

Марков Андрей Андреевич

Исчисление вероятностей

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 37-053.2
ББК 74.27я7
А65

А65 **Андрей Андреевич М.**
Исчисление вероятностей / Марков Андрей Андреевич – М.: Книга по Требованию, 2023. – 388 с.

ISBN 978-5-519-95458-7

На титульном листе: К 200-летию юбилею закона больших чисел

ISBN 978-5-519-95458-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг — не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель — вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания — решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Предисловіе 2-го изданія.

Въ этой книгѣ я излагаю исчисленіе вѣроятностей какъ одинъ изъ отдѣловъ математики, не занимаясь подробнымъ разсмотрѣніемъ всѣхъ возможныхъ, болѣе или менѣе важныхъ, приложеній его.

Не вдаваясь въ длинныя разсужденія объ основаніяхъ исчисления вѣроятностей, я стараюсь ясно поставить положенія, необходимыя для построенія извѣстныхъ теорій, приводящихъ къ вопросамъ чистаго анализа, которымъ и посвящена моя книга.

Вмѣстѣ съ тѣмъ я, по возможности, избѣгаю излишнихъ положеній, хотя бы и общепринятыхъ; избѣгаю я также сомнительныхъ разсужденій, въ особенности облеченныхъ въ форму математическихъ доказательствъ, ставя на первомъ планѣ возможную точность и строгость выводовъ и заключеній.

Важную роль въ исчисленіи вѣроятностей, какъ и въ другихъ отдѣлахъ математики, играютъ приближенныя формулы. Къ такимъ формуламъ приходится прибѣгать не только въ тѣхъ случаяхъ, когда выводъ точныхъ формулъ представляетъ чрезвычайныя затрудненія или сами эти формулы отличаются чрезвычайною сложностью, но и въ тѣхъ случаяхъ, когда вычисленія по точнымъ формуламъ требуютъ хотя бы и простыхъ, но крайне продолжительныхъ вычисленій.

Для правильнаго примѣненія приближенной формулы важно имѣть надлежащую оцѣнку ея погрѣшности.

Однако, имѣя въ виду цѣли прикладной математики, нельзя совершенно отказаться и отъ приближенныхъ формулъ, остающихся, по той или иной причинѣ, безъ оцѣнки ихъ погрѣшности. Подобныя формулы встрѣчаются и въ моей книгѣ.

Слѣдуетъ замѣтить, что въ приложеніяхъ къ изслѣдованіямъ природы вопросъ о погрѣшности формулъ получаетъ особый характеръ; ибо эти изслѣдованія относятся къ величинамъ, которыя неизбѣжно остаются не вполне опредѣленными, и потому исчезаетъ возможность математической точности.

Второе изданіе нѣсколько отличается отъ перваго. Мною сдѣланы нѣкоторыя измѣненія и дополненія въ текстѣ; вмѣстѣ съ тѣмъ я расширилъ указанія литературы, не задаваясь однако цѣлью дать полный списокъ трудовъ по исчисленію вѣроятностей. Я счелъ не лишнимъ также помѣстить въ концѣ книги шестизначную таблицу значеній извѣстнаго интеграла $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, который играетъ важную роль въ исчисленіи вѣроятностей. Эта таблица взята изъ моей «Table des valeurs de l'intégrale $\int_x^\infty e^{-t^2} dt$ », гдѣ значенія послѣдняго интеграла, безъ множителя $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, даны съ 11^ю десятичными знаками и указаны различные способы для вычисленія его, которыми я пользовался. Не ограничиваясь простой перепечаткой прежней таблицы, я сравнилъ ее съ таблицей Jas. Burgess «On the Definite Integrale $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$, with Extended Tables of Values» (Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Vol. XXXIX) и въ случаяхъ разногласія чиселъ обращался къ своей 11^т значной таблицѣ. Такимъ образомъ я убѣдился въ необходимости измѣнить, па одну единицу послѣдняго знака, нѣкоторыя изъ чиселъ прежней шестизначной таблицы значеній $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, что и сдѣлано въ новой таблицѣ.

А. Марновъ.

ГЛАВА I.

Основные понятія и теоремы.

