

Р.В. Хемминг

**Численные методы для
научных работников и
инженеров**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
P11

P11 **Р.В. Хемминг**
Численные методы для научных работников и инженеров / Р.В. Хемминг – М.: Книга по Требованию, 2024. – 400 с.

ISBN 978-5-458-33613-0

Книга посвящена численным методам математического анализа, используемым на современных электронных вычислительных машинах. Она состоит из четырёх частей. Часть 1, Дискретное исчисление конечных разностей (гл. 1 - 6), излагает основные понятия конечных разностей, суммирования конечных числовых рядов и конечных рядов Фурье. Часть 2, Приближение многочленами (гл. 7 - 20), содержит изложение классических численных методов интерполяции, численного интегрирования и численного решения дифференциальных уравнений, основанных на аппроксимации функции обычными алгебраическими многочленами. При этом рассматриваются приближения в смысле наименьшего отклонения в узлах, в смысле наименьших квадратов и в смысле наименьшего отклонения по Чебышеву. Часть 3, Немногочисленные приближения (гл. 21 - 27), посвящена аппроксимации функций с помощью экспоненциальных, а также с помощью рядов и интеграла Фурье. Часть 4, Алгоритмы и эвристические методы (гл. 28 - 32), кроме некоторых известных алгоритмов для отыскания корней функции и для ряда задач линейной алгебры, рассматривает примеры моделирования, применения метода Монте-Карло и некоторые игровые задачи. Отдельная заключительная глава посвящена вопросам организации вычислительной работы. Третья и четвёртая части книги содержат ряд новых задач и методов. Изложение всех численных методов сопровождается разбором примеров из вычислительной практики автора.

ISBN 978-5-458-33613-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Предисловие редактора перевода	12
Из предисловия автора	14

часть I

ДИСКРЕТНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Глава 1. Исчисление разностей	17
§ 1.1. Введение и система обозначений	17
§ 1.2. Разностный оператор	19
§ 1.3. Повторные разности	21
§ 1.4. Таблицы разностей	23
§ 1.5. Факториалы	27
§ 1.6. Деление многочленов	29
§ 1.7. Числа Стирлинга первого рода	32
§ 1.8. Числа Стирлинга второго рода	34
§ 1.9. Пример	35
§ 1.10. Альтернативные замечания	36
§ 1.11. Общие замечания и справки	37
Глава 2. Погрешности округления	37
§ 2.1. Введение	37
§ 2.2. Область ответа	38
§ 2.3. Двойная точность	39
§ 2.4. Счет со значащими разрядами	39
§ 2.5. Статистический подход	40
§ 2.6. Случайное округление	41
§ 2.7. Переменная точность	41
§ 2.8. Оценка шума в таблице	41
§ 2.9. Теория «младшего значащего разряда»	47
§ 2.10. Теория «старшего значащего разряда»	49
§ 2.11. Анализ распространения ошибки при небольшом вычислении	52
§ 2.12. Общие замечания и библиография	53
Глава 3. Исчисление сумм	53
§ 3.1. Введение и система обозначений	53
§ 3.2. Формулы суммирования	56
§ 3.3. Суммирование по частям	58
§ 3.4. Общие замечания	59
Глава 4. Вычисление бесконечных рядов	59
§ 4.1. Введение	59
§ 4.2. Метод Куммера	61

