

Справочник для инженеров, техников и студентов. Том 1

Часть 2

УДК 62
ББК 30.6
С74

С74 Справочник для инженеров, техников и студентов. Том 1: Часть 2 / – М.: Книга по Требованию, 2014. – 467 с.

ISBN 978-5-8853-4173-8

ISBN 978-5-8853-4173-8

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2014
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2014

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Обозначения	Механические колебания			Электрические колебания	
	единицы ¹⁾		название	технические единицы	название
	система CGS	техническая система			
m	$г^*$	$кг\ сек^2/см$	Масса	генри	Индукция
C	$г^*сек^{-1}$	$см, кг$	Упругость	фарада	Емкость
$1/C=c$	$г^*сек^{-2}$	$кг/см$	Постоянная упругость		—
X	$см$	$см$	Мгновенное значение отклонения	кулон	Количество электричества
U	$см$	$см$	Максимальное значение отклонения	ампер	Максимальное значение колич. электр.
w	$г^*сек^{-1}$	$кг\ сек/см$	Сопротивление	ом	Сопротивление
v	$см\ сек^{-1}$	$см\ сек^{-1}$	Скорость	ампер	Сила тока
b	$см\ сек^{-2}$	$см\ сек^{-2}$	Ускорение	амп/сек	Изменен. силы тока
P			Сила	вольт	Электродвиж. сила
P_c	$г^*см\ сек^{-2}$	$кг$	Сила упругости	вольт	Э. Д. С. емкостная
P_m			Сила инерции	вольт	Э. Д. С. самоиндукц.
P_w			Сила сопротивления	вольт	Омич. падение напряжения
A_m	$г^*см^2\ сек^{-2}$	$см\ кг$	Кинетическая энергия	ватт/сек	Энергия магнитного поля
A_c	$г^*см^2\ сек^{-2}$	$см\ кг$	Потенциальная энергия	ватт/сек	Энергия электрического поля
N	$г^*см^2\ сек^{-3}$	$см\ кг\ сек^{-1}$	Мощность	ватт	Электр. мощность
ω	$сек^{-1}$	$сек^{-1}$	Круговая частота	$сек^{-1}$	Круговая частота
ν	$сек^{-1}$	$сек^{-1}$	Круговая частота собственных колебаний незатухающих комплексов	$сек^{-1}$	Круговая частота собственных колебаний незатухающих комплексов
$\bar{\nu}$	$сек^{-1}$	$сек^{-1}$	Круговая частота собственных колебаний затухающих комплексов	$сек^{-1}$	Круговая частота собственных колебаний затухающих комплексов
δ	1	1	Логарифмический декремент затухания	1	Логарифмический декремент затухания
δ	$сек^{-1}$	$сек^{-1}$	Коэффициент затухания	$сек^{-1}$	Коэффициент затухания
f	$сек^{-1}$	$сек^{-1}$	Число колебаний (часота)	$сек^{-1}$	Число колебаний
s	$сек^{-1}$	$сек^{-1}$	Собственн. частота	$сек^{-1}$	Собственн. частота
T	$сек$	$сек$	Период колебаний	$сек$	Период колебаний
k	1	1	Коэффициент связи	1	Коэффициент связи
φ	1	1	Фазовый угол возбуждающей силы	1	Фазовый угол возбуждающего напряжения
λ	$см$	$см$	Длина волны	$см$	Длина волны

¹⁾ Сравнение физической CGS с технической системой мер см. стр. 247.

ственная частота несвязанных комплексов изменяется, если на них наложена связь. Частоты связанных комплексов называются также связанными частотами.

При каждом колебании, при переходе одной формы энергии в другую, появляются потери, величина которых, отнесенная к общему количеству колеблющейся энергии является мерой затухания (логарифмический декремент, коэффициент затухания) (стр. 544).

Наряду с колебательными процессами в замкнутых колебательных комплексах существуют процессы в окружающей нас среде, при которых равным образом энергия периодически превращается из одной формы в другую (звуковые и электрические волны).

Колебания обычно распространяются в виде волны, колебательная энергия которой перемещается с определенной скоростью, называемой скоростью распространения волны. Скорость эта для электромагнитных волн равна 3×10^8 м/сек, для звука при 0°C в воздухе около 330 м/сек, в воде около 1500 м/сек (ср. табл. 1, стр. 564).

