

Рыбкин Н.А.

**Сборник задач по
геометрии**

Часть 2

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Р93

Р93 **Рыбкин Н.А.**
Сборник задач по геометрии: Часть 2 / Рыбкин Н.А. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 88 с.

ISBN 978-5-458-25553-0

Лучший задачник советских времен по геометрии. Содержит две части: часть 1. Планиметрия для 6-9 классов (изд. 26-е) часть 2. Стереометрия для 9-11 классов (изд. 28-е)

ISBN 978-5-458-25553-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

и AC , которые образуют с перпендикуляром $\angle BAO = \angle CAO = 60^\circ$, а между собой $\angle CAB = 90^\circ$. Найти расстояние BC между основаниями наклонных.

2) Из данной точки проведены к данной плоскости две наклонные, равные каждая 2 см; угол между ними равен 60° , а угол между их проекциями — прямой. Найти расстояние данной точки от плоскости.

3) Из некоторой точки проведены к данной плоскости две равные наклонные; угол между ними равен 60° , угол между их проекциями — прямой. Найти угол между каждой наклонной и её проекцией.

20. В равнобедренном треугольнике основание и высота содержат по 4 см. Данная точка находится на расстоянии 6 см от плоскости треугольника и на равном расстоянии от его вершин. Найти это расстояние.

21. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием $b = 6$ см и боковой стороной $a = 5$ см.

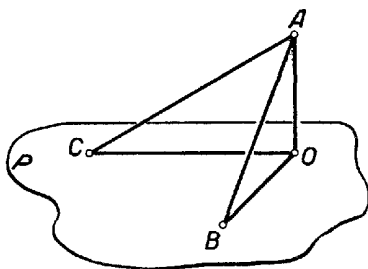
К плоскости треугольника в центре O вписанного в него круга проведён перпендикуляр $OK = 2$ см. Найти расстояние точки K от сторон треугольника и от вершины B .

22. 1) В треугольнике ABC угол B прямой и катет $BC = a$. Из вершины A проведён к плоскости треугольника перпендикуляр AD так, что расстояние между точками D и C равно f . Определить расстояние от точки D до катета BC .

2) Катеты прямоугольного треугольника ABC равны 15 м и 20 м. Из вершины прямого угла C проведён к плоскости этого треугольника перпендикуляр $CD = 35$ м. Найти расстояние от точки D до гипотенузы AB .

3) Стороны треугольника: 10 см, 17 см и 21 см. Из вершины большего угла этого треугольника проведён перпендикуляр к его плоскости, равный 15 см. Определить расстояние от его концов до большей стороны.

23. В треугольнике ABC угол C прямой; CD — перпендикуляр к плоскости этого треугольника. Точка D соединена с A и B . Определить площадь треугольника ADB , если дано: $CA = 3$ дм, $BC = 2$ дм и $CD = 1$ дм.



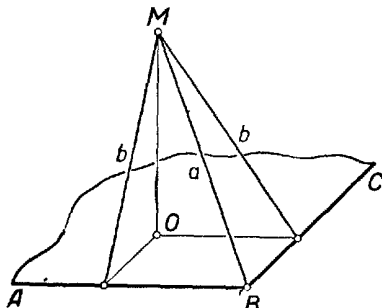
Черт. 4.

24. В вершине A прямоугольника $ABCD$ проведён к его плоскости перпендикуляр AK , конец K которого отстоит от других вершин на расстояние 6 см, 7 см и 9 см. Найти длину перпендикуляра AK .

25. A и B — точки на плоскости M ; AC и BD — перпендикуляры к этой плоскости, причём $AC = a$ и $BD = b$. Доказать, что линии AD и BC пересекаются, и определить расстояние от точки их пересечения до плоскости M .

26. Точка M , лежащая вне плоскости данного прямого угла, удалена от его вершины B на a , а от каждой из сторон — на b . Чему равно расстояние MO точки M от плоскости прямого

угла (черт. 5)?



Черт. 5.

27. На плоскости M даны две параллельные прямые AB и CD , расстояние между которыми равно a . Вне плоскости M дана точка S , удалённая от AB на b и от CD на c . Определить расстояние от точки S до плоскости M , если известно, что 1) $a = 66$, $b = c = 65$; 2) $a = 6$, $b = 25$, $c = 29$.