§ 4.3.	Некоторые специальные суммы	62
§ 4.4.	Метод Эйлера	62
§ 4.5.	Нелинейное преобразование	66
§ 4.6.	Степенные ряды	67
§ 4.7.	Разложение по специальным функциям	68
§ 4.8.	Интегралы как приближения сумм	68
§ 4.9.	Дигамма-функция	69
Глава 5.	Уравнения в конечных разностях	71
§ 5.1.	Система обозначений	71
§ 5.2.	Пример разностного уравнения первого порядка	72
§ 5.3.	Пример уравнения второго порядка	74
§ 5.4.	Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами	75
§ 5.5.	Пример	76
Глава 6.	Конечные ряды Фурье	78
§ 6.1.	Введение	78
§ 6.2.	Ортогональность на дискретном множестве точек	79
§ 6.3.	Точность разложения	81
§ 6.4.	Вычисление коэффициентов	83
§ 6.5.	Метод двенадцати ординат	85
§ 6.6.	Методы с минимумом умножений	87
§ 6.7.	Разложение по косинусам	87
§ 6.8.	Локальные ряды Фурье	88

ЧАСТЬ II

ПРИБЛИЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНАМИ — КЛАССИЧЕСКИЙ ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Глава 7.	Введение в многочленные приближения	90
§ 7.1.	Ориентация	90
§ 7.2.	Альтернативные формулировки	92
§ 7.3.	Узловые точки, информация	95
§ 7.4.	Класс функций	96
§ 7.5.	Согласие	97
§ 7.6.	Точность	98
Глава 8.	Интерполяция многочленами. Данные с произвольными промежутками	99
§ 8.1.	Философия	99
§ 8.2.	Интерполяционные многочлены	99
§ 8.3.	Метод интерполяции Лагранжа	103
§ 8.4.	Интерполяционная формула Ньютона	106
§ 8.5.	Другая форма для таблицы разделенных разностей	109
§ 8.6.	Погрешность многочленной аппроксимации	110
§ 8.7.	Трудности приближения многочленом	113
§ 8.8.	О выборе узловых точек	116
Глава 9.	Интерполяция многочленами. Равноотстоящие узлы	117
§ 9.1.	Формула Ньютона для интерполирования	117
§ 9.2.	Интерполирование в таблицах	118
§ 9.3.	Ромбовидная диаграмма	119
§ 9.4.	Замечания к выведенным формулам	123
§ 9.5.	Смешанные интерполяционные формулы	124

Глава 10. Единый метод нахождения интерполяционных формул	125
§ 10.1. Введение	125
§ 10.2. Несколько типичных формул интегрирования	127
§ 10.3. Фиксированные узлы	132
§ 10.4. Некоторые примеры формул	135
§ 10.5. Значения функции и производной в фиксированных точках	137
§ 10.6. Свободные узлы; квадратура Гаусса	139
§ 10.7. Смешанный случай	141
§ 10.8. Замечания	142
§ 10.9. Линейные ограничения на веса	144
§ 10.10. Формула Грегори	147
§ 10.11. Выводы	150
Глава 11. О нахождении остаточного члена формулы	152
§ 11.1. Потребность в остаточном члене	152
§ 11.2. Порядок остаточного члена	152
§ 11.3. Функция влияния	153
§ 11.4. Случай, когда $G(s)$ имеет постоянный знак	156
§ 11.5. Случай, когда функция влияния меняет знак	158
§ 11.6. Слабое место в методе рядов Тейлора	160
Глава 12. Формулы для определенных интегралов	161
§ 12.1. Введение	161
§ 12.2. Формулы Ньютона—Котеса	164
§ 12.3. Использование формулы Грегори	166
§ 12.4. Открытые формулы	168
§ 12.5. Квадратура Гаусса	169
§ 12.6. Формулы интегрирования смешанного гауссового типа	170
§ 12.7. Суммирование рядов	171
§ 12.8. Эффекты замены переменной	172
§ 12.9. Интегралы с параметром	173
Глава 13. Неопределенные интегралы	173
§ 13.1. Описание содержания главы и система обозначений	173
§ 13.2. Несколько простых формул для неопределенных интегралов	175
§ 13.3. Общий метод	177
§ 13.4. Ошибка вследствие отбрасывания членов	178
§ 13.5. Устойчивость	181
§ 13.6. Шум округления	184
§ 13.7. Итоги	186
§ 13.8. Некоторые общие замечания	187
§ 13.9. Экспериментальная проверка устойчивости	189
§ 13.10. Пример интеграла свертки, иллюстрирующий идею устойчивости	189
Глава 14. Введение в дифференциальные уравнения	191
§ 14.1. Природа и смысл дифференциальных уравнений	191
§ 14.2. Поле направлений	192
§ 14.3. Численное решение	193
§ 14.4. Пример	195
§ 14.5. Устойчивость метода простого прогноза	197
§ 14.6. Устойчивость коррекции	198
§ 14.7. Несколько общих замечаний	200
§ 14.8. Системы уравнений	201