Длина волны распространяющегося колебания получается делением скорости распространения в соответствующей среде на частоту колебаний. Таким образом между длиной волны λ , скоростью распространения a и числом колебаний в секунду имеет место соотношение:

$$\lambda = a/f.$$

Наряду с распространяющимися волнами существуют стоячие волны, при которых колеблющаяся в среде энергия связана с определенными отрезками пространства. В этих отрезках, ограниченных длиной волны, энергия находится как в потенциальной, так и в кинетической форме, причем в определенных точках, удаленных друг от друга на расстояние одной полуволны, энергия находится только в потенциальной форме, а в точках, смещенных относительно этих последних на четверть волны, — только в кинетической форме. Эти точки называются пучностями и узлами; примером точек, в которых энергия находится только в кинетической форме, являются пучности скорости в механике или пучности тока в электричестве; точками, в которых энергия находится только в потенциальной форме и, следовательно, не имеется кинетической энергии, служат в механике узлы скорости и в электричестве узлы тока. В некоторые моменты времени, промежутки между которыми равняются половине периода, вся энергия находится только в потенциальной форме, и, наоборот, в моменты, отстоящие от предыдущих на четверть периода, вся энергия находится исключительно в кинетической форме.

В дальнейшем изложении приняты во внимание только механические явления колебаний, в частности акустические. Вставляя в уравнения соответственные электрические величины, получим уравнения для электрических колебаний. Массу нужно тогда заменить самоиндукцией, упругость — емкостью, механическое сопротивление — электрическим, силу — напряжением, скорость — электрическим током и амплитуду — количеством электричества.

В. Простой колебательный комплекс

Механический колебательный комплекс можно схематически представить в виде массы m , упругости C и сопротивления w . В сопротивление включены потери, вызываемые как внутренним трением и тому подобными причинами, так и полезными сопротивлениями, к которым в случае механически-акустических колебательных комплексов относятся сопротивления на излучение.

Если колебания комплекса столь малы, что C и ω независимы от величины амплитуды (m всегда независимо), то колебания являются синусоидальными. Если через x обозначить отклонение и через U — амплитуду в данный момент, через t — время, через ω и f — число колебаний в течение 2π и 1 сек, то отклонение x может быть представлено в таком виде:

$$x = -U \sin \omega t.$$

Знак и выбор синусоидальной и косинусоидальной функции определяются начальными условиями.

Если $v = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$ и $v_{\max}$ являются значениями скорости в данный момент, и максимальной, а через $b = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ и $b_{\max}$ обозначить значение ускорения в данный момент, и максимальное, то имеем (максимальные значения даны без знака):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega U \cos \omega t \quad | \quad v_{\max} = \omega U \\ \ddot{x} &= +\omega^2 U \sin \omega t \quad | \quad b_{\max} = \omega^2 U = \omega v_{\max} \end{aligned}$$

Колебание вызывает появление сил упругости, трения и инерции. Эти силы находятся в прямой зависимости от амплитуды, скорости и ускорения. Если мгновенные и максимальные значения этих сил обозначить через P_c и $P_{c\max}$, P_ω и $P_{\omega\max}$ и P_m и $P_{m\max}$, то имеем (максимальные значения даны без знака):

$$\begin{aligned} P_c &= x/C \text{ и } P_{c\max} = U/C \\ P_\omega &= \omega \dot{x} \text{ и } P_{\omega\max} = \omega v_{\max} \\ P_m &= m \ddot{x} \text{ и } P_{m\max} = m b_{\max}. \end{aligned}$$

Упругая сила и инерция являются безваттными, т. е. эти силы не обладают мощностью; соответственные работы и энергии:

$$A_c = 1/2 \cdot U^2/C, \quad A_m = 1/2 \cdot m v_{\max}^2$$

являются также безваттными энергиями. Сила, прилагаемая к сопротивлению, является, наоборот, ваттной, т. е. производит работу. Ее мощность:

$$N = 1/2 \cdot \omega \cdot v_{\max}^2.$$

а) Свободные колебания

Если комплекс под влиянием однажды полученной энергии приходит в колебание, то он является свободным. Сумма сил инерции сопротивления и упругости должна постоянно равняться нулю, т. е. имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$m \ddot{x} + \omega \dot{x} + x/C = 0;$$

