З.И. Боревич

Определители и матрицы

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
З-11

З.И. Боревич

З-11 Определители и матрицы / З.И. Боревич – М.: Книга по Требованию, 2013. – 200 с.

ISBN 978-5-458-30922-6

Предлагаемая вниманию читателей книга является введением в линейную алгебру и составляет часть университетского курса по высшей алгебре. В ней изложены темы: теория определителей, теория систем линейных уравнений, действия над матрицами, алгебраическая теория квадратичных форм. Изложение этих тем, сопровождаемое большим количеством примеров, проводится на конкретной основе без использования понятия векторного пространства и имеет своей целью подготовить читателя к последующему естественному восприятию абстрактных понятий линейной алгебры. В качестве приложения в книге изложена на матричном языке общая теория приведения уравнений кривых и поверхностей 2-го порядка к каноническому виду. Книга рассчитана на студентов университетов, педагогических институтов и технических вузов, а также лиц, начинающих самостоятельное изучение высшей алгебры.

ISBN 978-5-458-30922-6

ГЛАВА I

ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

§ 1. Определители второго и третьего порядков

Понятие определителя возникло в связи с проблемой отыскания формул для значений неизвестных в системе линейных уравнений.

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Чтобы найти неизвестное x, умножим первое уравнение на b_2, а второе на $-b_1$. Складывая полученные левые и правые части, получим

$$(a_1b_2-a_2b_1)\,x=c_1b_2-c_2b_1.$$

Аналогично, умножая первое уравнение на $-a_2$, второе на a_1, найдем

$$(a_1b_2-a_2b_1)\,y=a_1c_2-a_2c_1.$$

Предполагая, что $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, получаем

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\qquad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \tag{2}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что значения для x и y, даваемые формулами (2), действительно удовлетворяют системе (1). Нами доказано, таким образом, что если $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, то система (1) имеет единственное решение, определяемое формулами (2).

Рассмотрим таблицу чисел

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

составленную из коэффициентов при неизвестных x и y системы (1). Такую таблицу чисел называют (*квадратной*) *матрицей* 2-го порядка. Обозначим ее для краткости одной буквой A. Выражение $a_1b_2 - a_2b_1$, стоящее в знаменателе формул (2), определяется числами матрицы (3) по следующему правилу: надо взять произведение чисел, расположенных на главной диагонали (так мы называем диагональ, идущую из левого верхнего угла в правый нижний), и вычесть из него произведение чисел, расположенных на второй диагонали. Так полученное выражение $a_1b_2 - a_2b_1$ называется *определителем 2-го порядка*, составленным из элементов матрицы A (или короче: *определителем матрицы* A), и обозначается через

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Например, если

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{Vmatrix},$$

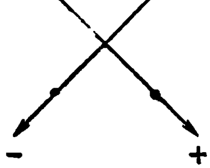
то

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 5 \cdot 3 = 1.$$

Еще пример:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 - (-3) \cdot 2 = 2.$$

Правило, по которому вычисляется определитель матрицы 2-го порядка, схематически можно изобразить следующим образом:



Приняв введенное определение определителя 2-го порядка, замечаем, что числители в формулах (2) могут быть представлены теперь в виде

$$c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = |A_1|,\ a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = |A_2|,$$

где матрицы A_1 и A_2 получаются из A заменой первого, соответственно второго, столбца на свободные члены. Формулы (2) принимают теперь следующий вид:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{|A_1|}{|A|}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{|A_2|}{|A|}. \tag{4}$$

Напомним еще раз, что эти формулы применимы лишь в случае, когда $|A| \neq 0$.

Пример. Пусть требуется решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= -7, \\ 5x + 4y &= 12. \end{aligned}\right\}$$

Составляем матрицу из коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{Vmatrix}$$

и вычисляем ее определитель

$$|A| = 2 \cdot 4 - (-3) \cdot 5 = 23.$$

Так как $|A| \neq 0$, то формулы (4) применимы.

