипсиклу Александрійскому, который жилъ 150 лѣтъ позднѣе Евклида.

«Можно получить ясное понятіе о всемъ сочиненіи, представивъ себѣ его составленнымъ изъ четырехъ частей. Первая часть состоитъ изъ 6 первыхъ книгъ; она въ свою очередь подраздѣляется на три отдѣла, именно: прямые выводы свойствъ данныхъ фигуръ, заключающіеся въ книгахъ 1, 2, 3 и 4; далѣе теорія отношеній между величинами вообще въ 5 книгѣ и наконецъ applicatio этой теоріи къ плоскимъ фигурамъ. Вторую часть составляютъ книги 7, 8 и 9, которымъ присвоивается названіе *арифметическихъ*, потому что въ нихъ говорится объ общихъ свойствахъ чиселъ. Третья часть состоитъ изъ одной 10 книги, въ которой авторъ разсматриваетъ въ подробности величины несоизмѣримыя. Наконецъ въ четвертой части, состоящей изъ 5 послѣднихъ книгъ, изучаются поверхности и тѣла. Изъ этого обширнаго учебника въ наше преподаваніе введены только 6 первыхъ, 11-я и 12-я книги»⁹⁾.

7. *Элементы* сдѣлали имя Евклида знаменитымъ, хотя это — не единственный трудъ его, заслуживающій удивленія. Великій геометръ расширилъ предѣлы науки многими другими сочиненіями, которыя доставили бы ему не меньшую славу, еслибы дошли до насъ. Для насъ сохранилось только одно изъ нихъ, и именно наименѣе важное, извѣстное подъ названіемъ *δεδομένα* (данныя, data). Это есть продолженіе элементовъ, назначавшееся для того, чтобы облегчить употребленіе и applicatio ихъ къ рѣшенію всѣхъ вопросовъ, входящихъ въ область геометріи. Евклидъ называетъ здѣсь *даннымъ* все то, что, на основаніи теоремъ, заключающихся въ элементахъ,

⁹⁾ Заимствуемъ этотъ очеркъ элементовъ Евклида изъ превосходной замѣтки Лакруа въ *Biographie universelle*.

непосредственно слѣдуетъ изъ условій задачи. Напримѣръ, «если проводимъ изъ данной точки прямую, касательную къ данному кругу, то эта прямая есть *данная* по величинѣ и положенію» (Теорема 91 въ *Data* Евклида).

Древніе и средневѣковые геометры во всѣхъ геометрическихъ изысканіяхъ ссылались на теоремы «*данныхъ*», также какъ и на теоремы «элементовъ»; самъ Ньютонъ пользовался въ «*Principia*» этою книгою Евклида, также какъ и «коническими сѣченіями» Аполлонія. Но съ того времени подобные слѣды древности исчезли изъ сочиненій геометровъ и теперь книга «*данныхъ*» знакома развѣ только тѣмъ, кто занимается исторіею науки. ¹⁰⁾

Изъ нѣкоторыхъ теоремъ книги «данныя» легко можно вывести рѣшеніе уравненій второй степени, которое у древнихъ въ первый разъ встрѣчается только у Діофанта, жившаго 600 лѣтъ позднѣе Евклида. Примѣромъ этому можетъ служить слѣдующая теорема: «Если двѣ прямыя, наклоненныя подѣ даннымъ угломъ, заключаютъ данную площадь и если дана ихъ сумма, то и каждая изъ нихъ будетъ дана (извѣстна)» ¹¹⁾.

¹⁰⁾ Въ книгѣ «данныя» Евклидъ употребляетъ одно выраженіе, которое дѣлаетъ непонятными его умозаключенія, и самый смыслъ котораго трудно уяснить себѣ изъ даннаго имъ опредѣленія. Такъ какъ это выраженіе встрѣчается также у Аполлонія и Паппа и употреблялось даже въ сочиненіяхъ прошлаго столѣтія, то считаемъ здѣсь уместнымъ упомянуть о немъ. Евклидъ говоритъ, что одна величина болѣе другой *на данную* относительно *содержанія* (по отношенію къ содержанію), когда одна величина безъ данной имѣетъ къ другой величинѣ данное отношеніе (содержаніе). Такъ, если c будетъ данная величина, а μ содержаніе, то величина A будетъ болѣе B на данную c относительно содержанія μ , когда $\frac{A-c}{B} = \mu$.

Евклидъ хотѣлъ, какъ видно, трехчленное уравненіе представить въ видѣ равенства двухъ членовъ.

¹¹⁾ Эта теорема содержитъ въ себѣ рѣшеніе двухъ уравненій $xy=a^2$ и $x+y=b$, изъ которыхъ прямо получается уравненіе второй степени $x^2-bx+a^2=0$. Рѣшеніе задачи у Евклида даетъ два корня этого квадратнаго уравненія.

Другая теорема (87-я) рѣшаетъ два уравненія: $xy=a^2$ и $x^2-\mu y^2=b^2$, которыхъ корни получаются изъ уравненія четвертой степени, приводимаго къ квадратному.