круговая частота свободных колебаний в этом случае равна:

$$\bar{\nu} = \nu / \sqrt{1 + (\delta/2\pi)^2} \text{ или для } \delta/2\pi \ll 1$$

$$\bar{\nu} = \nu [1 - 1/2 (\delta/2\pi)^2].$$

Здесь $\nu = \sqrt{1/mC}$ и $\delta = \pi\omega/\nu m$ или приблизительно $\delta = \pi\omega/\nu m = \pi\omega\nu C$.

Величина δ называется **з а т у х а н и е м** колебательного комплекса (логарифмический декремент). В обычно встречающихся случаях $(\delta/2\pi)^2$ мало по сравнению с 1. Величина ν является собственным числом колебаний незатухающего комплекса, а $\bar{\nu}$ — затухающего комплекса. В первом приближении можно считать, что затухание не оказывает влияния на собственное число колебаний демпфированного комплекса.

Под действием затухания значение амплитуд $U_0, U_1, U_2, \dots, U_z, U_{z+1}, \dots$ постепенно уменьшается. Имеем

$$\delta = \ln(U_z/U_{z+1}).$$

При небольшом затухании уменьшение амплитуды

$$\Delta U = U_{z+1} - U_z$$

мало по сравнению с самой амплитудой; для затухания имеем

$$\delta = \Delta U/U,$$

т. е. одинаковое процентное уменьшение двух последующих максимальных амплитуд. Если в течение одного периода совершена работа ΔA , то затухание равно

$$\delta = \Delta A/2A,$$

т. е. оно равно половине отношения энергии, потребленной в течение периода, к общему количеству безваттной энергии.

Если в момент $t=0$ максимальное значение амплитуды колебания комплекса равно U_0 , то получаем для дифференциального уравнения свободных акустических колебаний в случае $\delta/2\pi \ll 1$ следующее решение:

$$x = U_0 e^{-s\delta t} \cos \nu t,$$

причем $2\pi s = \nu$ и $s\delta = \delta$ есть коэффициент затухания.

Механический пример см.: для твердого тела — „Акустика“, стр. 566, рис. 21, для газообразного — „Акустика“, стр. 567, рис. 23.

б) Вынужденные колебания

В случае когда колебательный комплекс непрерывно возбуждается внешним периодически действующим источником энергии, то образуются вынужденные колебания. Для этих колебаний имеем дифференциальное уравнение

$$m\ddot{x} + \omega\dot{x} + x/C = P \sin \omega t,$$

где P есть максимальное значение, а ω — угловая частота возбуждающей силы.

Для дифференциального уравнения получаем решение:

$$mb_{\max} - U/C = P \sin \varphi, \quad \omega v_{\max} = P \cos \varphi.$$

Здесь φ есть угол фазы между возбуждающей силой и скоростью колебательного комплекса. Возбуждающая сила P разлагается на две составляющих, из коих та, которая перпендикулярна скорости $v_{\max}$, равна разности между силами массы и упругостью, тогда как слагающая, имеющая ту же фазу, что и скорость $v_{\max}$, совпадает с мощностью, потребленной в колебательном комплексе. Тангенс угла φ равен: $\operatorname{tg} \varphi = (\omega/\nu - \nu/\omega) \pi/\delta$.

Скорость

$$v_{\max} = P/\omega \cdot \cos \varphi$$

и мощность

$$N = P^2/2\omega \cdot \cos^2 \varphi$$

достигают своих максимальных значений

$$v_{0\max} = P/\omega \text{ и } N_0 = P^2/2\omega$$

в том случае, когда возбуждающая частота становится равной собственной частоте недемпфированного комплекса, т. е. в случае резонансного возбуждения.

