Ф.М. Морс, Г. Фешбах

Методы теоретической физики

Том 1

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
Ф11

Ф.М. Морс
Ф11 Методы теоретической физики: Том 1 / Ф.М. Морс, Г. Фешбах – М.: Книга по Требованию, 2023. – 930 с.

ISBN 978-5-458-41387-9

Двухтомный курс Ф. Морса и Г. Фешбаха занимает особое место в литературе по математической физике. Он написан физиками для физиков и инженеров и показывает в действии математические методы, наиболее успешно применяемые при изучении различных полей. В книге излагается ряд важнейших разделов современной математики в плане их применения к задачам физики и техники. Большим достоинством является то, что авторы всюду стремятся выяснить основные идеи, существо и физический смысл излагаемых методов. Поэтому книга представляет значительный интерес и для математиков, которым она покажет новые стороны известных им методов. Некоторые из излагаемых методов (например, метод теории возмущений во втором томе) успешно применяются физиками, но еще недостаточно известны математикам и ждут своего математического обоснования. И физики и математики найдут в книге большое число подробно разобранных примеров важных прикладных задач. Курс Морса и Фешбаха лежит на стыке физики и математики. Он отличается от обычных курсов математической физики своей значительно большей физичностью, а от курсов теоретической физики тем, что в нем основное место уделяется разработке математического аппарата. Книга будет полезной студентам, аспирантам и научным работникам математических, физических и инженерных специальностей и вообще всем лицам, сталкивающимся с применением современной математики.

ISBN 978-5-458-41387-9

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

Работа по переводу книги распределилась следующим образом: Д. А. Васильков перевел гл. 3, 4 и § 1, 2 гл. 8; Ю. И. Гросберг — гл. 11 и § 1, 2 гл. 12; В.-К. И. Карабегов — § 7 гл. 1, § 3, 4 и 5 гл. 8, гл. 10; В. И. Левин — § 1 – 6 гл. 1; А. М. Молчанов — гл. 9; А. Д. Мышкис — гл. 5, 6 и 7; А. Г. Свешников — гл. 13; В. С. Ялтуновский — гл. 2 и § 3 гл. 12. Редактировали: § 3 гл. 12 — С. П. Аллилуев; гл. 5, 6, 7, 8 и 13 — Н. С. Кошляков; гл. 1, 2, 3, 4 и 9 — А. Д. Мышкис; гл. 10, 11 и § 1, 2 гл. 12 — А. Г. Свешников. Весь текст книги был просмотрен С. П. Аллилуевым.

Редакторы.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

Этот трактат вырос из курса лекций, читанных тем или другим из авторов на протяжении последних шестнадцати лет. Сама книга находилась в процессе подготовки в течение более чем половины этого времени, хотя, правда, было много перерывов, больших и малых. Проблемой не последней важности являлось при этом достигнуть надлежащего понимания в вопросе о том, что должно составить основное содержание книги и как это содержание должно быть представлено.

Современная теоретическая физика представляет собой весьма обширную область; изложение всех относящихся сюда предметов не поместилось бы и на пятифутовой книжной полке, и оно находится далеко за пределами возможностей и интересов авторов. Но не все участки этой области в наше время интенсивно разрабатываются; части, в которых за последние двадцать лет сделаны наиболее примечательные успехи, связаны главным образом не столько с частицами, сколько с полями, с волновыми функциями, силовыми полями, электромагнитным и акустическим потенциалами, т. е. со всем, что является решениями дифференциальных уравнений в частных производных, определенными краевыми условиями. Именно на этом общем подходе и концентрируется внимание в настоящем трактате. Пятьдесят лет назад он мог бы быть назван «Дифференциальные уравнения в частных производных физики» или «Краевые задачи». Сегодня, по причине распространенности концепции и методов теории поля, не будет, быть может, неподходящим использование более общего названия.

