**Г.Е. Тимердинг**

# Золотое сечение

**Москва**
**«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Г11

**Г.Е. Тимердинг**
Г11 Золотое сечение / Г.Е. Тимердинг – М.: Книга по Требованию, 2013. – 90 с.

**ISBN 978-5-458-25147-1**

Эта непритязательная маленькая книга не требует длинного предисловия. Она имеет целью изложить в связной и законченной форме те соображения из области элементарной математики, которые относятся к золотому делению, так как при школьном преподавании этого обыкновенно не делается. При этом предполагаются только самые элементарные математические познания, приблизительно такие, каких достигают ученики третьего класса, так что даже мало подготовленный читатель не встретит никаких затруднений. Во второй части подвергнуто критическому исследованию то значение, которое имеет золотое деление в эстетике. Это исследование по возможности сокращено, чтобы не увеличить чрезмерно размеров книги. Возможно, что в некоторых местах будет ощущаться необходимость в более подробном рассмотрении некоторых областей искусства и природы, а также будет казаться, что недостаточно приняты во внимание новейшие работы из области экспериментальной эстетики. Приводимые попутно литературные указания помогут читателю в дальнейшем изучении вопроса.

**ISBN 978-5-458-25147-1**

# ВВЕДЕНИЕ

Золотое деление представляет очень простую, но с давних пор широко известную главу элементарной геометрии. Оно занимает прочное место в школьном преподавании, но при этом его основная сущность и то особое значение, которое ему приписывают, по большей части недостаточно разъясняются. Причина этого заключается в том, что при изложении геометрии руководствуются, главным образом, основным трудом Эвклида, а в его сочинении те точки зрения, которые привели первоначально к золотому делению, в угоду логической последовательности, почти отброшены. Чтобы разъяснить эти точки зрения, необходимо изложить вопрос о золотом делении отдельно. Такие отдельные изложения уже имеются, но они недостаточно доступны, и в них недостаточно отчетливо изложено как-раз то, что служит к разъяснению сущности и значения золотого деления.

В основе такого рода исследований редко лежит интерес чисто геометрический. По большей части с ними связываются побочные идеи, а именно мысль о том, что золотое деление может дать объяснение тому эстетическому впечатлению, которое производят некоторые образы, и даже объяснение природы красоты вообще, поскольку это касается зрительных образов. Попытки дать такое объяснение начались в глубокой древности и не прекращаются до настоящего времени. Даже при кратком изложении золотого деления этот вопрос едва-ли может быть обойден. Каждый, кто хотя что-нибудь услышит о золотом делении, захочет узнать, какое это имеет отношение к его пресловутому эстетическому значению. Без сомнения, тот ответ, который мы теперь можем дать на этот вопрос, не оправдает многих надежд на возможность простого объяснения эстетического впечатления от геометрических соотношений сведением их к золотому делению. Но и этот отрицательный вывод не лишен значения. Некоторое разъяснение природы красоты зрительных образов при этом все-таки будет достигнуто.

Вообще говоря, появление мысли о том, чтобы выделить отношения, которые наиболее способны производить эстетическое впечатление, объясняется тем, что гармония в музыке действительно может быть сведена к такого рода отношениям. Совершенно естественным кажется допустить, что то, что справедливо по отношению к уху, верно и для глаза, что подобно тому как приятное впечатление производят те звуки, у которых число колебаний находится в определенных отношениях, и глаз получит удовольствие от определенных отношений в пространственных измерениях. Мысль о том, что в основе гармонии музыки лежит число, исходит, как известно, от пифагорейцев, и, вероятно, именно от самого основателя этой школы. Поэтому наперед представляется весьма вероятным, что попытки аналогично объяснить гармонию пространственных образов исходят тоже от этой школы. Так оно и было в действительности. Но насколько просто и ясно объяснение пифагорейцев музыкальной гармонии числовыми соотношениями, настолько трудно найти исчерпывающие указания для развития аналогичного объяснения гармонии пространственных образов. Положение вещей в этом случае гораздо более запутано, и, если мы не погрузимся в кропотливое историческое исследование со всем тем невыясненным и спорным, что с ним связано, мы должны будем ограничиться тем, что проследим некоторый ход мыслей, который до известной степени вероятно соответствует историческому развитию, не имея, однако, возможности утверждать с уверенностью, что историческое развитие шло именно по этому пути.