На фиг. 4. представлены три векторные диаграммы для случая возбуждения частотой, меньшей, равной и большей собственной частоты комплекса. Вектор $\mathcal{B}$ дает мгновенное направление скорости. Вектор $\overline{OA}$ изображает возбуждающую силу P , $\overline{AB}$ — силу упругости, опережающую скорость на 90° , $\overline{BC}$ — силу инерции, отстающую от скорости на 90° , и $\overline{CO}$ — силу трения или ваттную силу, совпадающую по фазе со скоростью. При электромагнитных колебаниях место силы занимает напряжение, место скорости — сила тока (стр. 543).

Кривая, изображающая зависимость мощности от частоты возбуждения, соответствует функции $\cos^2$ или $\sin^2$ и называется резонансной кривой колебательного комплекса.

При этом предпо-

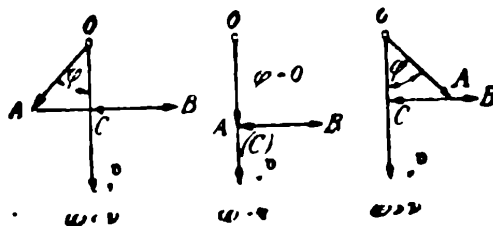
лагается, что максимальное значение возбуждающей силы одно и то же при всех частотах.

Для частот вблизи резонанса

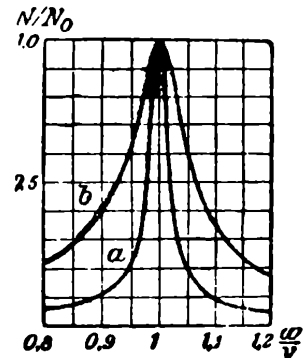
$$\omega/\nu = 1 + z$$

и для отступлений от резонанса z , малых по сравнению с 1, получается

$$\operatorname{tg} \varphi = 2\pi z, \delta$$



Фиг. 4.



Фиг. 5.

и

$$\frac{N}{N_0} = 1/[1 + (2\pi z/b)^2]$$

или

$$b = 2\pi z \sqrt{1/[N_0/N - 1]}$$

Если передвигаться от точки резонанса по обоим направлениям к тем частотам, при которых получается половина резонансной мощности, то соответственная ширина кривой резонанса, выраженная в процентах резонансной частоты Z_h и b равняется $b = \pi Z_h$. Путем этой формулы можно определить затухание колебательных комплексов, для которых имеется экспериментальное определение резонансной кривой.

Пример. Две резонансные кривые представлены на фиг. 5. По оси абсцисс отложены значения ω/ν , по оси координат N/N_0 . Кривая *a* соответствует затуханию 0,1, кривая *b* — затуханию 0,4.

С. Связанные колебательные комплексы

(Колебательные системы)

Связь двух или нескольких комплексов может быть осуществлена либо по массе, либо по упругости. При упругой связи получаем дифференциальное уравнение колебаний свободных или вынужденных (при возбуждении первого комплекса периодической силой)

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + w_1 \dot{x}_1 + x_1/C_1 + x_2/C_{12} &= 0 \text{ или } P \sin \omega t, \\ m_2 \ddot{x}_2 + w_2 \dot{x}_2 + x_2/C_2 + x_1/C_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Величина C_{12} есть упругость, общая обоим комплексам, величины C_1 и C_2 — результирующие упругости отдельных комплексов, образующиеся из свободных упругостей C_{10} и C_{20} обоих комплексов и из упругости связи C_{12} согласно следующей формуле:

$$C_1 = \frac{C_{10} C_{12}}{C_{10} + C_{12}} \text{ и } C_2 = \frac{C_{20} C_{12}}{C_{20} + C_{12}}.$$

(Связь в акустическом пространстве см. стр. 567.)

Отношения

$$k_1 = C_1/C_{12} \text{ и } k_2 = C_2/C_{12}$$

называются коэффициентами связи обоих комплексов и представляют собой отношение энергии, колеблющейся в элементе комплекса, к общей колебательной энергии каждого из комплексов.

Величина

$$k^2 = k_1 k_2 = C_1 C_2 / C_{12}^2$$

есть квадрат фактора связи колебательной системы, составленной из обоих колебательных комплексов.