Глава 15. Общая теория методов прогноза и коррекции	202
§ 15.1. Введение	202
§ 15.2. Ошибка от отбрасывания членов	204
§ 15.3. Устойчивость	205
§ 15.4. Помехи округления	209
§ 15.5. Прогноз по трем точкам	209
§ 15.6. Прогнозы типа Милна	210
§ 15.7. Прогнозы типа Адамса—Башфорта	212
§ 15.8. Общие замечания о выборе метода	213
§ 15.9. Выбор прогноза	214
§ 15.10. Некоторые формулы	215
§ 15.11. Выбор шага и оценка точности	216
§ 15.12. Экспериментальная проверка	219
Глава 16. Специальные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений	220
§ 16.1. Введение и общее описание	220
§ 16.2. Методы Рунге—Кутты	221
§ 16.3. Методы для уравнения второго порядка, когда отсутствует y'	222
§ 16.4. Линейные уравнения	224
§ 16.5. Метод, который использует значения y , y' и y''	225
§ 16.6. Случай, когда решение трудно аппроксимировать многочленом	226
§ 16.7. Краевые задачи	229
Глава 17. Метод наименьших квадратов. Теория	232
§ 17.1. Введение	232
§ 17.2. Метод наименьших квадратов	232
§ 17.3. Другие критерии	234
§ 17.4. Ошибки с нормальным распределением	234
§ 17.5. Проведение подходящего многочлена	237
§ 17.6. Ортогональные функции	240
§ 17.7. Общие свойства ортогональных функций	242
§ 17.8. Неравенство Бесселя и полнота	244
§ 17.9. Метод наименьших квадратов и коэффициенты Фурье	245
§ 17.10. Ортогональные многочлены	247
§ 17.11. Классические ортогональные многочлены	249
§ 17.12. Сравнение метода наименьших квадратов и разложения в степенные ряды	250
§ 17.13. Метод наименьших квадратов с ограничениями; продолжение примера из § 1.9.	251
§ 17.14. Последние замечания о методе наименьших квадратов	252
Глава 18. Метод наименьших квадратов. Практика	252
§ 18.1. Общие замечания о многочленном случае	252
§ 18.2. Трехчленное рекуррентное соотношение	253
§ 18.3. Построение квазиортогональных многочленов	255
§ 18.4. Немногочленный случай	255
§ 18.5. Нелинейные параметры	256
Глава 19. Многочлены Чебышева	257
§ 19.1. Введение	257
§ 19.2. Некоторые тождества	259
§ 19.3. Критерий Чебышева	260
§ 19.4. Экономизация	262