Объяснение звуковой гармонии простыми числовыми соотношениями стоит в тесной связи с учением пифагорейцев о числе. Пифагорейцы учили, что число есть основа и сущность всякого бытия, и подтверждение этого находили в том, что звуковая гармония связана с определенными числовыми соотношениями. Сознание этой связи привело их к тому, чтобы, кроме натуральных чисел, рассматривать еще и дробные, которые они сделали предметом изучения особой отрасли науки. Эта наука называется логистикой. Слово логистика происходит от греческого слова λόγος, которое, согласно особой пифагорейской терминологии, означало арифметическое отношение, и переносный смысл которого получил, как известно, такое широкое значение. Так как звуковая гармония покоится на определенных численных значениях отношений, со словом λόγος непосредственно связывается понятие о гармонии. Но гармония в ее первоначальном смысле, как ее понимали пифагорейцы, не заключалась только в музыкальных звуках, но, разумея под гармонией стройность и порядок, они распространяли ее на всю совокупность реально существующего. В строении вселенной, в расположении и движении светил находили они ту самую гармонию, которая заключается в красивом звуке. Это и есть знаменитая гармония сфер. Так как λόγος означает причину гармонии, он заключает в себе источник красоты и стройности вселенной; коротко говоря — то, что пифагорейцы называли словом κόσμος.

До сих пор мысли пифагорейцев нам достаточно ясны и понятны. Затруднения встретятся тогда, когда мы коснемся основоначал геометрии и вместе с тем сущности пространственного расположения. Пифагор изучал геометрию попутно с арифметикой и, видимо, с одинаковой любовью. При этом, однако, он пришел к тому выводу, что арифметика и геометрия в своих основных понятиях глубоко различны. Это различие заключается в природе иррационального. Открытие иррациональности — одно из величайших завоеваний человеческого духа. Предполагают, что Пифагор сделал это открытие при изучении диагонали квадрата. Он нашел, может-быть, к своему величайшему удивлению, что сторона и диагональ квадрата находятся в таком отношении, которое не может быть выражено ни одним числом. Это обстоятельство он выразил словом „ἄλογος", что означает — без отношения, а по-латыни оно было переведено словом „irrationalis", которое происходит от слова „ratio" — отношение.

О том, как Пифагор справился с этим необыкновенным обстоятельством, мы можем делать одни только предположения. Повидимому, на этом основано его особое воззрение на природу геометрических величин. В этом воззрении содержится определенное понимание понятия о бесконечном. Пифагор объяснял иррациональность отношения стороны и диагонали квадрата тем, что оба эти отрезка не состоят, подобно числам, из определенного конечного числа частей или единиц, а элементами, из которых они строятся, служат содержащиеся в них точки. Эти точки существуют, однако, не в конечном числе, исчисление их превосходит все человеческие возможности, короче сказать — число их бесконечно. Иррациональное отношение сводится таким образом к отношению двух бесконечно больших чисел, которое не может быть выражено отношением двух конечных чисел. В действительности, иррациональное отношение может быть выражено как угодно точно отношением двух конечных чисел, стоит лишь выбрать эти числа достаточно большими, а эта мысль уже очень близка к заключению, что иррациональные числа могли бы быть и точно выражены, если бы имелись в распоряжении бесконечно большие числа.