28. 1) Если из вершины угла, лежащего на плоскости, провести наклонную к плоскости так, чтобы она составляла со сторонами угла равные углы, то проекция этой наклонной будет служить биссектрисой данного угла. Доказать.

2) Из вершины A треугольника ABC проведена вне его плоскости прямая AD , образующая со сторонами AB и AC равные острые углы. На какие части проекция прямой AD на плоскость треугольника делит сторону BC , если $AB = 51$ м, $AC = 34$ м и $BC = 30$ м?

§ 2. Угол прямой линии с плоскостью.

1. Рёбра основания прямоугольного параллелепипеда имеют длину 4 см и 3 см; высота параллелепипеда равна 5 см. Найти его диагональ и угол диагонали с плоскостью основания.

2. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с плоскостью его основания угол в 45° . Стороны основания равны 120 см и 209 см. Определить высоту параллелепипеда.

3. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна n ; апофема наклонена к плоскости основания под углом в 60° . Найти боковые рёбра.

4. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно b и образует с основанием пирамиды угол в 30° . Найти сторону основания.

5. Наклонная равна a . Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если наклонная составляет с плоскостью проекции угол, равный: 1) 45° ; 2) 60° ; 3) 30° ?

6. Точка отстоит от плоскости на h . Найти длину наклонных, проведённых из неё под следующими углами к плоскости: 1) 30° ; 2) 45° ; 3) 60° .

7. Отрезок длиной 10 см пересекает плоскость; концы его находятся на расстоянии 3 см и 2 см от плоскости. Найти угол между данным отрезком и плоскостью.

8. Под каким углом к плоскости надо провести наклонный отрезок, чтобы его проекция была вдвое меньше самого отрезка?

9. 1) Из точки, отстоящей от плоскости на расстоянии a , проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы в 45° , а между собой угол в 60° . Определить расстояние между концами наклонных.

2) Из точки, отстоящей от плоскости на a , проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы в 45° и 30° , а между собой прямой угол. Определить расстояние между концами наклонных.

10. Из точки, отстоящей от плоскости на a , проведены две наклонные под углом в 30° к плоскости, причём их проекции составляют между собой угол в 120° . Определить расстояние между концами наклонных.

11. В плоскости M находится прямая AB . Из точки B проведены по одну сторону плоскости перпендикулярные к AB прямые BC и BD , отклонённые от плоскости M на 50° и 15° . Определить угол CBD .

12. Если в равнобедренном прямоугольном треугольнике один катет находится на плоскости M , а другой катет образует с ней угол в 45° , то гипотенуза образует с плоскостью M угол в 30° . Доказать это.

13. Если наклонная AB составляет с плоскостью M угол в 45° , а прямая AC , лежащая в плоскости M , составляет угол в 45° с проекцией наклонной AB , то $\angle BAC = 60^\circ$. Доказать это.

14. Если в правильной треугольной пирамиде высота равна стороне основания, то боковые рёбра составляют с плоскостью основания угол в 60° . Доказать.

§ 3. Параллельные прямые и плоскости.

**Параллельные
прямые.**

1. 1) A и B — точки вне плоскости M ; AC и BD — перпендикуляры на эту плоскость; $AC = 3$ м, $BD = 2$ м и $CD = 24$ дм. Определить расстояние между точками A и B .

2) На верхние концы двух вертикально стоящих столбов, удалённых один от другого (по поверхности земли) на 3,4 м, упирается концами перекладина. Один из столбов возвышается над землёй на 5,8 м, другой — на 3,9 м. Определить длину перекладины.

2. 1) Концы данного отрезка длиной в 125 см отстоят от плоскости на 100 см и 56 см. Найти длину его проекции.

2) Телефонная проволока длиной в 15 м протянута от телефонного столба, где она прикреплена на высоте 8 м от поверхности земли, к дому, где её прикрепили на высоте 20 м. Определить расстояние между домом и столбом, предполагая, что проволока не провисает.

3. Из точки A плоскости M проведена наклонная прямая линия, и на ней взяты точки B и C , причём $AB = 8$ см и $AC = 14$ см. Точка B удалена от плоскости M на 6 см. Найти расстояние точки C от плоскости M .

4. Отрезок длиной в 10 см пересекает плоскость; концы его удалены от плоскости на расстояния 5 см и 3 см. Найти длину проекции отрезка на плоскость.