Связь по массе двух комплексов выражается следующим дифференциальным уравнением свободных или вынужденных колебаний при возбуждении первого комплекса периодической силой:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + w_1 \dot{x}_1 + x_1/C_1 + m_{12} \ddot{x}_2 &= 0 \text{ или } P \sin \omega t, \\ m_2 \ddot{x}_2 + w_2 \dot{x}_2 + x_2/C_2 + m_{12} \ddot{x}_1 &= 0. \end{aligned}$$

Масса m_{12} является общей (сопряженной) массой обоих комплексов, величины m_1 и m_2 — общие массы отдельных комплексов, включающие и массу связи. Свободные массы отдельных комплексов m_{10} и m_{20} , соединяясь с массой связи m_{12} , образуют результирующие массы по следующим формулам:

$$m_1 = \frac{m_{10}m_{12}}{m_{10} + m_{12}} \quad \text{и} \quad m_2 = \frac{m_{20}m_{12}}{m_{20} + m_{12}}.$$

(Связь в акустическом грибе см. стр. 566.)

Коэффициенты связи и факторы связи выражаются следующим образом: $k_1 = m_1/m_{12}$, $k_2 = m_2/m_{12}$ и $k^2 = m_1m_2/m_{12}^2$.

а) Свободные колебания

Два связанных комплекса обладают двумя собственными колебаниями, которые можно, пренебрегая действием затухания, выразить следующим образом:

$$\nu_k^2 = \left(\frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{2} \right)^2 + k^2 \nu_1^2 \nu_2^2},$$

где ν_1 и ν_2 являются круговыми частотами собственных колебаний обоих несвязанных комплексов, если каждый содержит член, выражающий связь. При равенстве собственных колебаний $\nu_1 = \nu_2 = \nu$

$$\nu_k^2 = \nu^2 (1 \pm k),$$

а при связях, малых по сравнению с 1, получается

$$\nu_k = \nu (1 \pm k/2).$$

Энергия, получаемая одним из комплексов, частью уничтожается затуханием в этом комплексе, частью же благодаря связи постепенно переносится на другой комплекс, пока вся энергия не станет колебаться во втором комплексе. После этого ход явления изменяется, и энергия постепенно переходит в первый комплекс и т. д. Колебания такого рода называют биениями. Продолжительность перехода энергии из одного комплекса в другой равна $1/2k$ колебания.

Затухание колебаний является арифметическим средним из обоих отдельных затуханий δ_1 и δ_2 .

$$\delta = (\delta_1 + \delta_2)/2.$$

Предпосылкой для такого рода затухающих колебаний является состояние, при котором будет происходить большее поглощение энергии связью, чем превращение ее в течение того же самого времени в потери по затуханию, т. е. необходимо, чтобы

$$k > \delta_1/\pi \quad \text{и} \quad k > \delta_2/\pi.$$

Этот случай имеет большое практическое значение, и его обозначают термином жесткая связь.

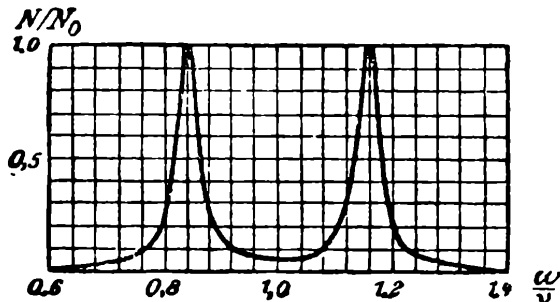
Отношение максимальных амплитуд в обоих комплексах в случае упругого сопряжения или связи по массе выражается

$$U_1/U_2 = \sqrt{k_1/k_2} \quad \text{или} \quad \sqrt{k_2/k_1}.$$

б) Вынужденные колебания

В случае жесткой связи резонансная кривая имеет два максимума: в случае когда k мало по сравнению с 1, они имеют место при

$$\nu_{k_1} = \nu(1 + k/2); \quad \nu_{k_2} = \nu(1 - k/2).$$



Фиг. 6.

Расстояние обеих точек резонанса определяет связь, и

$$(\nu_{k_1} - \nu_{k_2})/\nu = k.$$

Каждая из точек резонанса обладает затуханием, равным арифметической средней обоих затуханий. Экспериментальное определение кривой резонанса дает возможность установить связь и сумму затуханий.