§ 19.5.	Механизация процесса экономизации	263
§ 19.6.	Смещенные многочлены Чебышева	265
§ 19.7.	τ -процесс Ланцоша	266
§ 19.8.	Видоизменение τ -метода	268
§ 19.9.	Несколько замечаний о чебышевском приближении	270
§ 19.10.	Критерий совпадения моментов	270
Глава 20.	Рациональные функции	272
§ 20.1.	Введение	272
§ 20.2.	Непосредственный подход	273
§ 20.3.	Чебышевское приближение рациональными функциями	274
§ 20.4.	Обратные разности (симметричные)	275
§ 20.5.	Пример	278
ЧАСТЬ III		
НЕМНОГОЧЛЕННЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ		
Глава 21.	Периодические функции. Аппроксимация Фурье	280
§ 21.1.	Цель этой теории	280
§ 21.2.	Замена переменных и выбор узлов	281
§ 21.3.	Ряды Фурье; периодические явления	282
§ 21.4.	Интерполяция периодических функций	285
§ 21.5.	Интегрирование	288
§ 21.6.	Метод общего оператора	290
§ 21.7.	Несколько замечаний относительно общего метода	293
Глава 22.	Сходимость рядов Фурье	294
§ 22.1.	Сходимость степенных рядов и рядов Фурье	294
§ 22.2.	Функции с простым разрывом	295
§ 22.3.	Функция, имеющая непрерывные производные более высокого порядка	297
§ 22.4.	Улучшение сходимости ряда Фурье	298
§ 22.5.	Спектр мощности	299
§ 22.6.	Явление Гиббса	300
§ 22.7.	Сигма-множители Ланцоша	301
§ 22.8.	Сравнение методов сходимости	303
§ 22.9.	Техника дифференцирования по Ланцошу	304
Глава 23.	Непериодические функции. Интеграл Фурье	305
§ 23.1.	Цель главы	305
§ 23.2.	Обозначения и краткое изложение результатов	306
§ 23.3.	Интеграл Фурье	310
§ 23.4.	Преобразование Фурье некоторых функций	311
§ 23.5.	Функции с ограниченным спектром и теорема выборки	313
§ 23.6.	Теорема свертки	315
§ 23.7.	Эффект конечного суммирования	316
Глава 24.	Линейные фильтры. Сглаживание и дифференцирование	317
§ 24.1.	Введение	317
§ 24.2.	Пример простого сглаживающего фильтра	318
§ 24.3.	Пример построения фильтра	319
§ 24.4.	Фильтры вообще	320
§ 24.5.	Анализ простых формул для дифференцирования	321
§ 24.6.	Как избежать вычисления производных?	322

§ 24.7.	Метод Филона	323
§ 24.8.	Заключительные замечания	325
Глава 25.	Интегралы и дифференциальные уравнения	326
§ 25.1.	Содержание главы	326
§ 25.2.	Метод передаточной функции для интегрирования	327
§ 25.3.	Общие формулы интегрирования	331
§ 25.4.	Дифференциальные уравнения	332
§ 25.5.	Построение фильтров по методу Чебышева	334
§ 25.6.	Некоторые детали метода Чебышева	336
Глава 26.	Экспоненциальная аппроксимация	340
§ 26.1.	Введение	340
§ 26.2.	О нахождении формул, использующих экспоненты, когда показатели экспонент известны	340
§ 26.3.	Неизвестные показатели	342
§ 26.4.	Предупреждения	343
§ 26.5.	Экспоненты и многочлены	344
§ 26.6.	Остаточные члены	344
Глава 27.	Особенности	344
§ 27.1.	Введение	344
§ 27.2.	Пример интеграла с особенностью в бесконечности	345
§ 27.3.	Особенность в линейном дифференциальном уравнении	346
§ 27.4.	Общие замечания	349

часть IV

АЛГОРИТМЫ И ЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Глава 28.	Нахождение нулей	350
§ 28.1.	Алгоритмы и эвристические методы	350
§ 28.2.	Метод деления пополам для нахождения корня функции	351
§ 28.3.	Линейная интерполяция	352
§ 28.4.	Параболическая интерполяция	352
§ 28.5.	Некоторые общие замечания	353
§ 28.6.	Метод Берстоу для нахождения комплексных корней многочлена	355
Глава 29.	Системы линейных алгебраических уравнений	359
§ 29.1.	Введение	359
§ 29.2.	Метод исключения Гаусса	360
§ 29.3.	Варианты метода Гаусса	362
§ 29.4.	Метод Гаусса—Зайделя	363
§ 29.5.	Повышенная точность	364
§ 29.6.	Общие замечания	364
Глава 30.	Обращение матриц и собственные значения	365
§ 30.1.	Введение	365
§ 30.2.	Обращение матрицы методом исключения по Гауссу	365
§ 30.3.	Задача нахождения собственных значений	366
§ 30.4.	Наименьшие собственные значения	368
§ 30.5.	Несколько замечаний	368
Глава 31.	Некоторые примеры моделирования	369
§ 31.1.	Введение	369
§ 31.2.	Простой пример дискретного моделирования	370