Вычисляем числители:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 12 & 4 \end{vmatrix} = -28 + 36 = 8,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 24 + 35 = 59.$$

Следовательно,

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{8}{23}, \qquad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{59}{23}.$$

Рассмотрим теперь систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

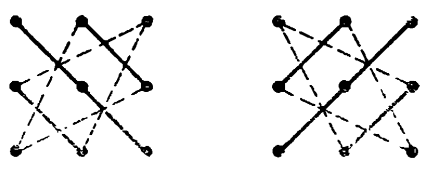
Чтобы найти x, умножим уравнения системы (5) соответственно на $b_2c_3 - b_3c_2$, $b_3c_1 - b_1c_3$, $b_1c_2 - b_2c_1$ и сложим полученные левые и правые части. После приведения подобных членов (относительно x, y и z) окажется, что коэффициенты при y и z равны нулю. Предполагая, что коэффициент при x отличен от нуля, получим

$$x = \frac{d_1b_2c_3 + d_2b_3c_1 + d_3b_1c_2 - d_1b_3c_2 - d_2b_1c_3 - d_3b_2c_1}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1}. \tag{6}$$

Составим, как и выше, таблицу чисел из коэффициентов при неизвестных:

$$A = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \right\|.$$

Эта таблица чисел называется *квадратной матрицей 3-го порядка* (у нее три строчки и три столбца). Выражение, стоящее в знаменателе формулы (6), составлено из чисел матрицы A по следующему правилу. Произведение чисел, расположенных на главной диагонали, и два произведения чисел, расположенных в вершинах двух равнобедренных треугольников с основанием, параллельным главной диагонали, и с вершиной в противоположном углу, берутся со знаком плюс. Три произведения, которые строятся по такому же правилу, но относительно второй диагонали, берутся со знаком минус. Схематически это правило может быть изображено следующим образом:



+ −

Так составленная сумма шести слагаемых (из которых три взяты со знаком плюс, а три — со знаком минус) называется *определителем* (*3-го порядка*) *матрицы* A и обозначается через

$$|A|=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Например, если

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{Vmatrix},$$

то

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot 1\cdot 5+2\cdot 2\cdot 3+(-1)\cdot 2\cdot 4-(-1)\cdot 1\cdot 3-$$
$$-2\cdot 2\cdot 5-1\cdot 2\cdot 4=-16.$$

Итак, знаменатель в формуле (6) представляется в виде определителя $|A|$. Что касается числителя, то, поскольку он получается из знаменателя заменой a_1, a_2, a_3 соответственно на d_1, d_2, d_3, его можно представить в виде определителя

$$\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=|A_1|.$$

Аналогичным образом, если уравнения системы (5) умножим последовательно на $a_3c_2-a_2c_3$, $a_1c_3-a_3c_1$, $a_2c_1-a_1c_2$ и результаты сложим, найдем формулу для y. Наконец, умножая уравнения (5) последовательно на $a_2b_3-a_3b_2$, $a_3b_1-a_1b_3$, $a_1b_2-a_2b_1$, найдем формулу для z. Окончательно будем иметь

$$x=\frac{|A_1|}{|A|}, \qquad y=\frac{|A_2|}{|A|}, \qquad z=\frac{|A_3|}{|A|}, \tag{7}$$

где матрицы A_1, A_2, A_3 получаются из A заменой соответствующего столбца на свободные члены.

Заметим, что формулы (7) нами выведены в предположении, что $|A| \neq 0$.