Но даже и эта ограниченная область не могла бы быть освещена в двух томах курса. Описание физических понятий и экспериментальных методов всех тех отраслей физики, которые пользуются полями, заняло бы огромнейшую полку, причем в этом описании дублировалось бы основное содержание многих прекрасных книг, а единство предмета, имеющее основное значение, в нем было бы погребено в массе деталей. И в самом деле, единство теорий полей лежит в аналитическом аппарате, в тех математических средствах, которые эти теории используют для получения решений. Этот аппарат остается в своей сущности одним и тем же, изучаем ли мы поле, соответствующее нейтральному мезону, или сигналу радара, или звуковой волне, или облаку диффундирующих нейтронов. Вследствие этого предлагаемый курс в первую очередь дает представление тех математических средств, которые оказались наиболее полезными при изучении основных физических конструкций, связанных с полями, а также дает ряд примеров, показывающих, как эти средства могут быть использованы при решении различных физических задач. При этом сообщаются только те физические сведения, которые необходимы, чтобы сделать примеры понятными.

Однако мы не утверждаем, что этот труд является математическим сочинением. Физик, использующий математику как орудие, может также воспользоваться своими физическими знаниями для того, чтобы так дополнить уравнения, как чистый математик не рискнет (и не должен рисковать) это сделать. Например, он может пользоваться представлением о точечном заряде; математик же должен добиваться выяснения аналитических капризов дельта-функции Дирака. Физик обычно отправляется от уже описанного и измеренного решения дифференциального уравнения в частных производных; математик же часто вынужден детально разрабатывать сеть теорем и лемм, чтобы точно показать, когда данное уравнение имеет единственное решение. Рассуждения, приводимые в этой книге, будут, мы надеемся, понятны и удовлетворительны для физиков и инженеров, для которых написана эта работа; математик же зачастую не сочтет их достаточно строгими.

Будучи ограничен в этих двух различных направлениях — в количестве физического материала и в математической строгости, — наш трактат, надо надеяться, является сравнительно замкнутым и завершенным. Предполагается, что читатель владеет физикой в объеме знаний, даваемых физическими факультетами; математическая же подготовка предполагается в объеме обычных курсов анализа и дифференциальных уравнений. Дальнейший необходимый математический материал из векторного и тензорного анализа и из теории линейных дифференциальных и интегральных уравнений, относящийся к нашему предмету, излагается в тексте.

Изложение ведется в довольно замкнутом стиле, так что лишь изредка приходится прибегать к выражению «можно показать», столь расстраивающему читателя. Даже на ранней стадии обсуждения основного математического аппарата сделана попытка сопоставить уравнения и методы с физическими свойствами полей, являющихся главным объектом изучения. Во многих случаях выводы даны дважды, сначала в полуинтуитивной манере, чтобы выявить физическую сущность вопроса, а затем со всеми символами и уравнениями, чтобы достигнуть необходимой степени строгости. Иногда часть рассуждения повторяется в позднейшей главе с другой точки зрения, чтобы избежать чрезмерного количества ссылок; это было признано желательным, хотя и повлекло за собой некоторое увеличение объема книги.

Мы старались освободиться от тривиальных и слишком частных примеров решений. В результате, конечно, включенные примеры, для того чтобы выявить все то, что есть в них интересного, часто требуют длинных и сложных объяснений; однако эта книга и предназначена как раз для того, чтобы объяснить, насколько трудные задачи могут быть решены, а такое объяснение не может быть иллюстрировано простыми примерами. Вариационные методы в применении к задачам дифракции, итерационные методы, используемые при вычислении рассеяния волн на нерегулярных границах, вычисление сходящихся рядов для собственных состояний, возмущенных сильными потенциалами взаимодействия, — все эти методы обнаруживают свою подлинную силу только тогда, когда они применяются в задачах, неразрешимых иным способом.

Другой общий принцип также работал в направлении удлинения рассуждений. Авторы предпочитали, так часто, как только это было возможно, «атаковать» задачи «в лоб», стараясь не «зарыться в них». Они предпочитали попытаться показать, как находить решение нового и незнакомого уравнения, вместо того чтобы приводить список выражений, относительно которых кто-то нашел, что они являются решениями интересных задач. Однако некоторого количества «раздражающих» примеров, в которых решение появляется, так сказать, с неба, а затем доказывается, что оно в самом деле является решением, нельзя было избежать. Обычно такие примеры занимают меньше места и легче типографски воспроизводятся; однако в большом количестве они вызывают у изучающего состояние подавленности или фатализма.