§ 1. Понятіе о вѣроятности связано съ тѣми вопросами, на которые мы *) можемъ отвѣчать только такъ: должно быть

либо A , либо B , либо C , , либо F , либо G .

Для однообразія и краткости условимся называть

$A, B, C, , F, G$,

появляющіяся въ отвѣтѣ на какой-нибудь вопросъ, *событіями* или *случаями*, независимо отъ содержанія вопроса. Совокупность же условій, при которыхъ вопросъ получаетъ опредѣленное рѣшеніе, будемъ называть *испытаніемъ*.

Если бы эта совокупность была извѣстна, то было бы извѣстно, какое именно изъ событій

$A, B, C, , F, G$

имѣетъ мѣсто. Но вмѣсто нея извѣстны только нѣкоторыя условія испытанія.

Замѣтимъ, что извѣстныя условія часто можно разсматривать какъ постоянныя для многихъ испытаній, а неизвѣстныя какъ переменныя, отличающія испытанія другъ отъ друга. Тогда

*) Слово «мы» общепотребительно въ математикѣ и не сообщаетъ исследованію вѣроятностей никакой особой субъективности.

наши сужденія, основанныя только на извѣстныхъ условіяхъ, будутъ одинаково относиться къ каждому изъ этихъ испытаній, которыя могутъ сопровождаться совершенно различными результатами.

Событія

$A, B, C, \dots F, G$

мы называемъ *единственно возможными*, если одно изъ нихъ навѣрно должно быть. Соблюденіе этого условія, конечно, необходимо для того, чтобы нашъ отвѣтъ, состоящій въ перечисленіи событій, можно было признать правильнымъ.

Мы будемъ называть событія

$A, B, C, \dots F, G$

несовмѣстными, если каждое изъ нихъ исключаетъ остальные, такъ что невозможно одновременное существованіе какихъ бы то ни было двухъ изъ этихъ событій.

Эти термины не возбуждаютъ никакихъ сомнѣній, хотя мы не имѣемъ вѣрныхъ способовъ для рѣшенія вопроса о совмѣстности или несовмѣстности событій во всѣхъ случаяхъ.

Для установленія понятія о вѣроятности, какъ о числѣ, необходимъ еще одинъ терминъ, который не возбуждаетъ сомнѣнія только въ чисто теоретическихъ вопросахъ.

Два событія мы называемъ *равновозможными*, если нѣтъ никакихъ основаній ожидать одного изъ нихъ предпочтительно передъ другимъ. Нѣсколько событій мы называемъ равновозможными, если каждыя два изъ нихъ равновозможны *).

Въ извѣстныхъ теоретическихъ вопросахъ равновозможность разсматриваемыхъ событій представляется нашему уму вполне ясно; въ другихъ мы условливаемся, какія именно событія считаемъ равновозможными. Въ практическихъ же вопросахъ

*) По моему мнѣнію различныя понятія опредѣляются не столько словами, каждое изъ которыхъ можетъ въ свою очередь потребовать опредѣленія, какъ нашимъ отношеніемъ къ нимъ, которое выясняется постепенно.

соотвѣтственно дроби

$$(1) \quad \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \dots + \omega}, \frac{\beta}{\alpha + \beta + \dots + \omega}, \dots, \frac{\omega}{\alpha + \beta + \dots + \omega}.$$

Условимся называть событія

$$a_1, a_2, \dots, a_\alpha,$$

при которыхъ имѣетъ мѣсто A , *благопріятными* для A , событія

$$b_1, b_2, \dots, b_\beta$$

благопріятными для B и т. д.; всѣ же равновозможныя событія

$$a_1, a_2, \dots, a_\alpha, b_1, b_2, \dots, b_\beta, \dots, g_1, g_2, \dots, g_\omega$$

будемъ называть событіями или случаями, соотвѣтствующими вопросу. Устаповивъ эти названія, мы можемъ формулировать данное нами опредѣленіе вѣроятности слѣдующимъ образомъ.

Вѣроятностью событія называется дробь, числитель которой представляетъ число равновозможныхъ случаевъ, благопріятныхъ этому событію, а знаменатель число всѣхъ равновозможныхъ случаевъ, соотвѣтствующихъ вопросу.