В качестве примера решим систему

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y+5z&=1, \\ x+2y-3z&=7, \\ 3x-\ y-2z&=5. \end{aligned}\right\}$$

Так как определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -8-5+27-30-6-6=-28$$

отличен от нуля, то формулы (7) применимы. Имеем

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -89,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & -3 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -85,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -21,$$

поэтому

$$x=\frac{89}{28}, \qquad y=\frac{85}{28}, \qquad z=\frac{3}{4}.$$

Чтобы получить формулы, аналогичные формулам (4) и (7), для систем n линейных уравнений с n неизвестными при любом n, надо дать определение определителя квадратной матрицы n-го порядка. Сделать это таким же способом, каким мы ввели определители 2-го и 3-го порядков, затруднительно, так как число слагаемых, из которых составляется определитель, очень быстро растет с увеличением порядка (определитель n-го порядка содержит $n!$ слагаемых, что уже при $n=4$ равно 24). Мы вынуждены поэтому избрать иной путь, основанный на использовании некоторых сведений из теории перестановок. Обобщение формул (4) и (7) на общий случай будет дано нами в § 8.

Упражнения

1. Вычислить определители:

a) $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}$.

Отв. a) -29; b) 1; c) 0; d) $2a^3$.

2. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} 3x+7y&=-11, \\ 5x-2y&=9. \end{aligned}\right\}$$

Отв. $x=1$, $y=-2$.

3. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z&=-7, \\ 2x+y+2z&=-2, \\ 3x+2y+z&=3. \end{aligned}\right\}$$

Отв. $x=2$, $y=0$, $z=-3$.

4. Проверить, что

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2).$$

§ 2. Определение определителя n-го порядка

Квадратная таблица n^2 чисел, расположенных в n строчках и n столбцах, будет называться нами *матрицей n-го порядка*. Чтобы подметить общее правило составления определителей матриц n-го порядка, присмотримся внимательнее к определителям 2-го и 3-го порядков. Отвлекаясь пока от знака, поставим вопрос: чем характеризуются произведения, входящие в состав определителя? Прежде всего мы замечаем, что число сомножителей в каждом произведении равно порядку матрицы. Далее, если мы обратимся к какому-нибудь конкретному произведению, то увидим, что в нем сомножители взяты по одному из каждой строчки и по одному из каждого столбца. Так обстоит дело для определителей 2-го и 3-го порядков, и в этом мы убеждаемся, анализируя определения первого параграфа. Естественно предположить, что мы получим разумное определение определителя матриц n-го порядка, если в его основу положим эту подмеченную закономерность.

Условимся сначала об одном весьма удобном способе обозначения элементов матрицы. Место каждого элемента в матрице вполне определяется указанием номера строчки и номера столбца, в которых находится наш элемент. Чтобы в обозначении элемента отразить его местонахождение в матрице, уславливаются все элементы матрицы обозначать одной буквой, но снабжать ее двумя индексами, из которых один обозначает номер строчки, а второй — номер столбца. Обычно эти индексы пишут справа внизу, причем сначала ставят номер строчки, а рядом — номер столбца. Например, $a_{2,5}$ (или a_{25}, читается: a — два-пять) есть элемент матрицы, расположенный во второй строчке и в пятом столбце; элемент a_{ik} расположен в i-й строчке и k-м столбце. (Конечно, вместо a можно взять любую другую букву.) Воспользовавшись введенной системой обозначений, матрицу n-го порядка запишем теперь в виде

$$A=\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}\right\|. \qquad (1)$$

Выясним, сколько можно составить различных произведений из элементов матрицы A, взятых по одному из каждой строчки и по одному из каждого столбца. Заметим, что под различными мы понимаем произведения, составленные разными способами, так что разные в нашем смысле произведения могут случайно оказаться равными по своим значениям. Пусть P — некоторое такое произведение. Множитель из первой строчки, входящий в P, имеет вид $a_{1\alpha}$, где α — номер столбца, т. е. $1 \leqslant \alpha \leqslant n$. Множитель из второй строчки имеет вид $a_{2\beta}$, $1 \leqslant \beta \leqslant n$, и т. д. Наконец, множитель из n-й строчки имеет вид $a_{n\omega}$, $1 \leqslant \omega \leqslant n$. Таким образом,