Мы надеемся, что эта работа окажется также сравнительно замкнутой и в отношении численных таблиц и списков употребительных формул. Таблицы и перечни основных свойств, помещенные в конце каждой главы, резюмируют основные результаты этой главы и позволяют легко обозреть основные свойства наиболее часто используемых функций. Вместо того чтобы рассеивать литературные ссылки по всему тексту, мы собрали их также в конце каждой главы; это позволяет легче находить их в случае надобности. Сюда были включены только названия тех книг и статей, относительно которых авторы чувствовали, что они будут полезны читателю, дополняя материал данной главы; эти ссылки отнюдь не предназначены для указания приоритета или кульминационных точек исторического развития. Историческое развитие теории, являющейся основным предметом этой книги, было бурным и потребовало усилий многих знаменитых личностей. Методы переоткрывались и получали новое имя почти всякий раз, как обнаруживалась новая ветвь физики. Полное библиографическое описание потребовало бы сотен страниц, многие из которых были бы очень скучны. Мы давали ссылки, чтобы помочь читателю понять предмет, а не для того, чтобы закрепить за каждым исследователем «его долю». Искренне говоря, мы дали ссылки на те работы, которые мы сами знаем и которые мы нашли полезными.

Была сделана попытка координировать выбор символов для обозначения различных определяемых и используемых функций. В тех случаях, когда символы, используемые в литературе, прочно установились, как, например, для бесселевых функций, мы следовали принятым обозначениям. Когда же имелось несколько различных символов, выбирался тот, который логически лучше подходил к остальному материалу и вызывал меньше повторений, как это было сделано в случае функций Матье. В немногих случаях функции были перенормированы, чтобы сделать их более удобными для употребления; этим новым функциям даны новые обозначения, как в случае полиномов Гегенбауера. Соотношение между используемыми в этой книге обозначениями и другими обозначениями, которые достаточно часто появляются в физической литературе, указано в Приложении; там же дан общий указатель символов.

Таблиц, помещенных в Приложении, будет достаточно для большинства вычислений, относящихся к основному предмету этой книги. Мы предпочли включить большое количество таблиц с ограниченными диапазоном и точностью, нежели давать немного таблиц с большим числом входов и значащих цифр. Табулировано большинство функций, используемых в реально возникающих физических задачах, но некоторые вспомогательные функции, такие, как гамма-функция или эллиптические функции, не представлены, равно как и некоторые функции со слишком многими независимыми параметрами, такие, как гипергеометрические функции. Некоторые функции, такие, как параболические и сфероидальные волновые функции, мы хотели включить, но их полные основные таблицы еще не опубликованы.

Некоторые из чертежей в этой книге, относящиеся к трем измерениям, выполнены для стереоскопического рассматривания. Их можно рассматривать либо при помощи какого-либо обычного стереоскопа, либо же без какого бы то ни было дополнительного приспособления, расслабляя фокусирующие мускулы глаз и заставляя каждый глаз смотреть на соответствующий ему рисунок. При этом следует делать такое усилие, которое нужно было бы для того, чтобы рассмотреть нечто, находящееся за плоскостью рисунка. Само собой разумеется, что эти рисунки можно рассматривать и как обычные перспективные, не обращая внимания на то, что они дублированы. Однако читатель, научившийся после недолгих упражнений «стереоскопическому видению», будет рассматривать эти рисунки с удовольствием.

Авторам при выполнении их задачи помогали многие. Сотни аспирантов, которые слушали соответствующий курс с 1935 года, вольно или невольно помогли при выборе порядка изложения и при отборе относящихся сюда примеров. Они исправили почти все опечатки литографированного издания записей лекций, на которых базируется эта книга; однако они еще не имели времени устранить те неизбежные ошибки, которые имеются в этом издании. Любой из читателей может помочь в этом, обратив внимание авторов на те ошибки, которые он заметит.

