

Б.Н. Юрьев

**Индуктивное сопротивление
крыльев аэроплана**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
Б11

Б11 **Б.Н. Юрьев**
Индуктивное сопротивление крыльев аэроплана / Б.Н. Юрьев – М.: Книга
по Требованию, 2018. – 121 с.

ISBN 978-5-458-32101-3

ISBN 978-5-458-32101-3

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2018

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2018

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

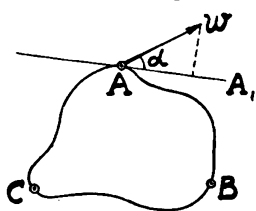
www.samizday.ru/reprint

Ч А С Т Ь I.

ГЛАВА I.

Основы теории вихрей.

Напомним вкратце основные положения теории вихрей. Крайне важным в гидродинамике является понятие о „циркуляции скорости“



Фиг. 1.

по любому замкнутому контуру. Проведем внутри текущей жидкости какой-нибудь контур ABC (фиг. 1). Тогда в любой точке этого контура (напр., A) жидкость будет течь с некоторой скоростью w . Если в точке A провести касательную AA_1 и спроектировать на нее скорость w , то мы получим $w \cos \alpha$, где α — угол между скоростью и касательной. Умножая эту проекцию на длину элемента дуги этого контура dL , мы получим элементарную циркуляцию; обозначим ее dJ , тогда:

$$dJ = w \cos \alpha dL.$$

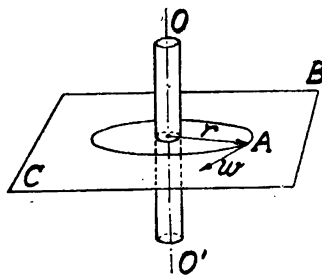
Если просуммируем эту величину по всему контуру, то получим циркуляцию по замкнутому контуру ABC

$$J = \oint w \cos \alpha dL, \quad (1)$$

здесь значек $\oint$ показывает, что взят замкнутый контур.

При помощи циркуляции определяется, завихрено ли течение жидкости, или нет. Если циркуляция по любому контуру внутри жидкости не равна нулю, то это означает, что движение завихрено; если равна нулю, — то не завихрено.

Наиболее простым случаем завихрения является прямолинейный вихревой шнур (фиг. 2). В нем жидкость завихрена равномерно. Ближайшее исследование показывает, что такой шнур просто вращается как твердое тело около своей оси OO' . Жидкость снаружи может быть и не завихрена. Однако, в последнем случае, как показывает подробное изучение, жидкость не будет находиться в покое, а придет



Фиг. 2.

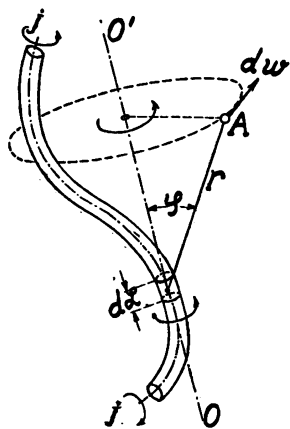
в особое циклическое движение, при чем частицы хотя и будут бегать по круговым траекториям, однако, не будут иметь угловой скорости. Далее оказывается, что циркуляция скорости по любому контуру, охватывающему вихревой шнур, равна постоянной величине. Таким образом, силу вихря можно измерять циркуляцией вокруг него. Если через контур проходят несколько вихрей, то имеет место знаменитая теорема Стокса — циркуляция по контуру равна алгебраической сумме циркуляций отдельных вихрей, через него проходящих. Эта теорема позволяет находить скорости в потоке, вызванные вихрями. В случае одного бесконечного вихревого шнура, в силу симметрии, находим для кругового контура, лежащего в плоскости СВ, перпендикулярной к оси вихря, величину циркуляции:

$$J = w 2\pi r,$$

отсюда получаем скорость, им вызванную:

$$w = \frac{J}{2\pi r},$$

где r — расстояние исследуемой точки от оси вихря. Если имеется несколько вихрей, то применяется „принцип наложения“ или „независимости действия“, по которому полная вызванная вихрями скорость в данной точке равна геометрической сумме скоростей, вызванных отдельными вихрями.