Во всяком случае представление о линии, как о совокупности ее точек, есть шаг вперед по этому пути; основные свойства геометрических величин теперь связываются с определенной идеей, которая не поддается чувственному восприятию и не может быть объяснена. Это, однако, не служило препятствием для пифагорейцев в признании этой идеи так же, как и для Джордано Бруно (Giordano Bruno), Галилея (Galilei) и Кавальери (Cavalieri), которыми она была снова принята в семнадцатом столетии нашей эры. Наоборот, пифагорейцы думали, что, идя по этому пути, они раскроют самую сущность пространственного мира. Им казалось, что таким образом можно объяснить, почему явления и соотношения в той действительности, которая познается опытом, гораздо более сложны и запутаны, чем те простые гармонии, которые они находили в числах и которые составляли для них своего рода высший мир и высшую действительность. Ясные и поддающиеся представлению числовые соотношения заключают в себе божественный порядок и незыблемость; в соотношениях же пространственных и временных протяжений, которые могут быть иной раз точно выражены, а иной раз только приближенно, обнаруживается неполное совершенство действительности; в них содержится, рядом с признаками порядка и разумности, нечто, не поддающееся разъяснению и поэтому несовершенное, неразумное, „иррациональное".

Если божественная гармония все же находит себе, хотя бы частичное, отражение в окружающей несовершенной действительности, то это может проявиться лишь в том, что мы ощущаем в вещах известные гармонические соотношения. Чтобы эти соотношения найти, мы должны искать такие фигуры, которые на нас производят впечатление наибольшего совершенства. Такими фигурами являются правильные фигуры. Но эти фигуры двоякого рода — пространственные и плоские. Греки имели сведения, по всей вероятности полученные ими с востока, об обоего рода фигурах. Во всяком случае Пифагору они были уже известны. Между обоего рода фигурами существует следующее замечательное различие. В плоскости существует бесчисленное множество правильных многоугольников, а именно с любым числом сторон, начиная с трех; что касается пространства, то оказывается, что правильных многогранников имеется только ограниченное число, а именно пять так называемых тел Платона. Платон вынес их за пределы пифагорейской школы, рассмотрев их в своем „Тимее", и считал их основанием развития пространственной действительности, в частности четырех земных элементов и пятого надземного.

Как-раз эти пять тел, грани которых суть правильные трех-, четырех- и пятиугольники, послужили основанием особому изучению этих простейших многоугольников. Правильный треугольник считался вавилонянами основной фигурой; правильный четырехугольник, иначе квадрат, представляется как первая фигура при всяком геометрическом рассмотрении и встречается уже у египтян на каждом шагу. Правильный пятиугольник сравнительно не так легко получить, но тем более удивительными кажутся его свойства, когда он открыт. Этим объясняется то, что у пифагорейцев как-раз с правильным пятиугольником была связана мысль о таинственных силах и свойствах. Но эти свойства обнаруживаются лишь тогда, когда рядом с обыкновенным правильным пятиугольником будет рассмотрена та звезда, которая получается при последовательном соединении через одну всех вершин обыкновенного пятиугольника, иными словами фигура, составленная диагоналями пятиугольника. Это так называемая пентаграмма, которая играла большую роль во всех магических науках до последнего времени, и теперь еще во многих местностях употребляется народом в виде „ведьминой стопы" (Drudenfuss), как средство защиты от злых духов, в частности, для охраны спящего от ведьм и от производимого ими кошмара. Вспоминается место из Гетевского „Фауста" *, где

* Приведем это место в переводе Н. Холодковского:

*Мефистофель*. Нет, трудновато выйти мне теперь.
Тут кое-что мешает мне немного:
Волшебный знак у вашего порога.

*Фауст*. Не пентаграмма-ль этому виной?
Но как же, бес, пробрался ты за мной?
Каким путем впросак попался?

*Мефистофель*: Изволили ее вы плохо начертить,
И промежуток в уголку остался,
Там, у дверей — и я свободно мог вскочить.

*Прим. ред.*

Мефистофель был лишен возможности выйти из комнаты Фауста благодаря пентаграмме, расположенной на пороге так, что одна из вершин была направлена внутрь комнаты, а вершина противоположного вогнутого угла, вследствие несовершенства чертежа, содержала маленькое отверстие, так что дух мог только войти в комнату, а выйти никак не мог:

„Dass ich hinausspaziere
Verbietet mir ein kleines Hindernis,
Der Drudenfuss auf Eurer Schwelle“.