$$P = a_{1\alpha} a_{2\beta} \ldots a_{n\omega}. \qquad (2)$$

С другой стороны, все сомножители в этом произведении взяты по одному из каждого столбца, а значит, все вторые индексы $\alpha, \beta, \ldots, \omega$ различны (если бы, например, $\alpha=\beta$, то это означало бы, что $a_{1\alpha}$ и $a_{2\beta}$ принадлежат одному столбцу). Но в таком случае они образуют перестановку $(\alpha\beta \quad \omega)$ из чисел $1, 2, \ldots, n$. С произведением P связывается, таким образом, некоторая вполне определенная перестановка: $(\alpha\beta \quad \omega)$. Наоборот, если взять какую-нибудь произвольную перестановку $(\alpha\beta \quad \omega)$ из чисел $1, 2, \ldots, n$ и по ней составить произведение (2), то это произведение, очевидно, будет иметь множители по одному из каждой строчки и по одному из каждого столбца. Из этих рассуждений следует, что число интересующих нас произведений, из которых будет строиться определитель матрицы (1), равно числу всех перестановок из чисел $1, 2, \ldots, n$, т. е. равно $n!$.

Дадим теперь следующее предварительное определение.

Определение. *Определителем матрицы A n-го порядка называется сумма всех $n!$ произведений элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строчки и по одному из каждого столбца; при этом каждое произведение снабжено знаком плюс или минус по некоторому правилу.*

Предполагая, что A есть матрица 4-го порядка, рассмотрим несколько примеров.

1. Произведения $a_{11}a_{23}a_{34}$ и $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}a_{32}$ не входят в определитель матрицы A, так как число сомножителей в них не равно порядку матрицы.

2. Произведение $a_{12}a_{31}a_{22}a_{44}$ также не входит в определитель, так как два сомножителя, a_{12} и a_{22}, принадлежат одному и тому же (второму) столбцу.

3. Произведения $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ и $a_{21}a_{43}a_{14}a_{32}$ содержат множители по одному из каждой строчки и по одному из каждого столбца — следовательно, они входят в состав определителя.

Чтобы приведенное выше определение сделать полным, надо еще сформулировать правило для знака, с которым берется то или иное произведение.

Рассмотрим опять определители 2-го и 3-го порядков, применив новую систему обозначений элементов с помощью двойных индексов:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Во всех произведениях мы выписали сомножители в порядке следования строчек (первые индексы расположены в натуральном порядке). Присмотримся к перестановкам, которые образуют номера столбцов в этих произведениях. В определителе 2-го порядка в первом произведении (которое берется со знаком плюс) номера столбцов образуют натуральное расположение, во втором же произведении (которое берется со знаком минус) они образуют перестановку (21), в которой расположение номеров 1 и 2 противоположно их натуральному расположению.

В определителе 3-го порядка номера столбцов в произведениях, которые берутся со знаком плюс, образуют перестановки

$$\left.\begin{array}{c} (1\ \ 2\ \ 3), \\ (2\ \ 3\ \ 1), \\ (3\ \ 1\ \ 2), \end{array}\right\} \tag{3}$$

а в трех остальных произведениях — перестановки

$$\left.\begin{array}{c} (1\ \ 3\ \ 2), \\ (2\ \ 1\ \ 3), \\ (3\ \ 2\ \ 1). \end{array}\right\} \tag{4}$$

В пяти перестановках (3) и (4) (кроме первой) взаимное расположение некоторых пар номеров противоположно их расположению в перестановке (1 2 3). Такое явление называют *инверсией* (или беспорядком).

Определение. *Пусть имеется перестановка* ($\alpha\ \ \beta \ldots \omega$) *чисел* 1, 2, ..., *n. Мы говорим, что два числа, входящих в эту перестановку, образуют инверсию, если большее число из нашей пары предшествует*