На этомъ опредѣленіи вѣроятности и будутъ основапы дальнѣйшіе выводы. Приведеніе событій къ равновозможнымъ не представляетъ, конечно, вопліѣ опредѣленной операціи, но, напротивъ, допускаетъ значительное разнообразіе, такъ какъ мы можемъ увеличивать число равновозможныхъ случаевъ, разбивая ихъ на болѣе частныя виды, и можемъ уменьшать число равновозможныхъ случаевъ, соединяя по нѣсколько случаевъ въ одинъ. Поэтому для одного и того же событія мы можемъ получить нѣсколько выраженій вѣроятности его. Чтобы всѣ эти выраженія приводились къ одному числу, важно строго соблюдать слѣдующія основныя положенія.

Два событія равновозможны, если они разбиваются на одинаковое число равновозможныхъ событій; два событія неравновозможны, если они разбиваются на неодинаковое число равновозможныхъ случаевъ: при $\alpha = \beta$ событія A и B равновозможны, а при $\alpha > \beta$ и при $\alpha < \beta$ неравновозможны. II наоборотъ если

два равновозможных событія разбиваются на неодинаковое число различных событій, то эти послѣднія не могутъ быть равновозможными.

Всякую замѣну однихъ равновозможныхъ случаевъ другими, неудовлетворяющую этому условію, необходимо разсматривать какъ измѣненіе данныхъ.

И соотвѣтственно этому можно признать теоретически правильно поставленными только тѣ вопросы исчисленія вѣроятностей, которые, не оставляя искомымъ вѣроятностей неопредѣленными, не допускаютъ измѣненія ихъ безъ яснаго указанія на измѣненіе данныхъ.

Неправильно поставленныя задачи, часто весьма интересныя и важныя, съ практической точки зрѣнія, не могутъ быть, конечно, предметомъ строгаго математическаго анализа, пока тѣми или иными добавочными данными опѣ не превращены въ правильно поставленныя.

По установленному нами опредѣленію вѣроятность представляется раціональнымъ числомъ, лежащимъ между нулемъ и единицей. Опредѣляя же вѣроятности нѣкоторыхъ событій, какъ предѣлы вѣроятностей другихъ событій, мы введемъ ирраціональныя числа. О введеніи въ исчисленіе вѣроятностей ирраціональныхъ чиселъ мы будемъ говорить подробнѣе впослѣдствіи.

Предѣльными величинами вѣроятности различныхъ событій служатъ единица и нуль. Вѣроятность достигаетъ единицы для событій достовѣрныхъ, которымъ благопріятствуютъ всѣ случаи, и обращается въ нуль для событій невозможныхъ, которымъ не благопріятствуетъ ни одинъ случай.

И мы можемъ утверждать, что вѣроятность единица указываетъ на достовѣрность событія, а вѣроятность нуль на невозможность его, по крайней мѣрѣ тогда, когда эта вѣроятность установлена прямымъ счетомъ равновозможныхъ случаевъ.

§ 2. Для выясненія понятія о вѣроятности, какъ о числѣ, обратимся къ слѣдующему примѣру, которымъ будемъ пользоваться и далѣе.

Пусть взять сосудъ, содержащій *a* бѣлыхъ шаровъ съ № 1, *b* бѣлыхъ шаровъ съ № 2, *c* черныхъ шаровъ съ № 1, *d* черныхъ шаровъ съ № 2 и не содержащій никакихъ другихъ шаровъ.

Изъ этого сосуда вынуть одинъ шаръ, и поставленъ вопросъ о цвѣтѣ, или о номерѣ его, или наконецъ о цвѣтѣ и номерѣ.

Въ данномъ случаѣ испытаніе состоитъ въ томъ, что изъ сосуда вынимаютъ нѣкоторый опредѣленный шаръ.

Если мы видѣли этотъ шаръ, то можемъ дать на поставленный вопросъ опредѣленный отвѣтъ. Если же вынутого шара мы не видѣли и извѣстны намъ только вышеуказанныя обстоятельства, то на вопросъ о цвѣтѣ шара мы отвѣтимъ:

либо бѣлый, либо черный,

указывая такимъ образомъ два возможныхъ событія; на вопросъ о номерѣ шара перечислимъ также два событія:

№ 1 и № 2;

наконецъ, нашъ отвѣтъ о цвѣтѣ и номерѣ шара будетъ состоять въ перечисленіи четырехъ событій:

бѣлый съ № 1, бѣлый съ № 2, черный съ № 1, черный съ № 2.