§ 31.3. Пример моделирования складских операций	374
§ 31.4. Трехмерные крестики — нолики	375
§ 31.5. Общие замечания о дискретном моделировании	379
§ 31.6. Непрерывное моделирование	380
Глава 32. Случайные числа и методы Монте-Карло	381
§ 32.1. Понятие случайного числа	381
§ 32.2. Генерирование случайных чисел в машине, работающей в двоичной системе	382
§ 32.3. Генерирование случайных чисел на десятичной машине	386
§ 32.4. Другие распределения	386
§ 32.5. Метод Монте-Карло	388
§ 32.6. Еще одна иллюстрация метода Монте-Карло	389
§ 32.7. Метод жулика	390
Глава N+1. Искусство вычислять для инженеров и ученых	391
§ N+1.1. Важность вопроса	391
§ N+1.2. Что мы собираемся делать с ответом?	392
§ N+1.3. Что мы знаем?	393
§ N+1.4. Обдумывание вычислений	394
§ N+1.5. Повторение предыдущих шагов	395
§ N+1.6. Оценка усилий, необходимых для решения задачи	395
§ N+1.7. Изменения первоначального плана	396
§ N+1.8. Философия	397
§ N+1.9. Заключительные замечания	398
Литература	399

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Имя Р. В. Хемминга — известного американского ученого, бывшего президента ассоциации по вычислительным машинам, руководителя математической службы «Bell Telephone Laboratories» — и его работы в области вычислительной математики и теории информации достаточно хорошо известны и не нуждаются в особых рекомендациях. Трудно, однако, удержаться от использования предоставившейся возможности рекомендовать читателю замечательную книгу.

Книга «Численные методы для научных работников и инженеров» бесспорно является выдающимся явлением в математической литературе. Она удивительным образом сочетает широту охватываемого материала, глубину подхода к нему и практичность в лучшем смысле этого слова, нигде не переходящую в узкий практицизм.

Среди уже довольно многочисленных книг по вычислительной математике книга Р. В. Хемминга выделяется и по содержанию и по форме.

Прежде всего, в ней нашли широкое и полное отражение идеи П. Л. Чебышева. Не только в зарубежной, но и в нашей русской литературе многочисленные аспекты чебышевских идей и методов численного анализа не получали еще столь полного и широкого освещения. Другой особенностью книги, относящейся к ее содержанию, является большое внимание, уделяемое различного рода немногочленным приближениям. В книге достаточно подробно рассмотрена аппроксимация функции рациональными и экспоненциальными, а также функциями с ограниченным спектром. Последнее особенно интересно и имеет большое значение для практики применения численных методов.

Указанные особенности содержания легко объясняются заметным впечатком, наложенным на него личными научными интересами автора, и являются следствием единого и нового подхода к вычислительной математике — с точки зрения теории информации. Эта точка зрения проводится систематически, и ее преимущества будут легко замечены читателями.

Еще больший отпечаток наложили личные научные интересы и вкусы автора на форму изложения, стиль и манеру письма. Книга написана весьма субъективно, и от этого интерес к ней особенно возрастает.