Фиг. 3.

Относительно вихрей имеются теоремы Гельмгольца ¹⁾:

- 1) циркуляция скорости вокруг вихревого шнура по всей его длине остается величиной постоянной.
- 2) циркуляция скорости вокруг вихревого шнура во все время его движения остается величиной постоянной.
- 3) вихревой шнур все время остается вихревым шнуром (теорема о неуничтожаемости вихрей).

Из этих теорем следует, что вихревой шнур должен или простирается в бесконечность обоими концами, или должен замыкаться сам на себя, образуя вихревое кольцо, или он может опираться концами на границы жидкости, т.е. на твердое тело или на ее свободную поверхность.

¹⁾ Подробнее см. курсы гидродинамики, напр., Н. Е. Жуковский, Теоретические Основы Воздухоплавания; Аппель, Руководство Теоретической Механики, том III; А. Я. Саткевич, Аэродинамика и др.

Мы видим, что бесконечный прямолинейный вихревой шнур вызывает движение жидкости по формуле

$$w = \frac{J}{2\pi r}.$$

В случае криволинейных шнуров необходимо выяснить действие бесконечно малого элемента вихря на жидкость в данной точке. Оказывается, что скорость dw , вызванная элементом длиной dL в точке А (фиг. 3), лежащей на расстоянии r от центра элемента, может быть выражена так:

$$dw = \frac{J}{4\pi r^2} \sin \varphi dL.$$

Здесь φ — угол между r и осью элемента OO' , J — циркуляция вокруг вихревого шнура — величина по всей длине постоянная. Как видим, получается полная аналогия закону Био-Савара, дающему действие элемента электрического тока на магнитный полюс в точке А. Чтобы получить полное действие криволинейного шнура, нужно просуммировать геометрически все скорости dw от всех элементов по его длине, пользуясь принципом независимости.

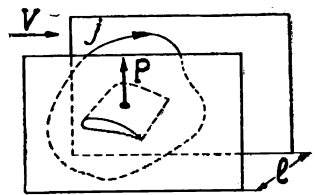
Направление скорости dw легко найти: оно совпадает с той скоростью, с которой точка А вращалась бы около оси OO' в направлении вращения элемента шнура. Легко видеть, что в случае криволинейных шнуров или наличия нескольких прямолинейных, они будут действовать сами на себя и друг на друга. Этим объясняется, например, сложное движение вихревых колец и вращение вихрей, отброшенных гребным винтом.

Очень важна теорема Н. Е. Жуковского о поддерживающей силе крыла (фиг. 4). Им доказано, что в случае плоскопараллельного потока получается подъемная сила P только в том случае, если вокруг крыла имеется в жидкости некоторая циркуляция J (фиг. 4), при чем, если мы берем участок крыла длиной l , то эта сила найдется по формуле:

$$P = \rho J V l,$$

где ρ — массовая плотность воздуха и V — скорость потока вдали от крыла.

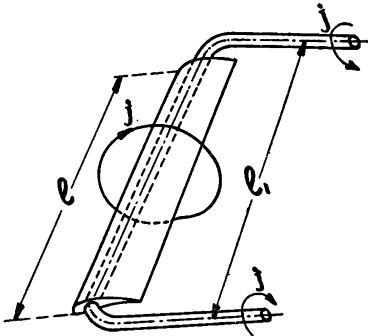
Направление силы P получится поворотом вектора скорости на прямой угол в сторону, противоположную направлению циркуляции. Крыло, следовательно, равносильно некоторой системе вихрей с общей циркуляцией J , идущих внутри крыла. Эти воображаемые вихри и



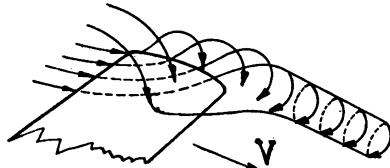
Фиг. 4.