Останавливаясь на послѣднемъ вопросѣ, предположимъ сначала, что всѣ наши данныя состоятъ только въ томъ, что сосудъ, изъ котораго выпутъ шаръ, не содержитъ другихъ шаровъ, кромѣ бѣлыхъ и черныхъ съ номерами 1 и 2.

Тогда перечисленные нами четыре несовмѣстимыхъ событія, бѣлый съ № 1, бѣлый съ № 2, черный съ № 1, черный съ № 2, будутъ не только единственно возможными, но и равновозможными, и соотвѣтственно этому вѣроятность каждаго изъ нихъ будетъ выражаться дробью $\frac{1}{4}$ и останется этою дробью до тѣхъ поръ, пока нѣтъ никакихъ указаній на ихъ неравновозможность.

При тѣхъ же данныхъ вѣроятность, что шаръ бѣлый, будетъ $\frac{1}{2}$, такъ какъ появленіе бѣлаго шара и появленіе черного

шара будутъ также событіями несовмѣстными, единственно возможными и равновозможными.

Положимъ теперь, что намъ извѣстны неравенства

$$a > b > c > d.$$

Въ такомъ случаѣ, придавалъ значеніе указанію на эти неравенства, мы имѣемъ основаніе ожидать бѣлаго шара съ № 1, предпочтительно передъ бѣлымъ шаромъ съ № 2; мы имѣемъ также основаніе ожидать бѣлаго шара съ № 2, предпочтительно передъ чернымъ шаромъ съ № 1.

Поэтому, если извѣстны неравенства

$$a > b > c > d,$$

то четыре событія,

бѣлый съ № 1, бѣлый съ № 2, черный съ № 1, черный съ № 2, перестаютъ быть равновозможными.

И мы лишены возможности разбить ихъ на равновозможныя, если только намъ ничего неизвѣстно кромѣ неравенствъ

$$a > b > c > d.$$

При такихъ условіяхъ мы вынуждены отказаться отъ представленія вѣроятностей нашихъ событій опредѣленными числами.

Пусть, наконецъ, намъ извѣстны числа

$$a, b, c, d.$$

Тогда для полученія равновозможныхъ событій мы можемъ разбить разсматриваемыя четыре событія на болѣе частныя.

Съ этою цѣлью отличимъ мысленно всѣ шары другъ отъ друга какими-нибудь значками, напримѣръ, новыми нумерами.

Итакъ, вообразимъ, что бѣлые шары съ № 1 отличаются другъ отъ друга и отъ прочихъ шаровъ нумерами

$$1, 2, 3, \dots, a,$$

бѣлые шары съ № 2 отличаются нумерами

$$a + 1, a + 2, \dots, a + b,$$

черные съ № 1 отличаются нумерами

$$a + b + 1, a + b + 2, \dots, a + b + c$$

и, наконецъ, черные съ № 2 отличаются нумерами

$$a + b + c + 1, a + b + c + 2, \dots, a + b + c + d.$$

Различивъ всѣ шары другъ отъ друга, мы можемъ разбить разсматриваемыя четыре событія на

$$a + b + c + d$$

событій, каждое изъ которыхъ состоитъ въ появленіи шара съ опредѣленнымъ номеромъ

$$1, 2, 3, \dots, a + b + c + d.$$

Эти новыя событія равновозможны, такъ какъ въ сосудѣ находится по одному шару съ каждымъ номеромъ

$$1, 2, \dots, a + b + c + d,$$

и потому нѣтъ никакихъ основаній ожидать появленія одного изъ этихъ номеровъ предпочтительно передъ какимъ-либо другимъ изъ нихъ.

Изъ нихъ a событій, состоящія въ появленіи номеровъ

$$1, 2, 3, \dots, a,$$

благопріятствуютъ появленію бѣлаго шара съ № 1, такъ какъ они представляютъ частные случаи послѣдняго событія,

Поэтому, согласно опредѣленію, вѣроятность появленія бѣлаго шара съ № 1 выразится дробью

$$\frac{a}{a + b + c + d}.$$