Если верить бытующей «классификации», согласно которой работающие в области вычислительной математики делятся на тех, кто доказывает сходимостъ вычислительных процессов и существование решений, и тех, кто применяет вычислительные процессы и получает решения, то Р. В. Хемминг является видным представителем вычислителей второго из этих типов. Огромный личный опыт вычислителя не позволяет ему ограничиваться бесстрастным изложением того или иного вычислительного метода, не освещая своего отношения к нему. Многие методы иллюстрируются автором примерами из его собственной вычислительной практики. Эти качества особенно важны для книги по вычислительной математике, где «искусство вычислителя» и «маленькие хитрости» лишь в редких случаях не позволяют уменьшить вычислительную работу в сотню-другую раз или увеличить точность во столько же.

При изложении вычислительных методов автор уделяет большое внимание физической сущности рассматриваемых математических задач. В основу всей книги положены два тезиса, неоднократно повторяемых. Это

«цель расчетов — понимание, а не числа»

и

«прежде чем решать задачу, подумай, что делать с ее решением».

Большой интерес представляет ($N+1$)-я глава книги, посвященная вопросам организации вычислительной работы и взаимоотношениям вычислителей с заказчиками. Как справедливо отмечает автор, на эти темы писать не принято, несмотря на всю их практическую важность. Эта глава, разумеется, наиболее субъективна, и легко представить читателей, не разделяющих высказываемых автором воззрений. Для них хорошо процитировать лишь заключительный абзац, завершающий книгу. Впрочем, еще лучше, если читатель прочтет его в тексте.

При работе над переводом мы полностью сохранили структуру книги и стремились к тому, чтобы как можно точнее передать на русском языке текст и дух подлинника. Сохранена без изменения и библиография в конце книги; мы ограничились лишь указаниями на то, какие из цитируемых автором книг имеются в русском переводе. Несколько замечаний, которые счел возможным сделать редактор, относятся главным образом к согласованию терминологии или дополнительным литературным ссылкам. Все они вынесены в подстрочные примечания и их принадлежность редактору всюду оговорена.

Мы надеемся, что книга Р. В. Хемминга будет по достоинству оценена читателями. У нее есть все основания стать настольной книгой для всех, кто занимается вычислительной работой или связан с нею — от руководителей институтов и отделов до квалифицированных лаборантов.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

Эта книга написана для научных работников и инженеров, которые собираются использовать современные цифровые вычислительные машины как средство для своих исследований. Она может также служить первоначальным учебником численного анализа. Автор убежден, что таким читателям, для того чтобы они могли понять, какое отношение имеют полученные на машине результаты к их проблемам, нужен не справочник и не сводка отдельных результатов, а скорее связанное изложение основных идей вычислительной математики. Как утверждает девиз этой книги, мы ищем смысл, а не числа.

Книга отличается от имеющихся по следующим пунктам:

1. Есть много прекрасных книг, написанных с точки зрения людей, пользующихся арифмометрами; в этой книге предполагается, что будет использована большая цифровая вычислительная машина. Различие здесь не в том, что можно работать с большими задачами, а в том, что появляется совершенно другой подход к ним.

2. Имеется ряд очень хороших книг, которые являются собранием несвязанных глав (часто написанных разными авторами) и которые не в состоянии дать единое представление об области в целом. Одна из главных целей этой книги — показать, как можно объединить разные частные результаты в рамках общих идей и методов. Таким образом, читатель может надеяться понять отношение между некоторыми из многих различных формул для одной и той же цели. Он сможет также выводить много новых формул для удовлетворения своих требований.

3. Существует ряд хороших книг, написанных математиками для математиков. В этой книге мы старались подать материал в форме, удобной для тех, кто больше заинтересован в использовании новых мощных вычислительных средств, чем в красоте вывода формул или в дальнейших исследованиях.

4. В большинстве книг преобладает использование для численных методов полиномиальных приближений. При таком подходе остаточный член обычно выражается через производную высокого порядка, которую редко удается оценить даже и грубо.

В нашей книге используется метод функций с ограниченным спектром, который хорошо известен электротехникам, но мало исполь-