названы проф. Н. Е. Жуковским „присоединенными“. В случае бесконечно длинного крыла и вихри уходят в бесконечность, удовлетворяя теореме Гельмгольца.

Возникает вопрос, что же произойдет, если мы возьмем вместо бесконечного крыла крыло с конечным размахом l ?



Фиг. 5.

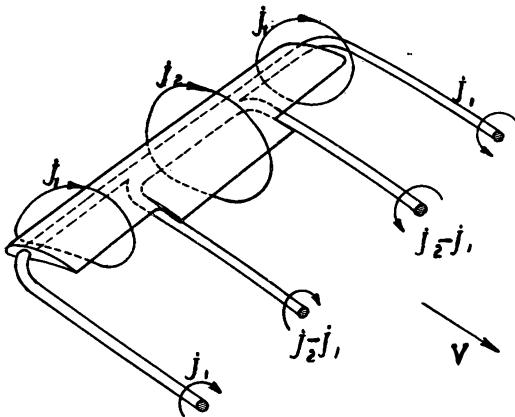


Фиг. 6.

С точки зрения гидродинамической присоединенные вихри не могут окончиться внезапно: они должны выйти из концов крыла в виде „усов“. Эти усы тотчас же по выходе из крыла подхватятся

общим течением жидкости и пойдут назад в бесконечность, давая схему, изображенную на фиг. 5. К этой же схеме легко притти путем

элементарных соображений. Ясно, что под крылом воздух сжат, а над ним разрежен. Вследствие этого струи воздуха будут на краю крыла двигаться от повышенного давления к пониженному, образуя зализы (фиг. 6). Другими словами, получится закручивание воздуха на краю крыла, которое общим течением жидкости вытянется в бесконечный вихре-



Фиг. 7.

вой шнур. Для простоты в практических расчетах можно заменять вихри, идущие внутри крыла, одним шнуром, проходящим через центр давления крыла; таким образом, крыло с усами можно заменить одним П-образным вихревым шнуром с циркуляцией J (фиг. 5). Так как наиболее сильно действуют на крыло элементы вихрей, близкие к

нему, то можно считать с достаточной точностью, что оси вихревых усов идут все время совпадая с направлением потока параллельно друг другу на расстоянии l , несколько большем размаха крыльев l . Если подъемная сила на единицу длины лонжеронов постоянна, то с крыла будут сбегать лишь два уса, если переменна, то несколько, как на фиг. 7, или даже бесконечное множество, в виде завихренного слоя, как на фиг. 8.

Нам нужно теперь определить величину скорости в какой-либо точке жидкости А, вызванной прямолинейным вихревым шнуром циркуляции J (фиг. 9). Возьмем бесконечно малый элемент этого шнура длиной dL . Тогда по предыдущему

$$dw = \frac{J}{4\pi r^2} \sin \varphi dL.$$

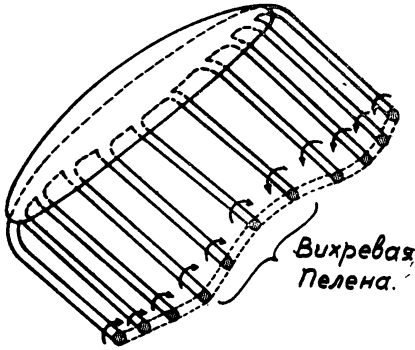
Легко видеть, что

$$\overline{CD} = r d\varphi \text{ и } dL = \frac{\overline{CD}}{\sin \varphi} = \frac{r d\varphi}{\sin \varphi}$$