Была также и более специализированная помощь. Доказательство теоремы Коши, данное на стр. 334, было предложено Р. Боасом. В чтении рукописи и корректур участвовали профессора Дж. А. Стрэттон и Н. Г. Франк, доктора Гарольд Левин, К. У. Ингард, Вальтер Хойзер, Роберт и Джейн Пис, С. Рубинов, а также Ф. М. Юнг, М. К. Ньюстейн, Л. Сартори, Дж. Литтл, Э. Ломон и Ф. Дж. Корбато́. Всех их следует поблагодарить за многочисленные исправления и улучшения; на них не до́лжно взваливать вину за ошибки и неудобоваримые выражения, которые, без сомнения, еще остались. Мы выражаем также благодарность профессору Юлиану Швингеру за беседы и советы, стимулировавшие нашу работу.

Филипп М. Морс,
Герман Фешбах.

Май 1953.

ГЛАВА 1

Типы полей

Нашей задачей в предлагаемой книге является рассмотрение математического аппарата, используемого при расчете и анализе разных типов полей, встречающихся в современной физике. Наше внимание будет в первую очередь обращено на выявление взаимосвязи между уравнениями и физическими свойствами полей, причем временами мы будем жертвовать математической строгостью, если она не содействует выяснению физической сущности вопроса. Математическая строгость важна, и ею нельзя пренебрегать, но физик-теоретик должен в первую очередь добиваться полного понимания физического смысла употребляемой символики, без чего формальная строгость не может принести ему никакой пользы. Существуют другие руководства, в которых математическая строгость полностью выдержана; настоящая же книга достигнет своей цели, если ее читатель получит ясное физическое представление о разнообразных уравнениях полей, которые встречаются в современной теоретической физике, а также полностью уяснит себе физическую сущность математического аппарата, применяемого для решения этих уравнений.

В настоящей главе мы рассмотрим общие свойства разных полей и представления этих полей в различных системах координат. Вторая глава будет посвящена рассмотрению различных типов дифференциальных уравнений с частными производными, которые описывают эти поля, а третья глава — связи между этими уравнениями и основными вариационными принципами, развитыми в классической динамике Гамильтоном и другими учеными. Несколько дальнейших глав будет посвящено математическому аппарату, необходимому для решения этих уравнений, а в остальной части книги мы рассмотрим решение отдельных уравнений.

Практически вся современная физика имеет дело с полями: потенциальными полями, полями вероятностей, электромагнитными, тензорными и спинорными полями.

С математической точки зрения поле представляет собой систему функций от координат точки в пространстве. С точки зрения, принятой в этой книге, поле есть некоторая удобная математическая идеализация физической ситуации, в которой *протяженность* является существенным элементом, т. е. которая не может быть исследована в терминах положения конечного числа частиц. Поперечное отклонение струны, находящейся под воздействием статических сил, от ее положения равновесия представляет собой очень простой пример одномерного поля; отклонение y различно для разных частей струны, так что y можно рассматривать как функцию расстояния x вдоль струны. Плотность, температуру и давление в жидкости, в которой распространяются звуковые волны, можно рассматривать как функцию трех координат и времени. Поля такого типа, очевидно, являются лишь приближенной идеализацией физической ситуации, так как они не учитывают атомных свойств материи. Мы можем назвать их *материальными полями*.

Другие поля являются конструкциями, позволяющими изучать проблему *действия на расстоянии*, в которой относительное движение и положение одного тела влияют на движение и положение другого тела. Потенциальные и силовые поля, электромагнитные и гравитационные поля служат примерами таких полей. Считают, что такие поля вызваны некоторым количеством материи, а значение поля в некоторой точке рассматривают как меру воздействия этого количества материи на некоторое пробное тело, помещенное в рассматриваемой точке. В последнее время стало очевидным, что многие из этих полей также являются лишь приближенной идеализацией действительной физической ситуации, так как они не учитывают различных квантовых законов, которым подчиняется материя. В некоторых случаях теория этих полей может быть так изменена, чтобы более или менее удовлетворительным образом учитывались эти квантовые законы.