На фиг. 6 изображена резонансная кривая такой связанной колебательной системы, причем за абсциссу принята величина ω/ν , за ординату — N/N_0 . При этом было выбрано $\delta_1 = 0,1$, $\delta_2 = 0,2$ и $k = 0,32$. Величина k в этом случае больше, чем δ_1/π и δ_2/π , следовательно, мы имеем здесь жесткую связь.

Механический пример см.: для твердых тел — „Акустика“, стр. 566, фиг. 22, для газообразных — „Акустика“, стр. 567, фиг. 24.

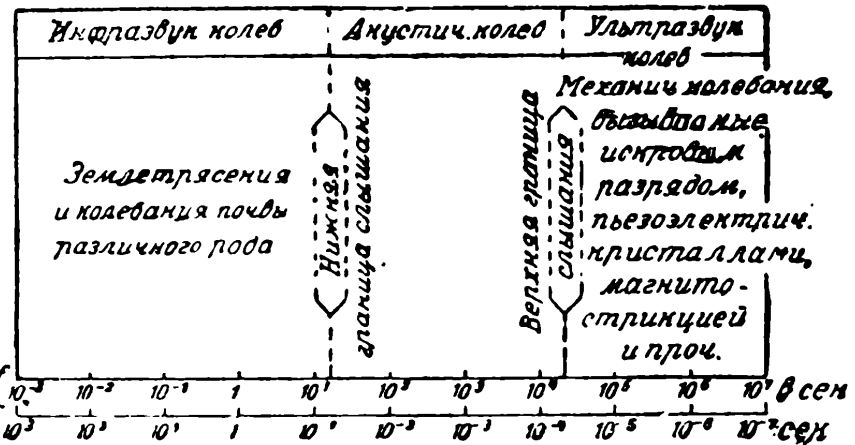
D. Область частот

Для области частот как механических, так и электрических колебаний теоретически не имеется никаких границ, в природе могут иметь место колебания с любой частотой. Однако существуют характерные области частот, для которых ниже приводятся некоторые наиболее важные данные.

а) Область частот механических колебаний

Внутри области частот механических колебаний отличают слышимые колебания, частоты которых заключаются в области от 16 до 20 000 в сек. Эти колебания называются **з в у к о в ы м и**. Колебания с более низкими частотами называются **и н ф р а з в у к о в ы м и**, колебания с более высокими частотами — **у л ь т р а з в у к о в ы м и** (фиг. 7). К инфразвуковым колебаниям относятся, например, колеба-

ния почвы или грунта, которые могут быть вызваны проходящими поездами, медленно вращающимися машинами, ветром, прибоем и морозом. На область ультразвуковых колебаний падают механические или звуковые колебания, вызываемые некоторыми насекомыми, упругие колебания воздуха, создаваемые высокочастотным искровым разрядом. Сюда же относятся применяемые в настоящее время в подводной сигнализации и радиотехнике механические колебания пьезоэлектрических тел (например кварцовый вибратор или кварцовый волномер), вызываемые работой магнето (колебания коротких стальных стержней также лежат в области ультразвуковых колебаний).



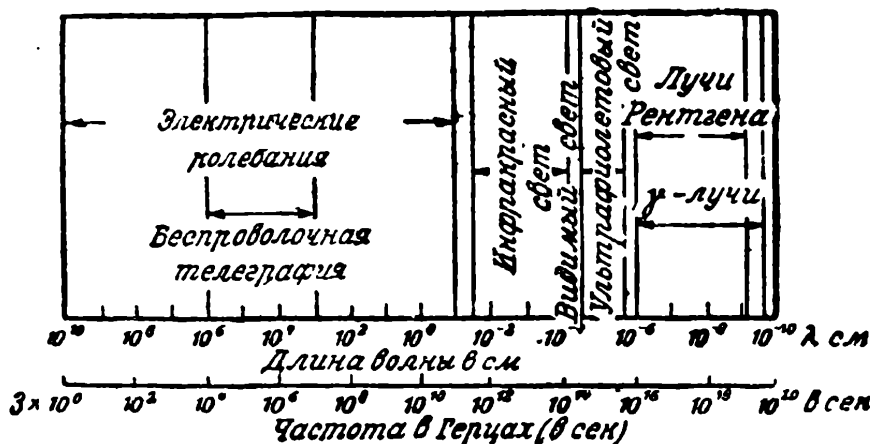
Фиг. 7.