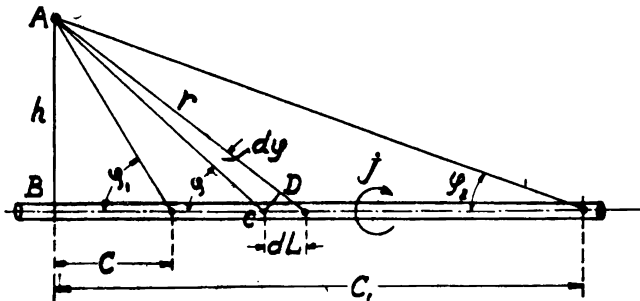
Далее $r = \frac{h}{\sin \varphi}$, где h — длина

перпендикуляра из точки А на ось вихря, следовательно:

$$dL = \frac{h}{\sin^2 \varphi} d\varphi.$$



Фиг. 8.



Фиг. 9.

Подставляя полученные величины в выражение скорости, найдем

$$dw = \frac{J \sin^2 \varphi}{4\pi h^2} \cdot \sin \varphi \cdot \frac{h d\varphi}{\sin^2 \varphi} = \frac{J}{4\pi h} \cdot \sin \varphi d\varphi.$$

Для получения полной скорости суммируем действие всех элементов шнура в пределах углов от φ_1 до φ_2 и получаем:

$$w = \frac{J}{4\pi h} \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \sin \varphi \, d\varphi = \frac{J}{4\pi h} (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) \quad (1')$$

В случае бесконечного шнура имеем $\varphi_2 = 0$ и $\varphi_1 = \pi$ и

$$w = \frac{J}{2\pi h} \quad (2)$$

В случае шнура с одним концом, идущим в бесконечность, и другим, лежащим на перпендикуляре АВ, — назовем его полшнуром, — найдем

и

$$\varphi_2 = 0; \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \quad w = \frac{J}{4\pi h} \quad (3)$$

Если концы шнура отстоят на расстоянии s и c_1 от подошвы перпендикуляра В (фиг. 9), то замечая, что

$$\cos \varphi_1 = \frac{c}{\sqrt{h^2 + c^2}} \quad \text{и} \quad \cos \varphi_2 = \frac{c_1}{\sqrt{h^2 + c_1^2}},$$

получим из формулы (1') новое выражение для w , освобожденное от тригонометрических величин:

$$w = \frac{J}{4\pi h} \left(\frac{c_1}{\sqrt{h^2 + c_1^2}} - \frac{c}{\sqrt{h^2 + c^2}} \right). \quad (4)$$

Величину s следует брать со знаком минус, когда концы шнура лежат по разные стороны от подошвы перпендикуляра В.

Если один конец шнура уходит в бесконечность ($c_1 = \infty$), а другой лежит на расстоянии s от точки В, то формула (4) принимает вид

$$w = \frac{J}{4\pi h} \left(1 - \frac{c}{\sqrt{h^2 + c^2}} \right). \quad (4')$$

ГЛАВА II.

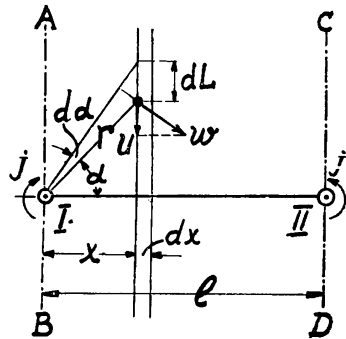
Вывод теоремы проф. Н. Е. Жуковского для крыла конечного размаха.