Наконец, поля могут строиться для «объяснения» квантовых законов. Примерами являются волновая функция Шредингера и спинорные поля, ассоциируемые с электроном Дирака. Во многих случаях значение такого поля в точке пространства тесно связано с вероятностью. Например, квадрат модуля волновой функции Шредингера является мерой вероятности присутствия элементарной частицы. Существующие квантовые теории поля встречаются со многими фундаментальными трудностями и поэтому представляют собой одну из передовых линий фронта современной теоретической физики.

В большинстве случаев поля, рассматриваемые в настоящей книге, оказываются решениями дифференциальных уравнений с частными производными, чаще всего линейных уравнений второго порядка, однородных или неоднородных. Для того чтобы получить такие уравнения, часто приходится упрощать действительную физическую ситуацию, причем подобное упрощение может быть оправдано некоторыми прагматическими соображениями. Например, решением волнового уравнения является лишь «сглаженная плотность» газа, что, однако, оказывается достаточным для изучения звуковых волн, а значительно более сложные вычисления фактических движений молекул газа немного добавили бы к нашим знаниям о звуке.

Эта тенденция втиснуть физическую ситуацию в прокрустово ложе дифференциальных уравнений с частными производными приводит к тому, что получаемые поля оказываются одновременно и более и менее правильными, чем «фактические» состояния. Решение дифференциального уравнения обладает в большей части пространства и времени большей степенью гладкости, чем соответствующая физическая ситуация, но математически оно обычно имеет конечное число разрывов, значительно более «резких», чем те, которые «фактически» имеют место. Если упрощение было не слишком далеко идущим, то большинство величин, которые могут быть вычислены с помощью поля, достаточно хорошо соответствует их измеренным значениям. В каждом случае, однако, обнаруживаются некоторые расхождения между вычисленными и измеренными значениями, что объясняется либо «слишком гладким» поведением поля на большей части его протяжения, либо наличием в математически построенном поле разрывов и бесконечностей, отсутствующих в «действительности». Иногда эти расхождения тривиальны в том смысле, что внесение в конструкцию поля дополнительных усложнений с целью получить лучшее соответствие с экспериментом не приводит к принципиальному изменению самой теории явления; в некоторых же случаях эти расхождения далеко не тривиальны, и изменения в теории, необходимые для достижения лучшего соответствия с экспериментом, затрагивают коренным образом основные понятия и определения. Для физика-теоретика важно различать тривиальные и нетривиальные расхождения между теорией и экспериментом.

Один из признаков того, что поле часто представляет собой упрощение физической реальности, состоит в определении поля при помощи предела некоторого отношения. Поле плотностей жидкости, в которой распространяется звуковая волна, определяется посредством «плотности в данной точке», которая является пределом отношения массы жидкости, заключенной в некотором объеме, окружающем данную точку, к величине этого объема при стягивании этого объема к «нулю». Электрическая напряженность «в данной точке» является пределом отношения силы, действующей на пробный заряд в этой точке, к его величине при стремлении величины пробного заряда к «нулю». Величина квадрата модуля волновой функции Шредингера есть предел отношения вероятности присутствия элементарной частицы в некоторой области, окружающей данную точку, к объему этой области при сжимании этой области к «нулю» и т. д. Аккуратное определение смещения «точки» колеблющейся струны также должно использовать предел некоторого отношения.

Мы подчеркиваем здесь эти тривиальные с математической точки зрения замечания потому, что техника предельных отношений должна при определении и вычислении полей применяться с осторожностью. Иными словами, для того чтобы получить результаты, соответствующие «действительности», следует тщательно определить содержание понятия «нуль» в предыдущих рассуждениях. Например, объем, встречающийся в определении поля плотностей жидкости, должен быть на несколько порядков меньше куба наименьшей длины волны распространяющегося звука, если мы хотим, чтобы взятое отношение приводило к достаточно точному решению волнового уравнения. С другой стороны, этот объем нельзя уменьшать до величины, сравнимой с размерами атома, иначе соответствующее отношение потеряет необходимые свойства гладкости и не будет уже нам полезным. Если принять во внимание эти ограничения, то нетрудно понять, почему описание звуковых волн при помощи поля, являющегося решением волнового уравнения, оказалось бы неадекватным, если бы «длина волн» стала меньше межатомных расстояний.