ческих тел (например кварцовый вибратор или кварцовый волномер), вызываемые работой магнето (колебания коротких стальных стержней также лежат в области ультразвуковых колебаний).

б) Область частот электромагнитных колебаний

Известные в настоящее время электромагнитные колебания заключают в себе почти всю область частот от 0 до 10^{20} в сек. В технике сильных токов применяется постоянный ток (0 в сек.) и переменный ток от 15 до 60 в сек.

(низкая частота). В настоящее время для особых целей (питание быстроходных машин, например центробежных насосов, звуковых аппаратов для воздуха и воды, электрических индукционных аппаратов и электрических индукционных печей) применяются более высокие частоты, так называемые средние частоты от 100 до 100 000 в сек. В технике связи используются как вышеназванные низкие и средние частоты, главным образом, звуковые в области от 50 до 15 000 в сек., так и частоты, употребляемые в радиотехнике, которые в настоящее время лежат между 10^4 и 10^8 в сек.



Фиг. 8.

В технике связи используются как вышеназванные низкие и средние частоты, главным образом, звуковые в области от 50 до 15 000 в сек., так и частоты, употребляемые в радиотехнике, которые в настоящее время лежат между 10^4 и 10^8 в сек.

Однако можно получить электрические колебания значительно более высокой частоты, до 10^{11} в сек., которая лежит уже почти в инфракрасных световых лучах. По другую сторону видимого света, охватывающего область от $3,7 \cdot 10^{14}$ до 10^{15} , простирается ультрафиолетовая часть спектра вплоть до лучей γ , частота которых достигает 10^{20} периодов в сек.

Фиг. 8 дает сопоставление всех этих отдельных областей.

II. Расчет собственных частот механических комплексов

Составил проф. В. Горт, Берлин

А. Общие сведения

Определение понятий стр. 541.

Род колебаний. Материальная точка, связанная с некоторым средним положением с помощью направленной силы (силы упругости), имеет только „одну степень свободы“ и вследствие этого обладает только одной частотой собственных колебаний. Упругие тела конечной величины (струны, трубки, стержни и т. д.) обладают бесконечным числом степеней свободы и соответственно бесконечным числом частот собственных колебаний. Под основной частотой понимают собственную частоту с наименьшим числом колебаний s_1 ; частоты обертонов s_j в случае струн и трубок являются кратными частоты основного тона. Пластинообразные комплексы, как-то: мембраны, пластинки, обладают ∞^3 степеней свободы, которым соответствует ∞^2 частот собственных колебаний (в дальнейших уравнениях обозначены порядковым номером $j\bar{j}$); наименьшая частота s_{11} , как и в предыдущем случае, соответствует основному тону.

В дальнейшем выведены следующие обозначения (в технической системе единиц):

- s — собственная частота в сек^{-1} ,
- $s_j, s_{j\bar{j}}$ — собственная частота обертонов в сек^{-1} ,
- $\omega = 2\pi s$ — круговая частота собственных колебаний в сек^{-1} ,
- $\omega_j, \omega_{j\bar{j}}$ — круговая частота обертонов в сек^{-1} ,
- $j\bar{j}$ — порядковые числа (колебаний).
- n_k — критическое число оборотов в мин^{-1} ,
- T — период колебаний в сек ,
- m — масса в $\text{кг сек}^{-2} \text{ см}^{-1}$,
- ρ — плотность (удельная масса) в $\text{кг сек}^{-2} \text{ см}^{-4}$,
- E — модуль упругости в кг см^{-2} ,
- G — модуль сдвига, модуль скольжения в кг см^{-2} ,
- J_d — экваториальный момент инерции сечения в см^4 ,
- J_m — момент инерции массы в см кг сек^2 ,
- $1/\mu = m$ — растяжение/поперечное сокращение,
- F — площадь поперечного сечения в см^2 ,
- l — длина в см ;
- a — скорость звука в см/сек^{-1} .