Точный вывод теоремы Н. Е. Жуковского для бесконечного крыла довольно сложен; приходится определять давление в струйке жидкости, обтекающей контур по уравнению Бернулли и затем суммировать давление по всей поверхности профиля. Однако, в случае конеч-

ного крыла с вихревыми усами эта теорема доказывается очень легко. Сразу видно, что жидкость будет гнаться вихревыми усами вниз по всей ленте воздуха, идущей между ними; — снаружи же один вихрь гонит жидкость вниз, а другой вверх. Так как по законам механики сила, поддерживающая крыло в воздухе, может получиться лишь за счет создания в воздушной массе количества движения, направленного в противоположную действию силы сторону, то мы и займемся вычислением количеств движения, создаваемого вихрями. Так как вблизи крыла воздух сжат и лишь на значительном расстоянии от него все давления обращаются в скорость, то мы и будем определять количество движения вдалеке от крыла, где влияние самого крыла может быть отброшено и где останется лишь влияние двух вихревых шнуров. Проведем через точку, лежащую вдали от крыла, плоскость, перпендикулярную к вихрям. Она разрежет вихревые усы и мы получим на ней картину, изображенную на фиг. 10.

Расстояние между вихрями будет близким к размаху крыла, — мы примем его здесь равным размаху l .

Будем искать количество движения, создаваемое в вертикальном направлении сперва одним вихрем с циркуляцией J в бесконечно узкой полоске шириною dx и длиною, равною единице, по направлению полета.



Фиг. 10.

По предыдущему имеем:

$$w = \frac{J}{2\pi r}.$$

Ищем проекцию скорости w на вертикаль. Вводя угол α , находим:

$$u = w \cos \alpha,$$

но

$$r = \frac{x}{\cos \alpha}; \text{ следовательно, } u = \frac{J}{2\pi x} \cos^2 \alpha.$$

Количество движения, имеющееся в параллелепипеде длиною по направлению полета 1, высотой dL и шириною dx , может быть написано, считая массовую плотность воздуха равною ρ , таким образом:

$$u dm = u \rho \cdot 1 \cdot dx \cdot dL.$$

Из чертежа легко усмотреть, что

$$dL = \frac{rd\alpha}{\cos\alpha} = \frac{x \cdot d\alpha}{\cos^2\alpha},$$

подставляя в предыдущую формулу эту величину, найдем:

$$u \, dm = \rho \frac{J}{2\pi} dx \cdot d\alpha.$$

Обозначим количество движения во всей полоске шириною dx величиною dM , тогда

$$dM = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} u \, dm = \rho \cdot \frac{J}{2\pi} dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\alpha = \frac{1}{2} \rho J dx.$$

Получилось очень интересное выражение для dM , — оно не зависит от x . Следовательно, количество движения во всех полосках одинаковой ширины dx будет одно и то же. Так как у нас имеются два вихря, то в области между ними их действие суммируется и количество движения каждой полоски удвоится и будет равно $\rho J dx$; снаружи же, где вихри действуют в противоположные стороны, количество движения по вертикали равно нулю. Следовательно, для получения полного количества движения нам придется суммировать лишь полоски, лежащие между вихрями.

Итак, находим

$$2M = \int_0^l 2dM = \rho J \int_0^l dx = \rho J l.$$

Это выражение дает количество движения по вертикали в полосе длиной l по направлению полета. Подъемная же сила равна секундно-образующемуся количеству движения. Ясно, что через рассматриваемую плоскость сечения в секунду будет проходить воздушная колонна длиной, равной не l , а V . Следовательно, подъемная сила окончательно выражается так:

$$P = \rho J V, \quad (5)$$

что и дает теорему Н. Е. Жуковского. Строго говоря, подъемная сила равна лишь проекции этой силы на вертикаль, но, ввиду малого угла ее наклона, мы им пренебрегаем, считая его $\cos \text{инус} = 1$. На этой теореме основана вся излагаемая здесь теория.

ГЛАВА III.

Влияние вихревых усов на крыло.

Разберем сперва действие на крыло его собственных усов. На фиг. 11 изображено монопланное крыло с соответствующими вихрями в двух проекциях. Рассмотрим сперва действие полушнура I на точку A, находящуюся на расстоянии x от его оси. По формуле (3) он вызовет в точке A скорость

$$w = \frac{J}{4\pi x},$$

направленную вниз. При изменении x скорость будет изменяться по гиперболическому закону, как это и изображено на фиг. 11.