Аналогичным образом мы определяем электрическое поле при помощи пробного заряда, который должен быть достаточно мал, чтобы не влиять на распределение зарядов, «порождающих» поле. Но если размеры пробного заряда уменьшить до порядка малости заряда электрона, то следует ожидать трудности, связанной с атомистичностью зарядов (которая, однако, необязательно должна возникнуть).

В некоторых случаях предельное отношение может рассматриваться при как угодно малых величинах его членов. Поля вероятностей волновой механики являются настолько «мелкозернистыми», насколько мы это можем себе в настоящее время представить.

1.1. Скалярные поля

Когда рассматриваемое поле оказывается просто числом — значением некоторой функции точки пространства и времени, - оно называется *скалярным*. Отклонения струны или мембраны от их положения равновесия представляют собой скалярные поля. Плотность, давление и температура жидкости, определенные ранее через предельные отношения, также являются скалярными полями. Как уже отмечалось, при вычислении этих отношений объем не может быть уменьшен до атомных размеров, так как понятия плотности, давления и т. д. утрачивают смысл для отдельных молекул. Отношения, определяющие эти поля, должны приближаться к «макроскопическому пределу», когда объем мал по сравнению с объемом, занимаемым всей жидкостью, но все еще достаточно велик по сравнению с размерами атома; иначе понятие скалярного поля оказывается физически бессодержательным.

Все эти скалярные поля обладают свойством *инвариантности* относительно преобразований пространственных координат (инвариантность относительно преобразований временной и пространственных координат мы рассмотрим далее в этой главе). *Численное* значение поля в точке остается одним и тем же независимо от того, как выражены координаты этой точки. *Форма* математического выражения поля может меняться в зависимости от выбора системы координат. Например, поле, выраженное в прямоугольных координатах, может иметь вид $\psi = y$; в сферических координатах оно будет иметь иной вид: $\psi = r \sin\theta \sin\varphi$, но в *любой* системе координат в точке $x = 10$, $y = 10$, $z = 0$ ($r = \sqrt{200}$, $\varphi = 45°$, $\theta = 90°$) оно имеет значение $\psi = 10$. Этому следует противопоставить поведение x-компоненты скорости потока жидкости, где с изменением системы координат может измениться и направление оси x. Поэтому численное значение x-компоненты скорости в данной точке будет изменяться с изменением направления оси x.

Это свойство инвариантности скаляра будет играть важную роль в дальнейших рассмотрениях, и его следует отличать от инвариантности *формы* некоторых уравнений относительно некоторых преобразований координат. Для таких упомянутых выше скалярных полей, как поля плотности, температуры или электрического потенциала, свойство инвариантности совершенно очевидно из самого определения поля. Однако это не всегда так для менее простых полей. В некоторых случаях свойство инвариантности должно быть использовано как пробный камень, позволяющий найти правильное выражение для данного поля.

Поверхности уровня. Поверхности, определенные уравнением $\psi = \text{const}$, где ψ обозначает скалярное поле, называются *поверхностями уровня*. Поверхности уровня являются очевидными обобщениями линий уровня на топографической карте. В теории потенциала они называются эквипотенциальными поверхностями, в теории теплопроводности — изотермическими поверхностями и т. д. Они образуют семейство непересекающихся поверхностей, которые часто оказываются полезными в качестве одного из семейств координатных поверхностей, наиболее естественной для данной проблемы системы координат. Например, если полем является хорошо известный потенциал

$$\psi = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2},$$

то поверхностями уровня (в данном случае поверхностями постоянного потенциала) являются концентрические сферы радиуса $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{const}$; поэтому естественными координатами для этой задачи являются сферические: r, θ, φ. Другая система поверхностей вместе с соответствующей системой координат показана на рис. 1.1. Поверхности $\mu = \text{const}$ могут рассматриваться как эквипотенциальные поверхности вокруг круглого заряженного диска радиуса c, лежащего в плоскости xy ($\mu = 0$).

Производные скаляра ψ по прямоугольным координатам x, y, z измеряют скорость, с которой изменяется поле при перемещении в пространстве. Например, изменение ψ при перемещении из точки (x, y, z) в точку