После того, как Мефистофель усыпил Фауста, который не хотел его выпустить, послушные ему мыши и крысы должны были прогрызть вершину неприкосновенной для него пентаграммы.

По какой причине пентаграмме приписывали такую чудодейственную силу, мы лучше всего поймем, если рассмотрим его действительные геометрические свойства. Эти свойства приведут нас к золотому делению, и такой подход к нему нам кажется наиболее простым, естественным и наглядным. Подход Эвклида (II, 18) к делению отрезка золотым сечением не дает возможности судить о том, как пришли к постановке именно этой задачи. Это делается понятным только при рассмотрении правильного пятиугольника или десятиугольника, если бы при этом проследить естественный ход развития мыслей, начиная от самого построения этих фигур. Это именно мы в последующем прежде всего и попытаемся сделать.

## ПЕРВАЯ ЧАСТЬ

### Математическая теория золотого сечения.

Мы будем исходить из того, что окружность круга разделена на пять частей. Эта задача практически разрешима без знания теоретического способа, и это соответствует ходу исторического развития, так как первое построение несомненно было сделано именно так. Тот факт, что радиус круга шесть раз укладывается на окружности, был одной из раннее всего известных геометрических истин. Если мы раздвинем ножки циркуля на расстояние немного большее, чем радиус, приблизительно такое, чтобы оно пять раз отложилось на окружности, а затем полученный остаток опять разделим приблизительно на пять частей, то мы быстро этим способом разделим окружность на пять равных частей.

Предположив, что это сделано, соединим пять под ряд лежащих на окружности точек деления *A, B, C, D, E*, как мы уже упоминали, двумя различными способами: во-первых, каждую из точек деления соединим с непосредственно следующей за ней, во-вторых, последовательно соединим каждую точку с точкой, лежащей через одну (рис. 1). Первая операция дает нам обыкновенный выпуклый пятиугольник, вторая — звездчатый пятиугольник или пентаграмму. Каждая сторона пентаграммы пересекается двумя другими. Точки пересечения опять составляют совокупность вершин правильного пятиугольника $FGHJK$, стороны которого лежат на сторонах пентаграммы. Рассмотрим для примера четыре точки $A$, $J$, $K$, $C$, лежащие на стороне $AC$. Непосредственно ясно, что рас-

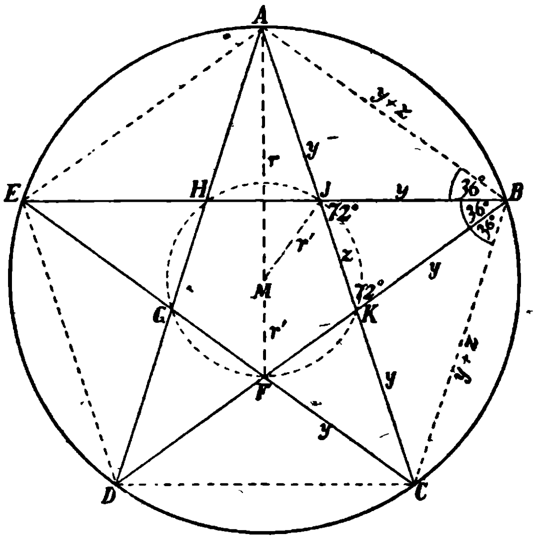


Рис. 1.

стояние $AJ$ и $KC$ равны. Их общую величину обозначим буквой $y$. Расстояние $JK$ обозначим буквой $z$. Величины соответствующих отрезков на других сторонах очевидно те же, например: отрезки $BJ$ и $BK$ оба равны $y$. Таким образом, треугольник $JBK$ — равнобедренный. Угол этого треугольника при вершине $B$ — вписанный и опирается на дугу, рав-