Ищем среднюю по размаху крыла величину вертикальной скорости w^1) и удваиваем ее, так как у нас на самом деле имеется два вихря. Назовем ее w_{cp} . Пусть размах крыла l , расстояние между вихрями l_1 и

$$e = \frac{l_1 - l}{2},$$

тогда

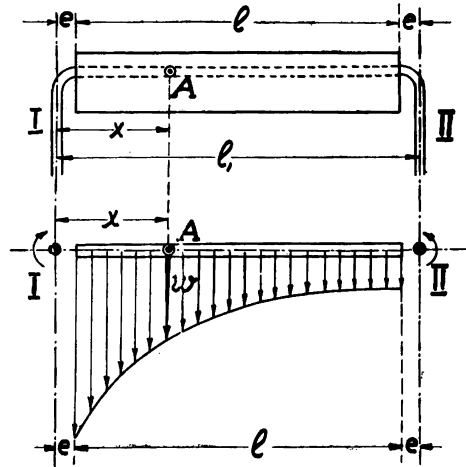
$$w_{cp} = 2 \frac{1}{l} \int_e^{l+e} w dx = \frac{J}{2\pi l} \int_e^{l+e} \frac{dx}{x} = \frac{J}{2\pi l} \ln \frac{l+e}{e}; \quad (6)$$

подставляя величину e , найдем

$$w_{cp} = \frac{J}{2\pi l} \ln \frac{l_1 + l}{l_1 - l} = \frac{J}{2\pi l} \epsilon, \quad (7)$$

где ϵ называется коэффициентом влияния крыла на самого себя или „коэффициентом самоиндукции“ монопланного крыла.

¹⁾ Т.-е. дающую площадь прямоугольника $w_{cp} l$, равную удвоенной площади, заштрихованной на фиг. 11.



Фиг. 11.

Многочисленные опыты с монопланными крыльями дают для расстояния между вихрями величину

$$l_1 \cong l, 05.$$

Тогда

$$\varepsilon = \ln \frac{l_1 + l}{l_1 - l} \cong 4,$$

следовательно, средняя скорость

$$w_{cp} = \frac{2J}{\pi l}.$$

Скорость w не постоянна по размаху, а довольно сильно изменяется. Можно задаться вопросом, при каком распределении циркуляции по крылу получится постоянная скорость w ? Оказывается, что для соблюдения этого условия необходимо изменять циркуляцию по закону полуэллипса по длине крыла; тогда у крыла получится не два вихревых уса, а целая вихревая поверхность, как на фиг. 8. В этом случае коэффициент влияния ε точно равен 4. У прямоугольных крыльев, однако, по опытам и по более точным вычислениям циркуляция не постоянна и изменяется по кривой, изображенной пунктиром на фиг. 12. Следовательно, для получения схемы фиг. 11, крыло должно



Фиг. 12.

к концам или расширяться, или иметь на концах большие углы атаки. Такие крылья будут подробно разобраны во второй части этой книги при изложении более точной теории.

Однако, опыты показывают, что и для обычных очертаний крыльев можно с достаточной точностью брать во всех случаях величину $\varepsilon = 4$ (по исследованиям Betz'a для прямоугольного крыла следует брать $\varepsilon = 4,2$).

Чтобы определить скорость w_{cp} , нам нужно знать циркуляцию вокруг крыла. Для ее определения пользуемся теоремой проф. Н. Е. Жуковского.

Из формулы (5) находим

$$J = \frac{P}{\rho V l}. \quad (8)$$

Подъемную силу крыла выражают в России при помощи абсолютного коэффициента подъемной силы C_y , получаемого опытным путем, и площади крыла $S \text{ м}^2$ следующим образом:

$$P = \rho C_y S V^2. \quad (8')$$