5. Отрезок пересекает плоскость; концы его отстоят от плоскости на расстояние 8 см и 2 см. Найти расстояние середины этого отрезка от плоскости.

6. Концы данного отрезка, не пересекающего плоскость, удалены от неё на 30 см и 50 см. Как удалена от плоскости точка, делящая данный отрезок в отношении 3 : 7? (Два случая.)

7. Правильный треугольник спроектирован на плоскость; вершины его отстоят от плоскости на расстояния 10 дм, 15 дм и 17 дм. Найти расстояние его центра от плоскости проекций.

8. Данный отрезок AB параллелен плоскости и равен a . Отрезок BA_1 , соединяющий конец B с проекцией A_1 другого конца, составляет с плоскостью угол в 60° . Определить длину отрезка BA_1 .

9. Из точек A и B плоскости M проведены вне её параллельные между собой отрезки: $AC = 8$ см и $BD = 6$ см. Прямая, проведённая через C и D , пересекает плоскость M (почему?) в точке E . Отрезок $AB = 4$ см. Определить расстояние BE .

10. AB — отрезок на плоскости M , равный a , AC и BD — отрезки вне плоскости M , равные b , причём отрезок AC перпендикулярен к плоскости M , а BD , будучи перпендикулярен к AB , составляет с плоскостью M угол в 30° . Определить расстояние CD .

Прямая, параллельная плоскости.

11. 1) Через данную точку провести прямую, параллельную данной плоскости.

2) Через данную точку провести плоскость, параллельную данной прямой. Сколько возможно провести таких плоскостей?

3) Даны плоскость и параллельная ей прямая. Через точку, взятую на плоскости, провести в этой же плоскости прямую, параллельную данной прямой.

12. Провести через данную точку отрезок a так, чтобы его проекция на данную плоскость была равна самому отрезку.

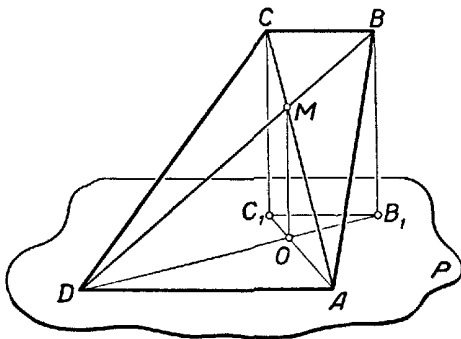
13. По стороне основания a и боковому ребру b правильной треугольной призмы определить площадь сечения, проведённого через боковое ребро и ось призмы.

14. Из внешней точки A проведён к плоскости M отрезок AB . Он разделён точкой C в отношении $3:4$ (от A к B) и отсюда проведён параллельно плоскости M отрезок $CD = 12$ см. Через точку D проведён к плоскости M отрезок ADE . Определить расстояние между точками B и E .

15. BDC — отрезок, параллельный плоскости M ; ABE , ADF и ACG — прямые, проведённые из внешней точки A к плоскости M и пересекающие её в точках E , F , G . Определить расстояние между точками E и G , если $BC = a$, $AD = b$ и $DF = c$.

16. AB и CD — параллельные отрезки, лежащие в двух пересекающихся плоскостях; AE и DF — перпендикуляры на линию пересечения плоскостей. Расстояние $AD = 5$ см и отрезок $EF = 4$ см. Найти расстояние между прямыми AB и CD .

17. Основание DA трапеции $ABCD$ (черт. 6) находится на плоскости P , а основание CB отстоит от неё на 5 см. Найти расстояние от плоскости P точки M пересечения диагоналей этой трапеции, если $DA:CB = 7:3$.

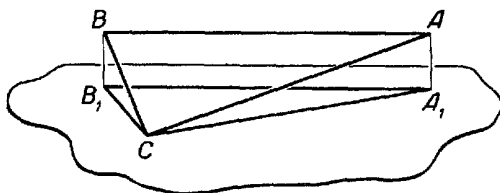


Черт. 6.

18. В параллелограмме $ABCD$ вершины A и D находятся на плоскости M , а B и C — вне её. Сторона $AD = 10$ см, сторона $AB = 15$ см, проекции диагоналей AC и BD на плоскость M соответственно равны 13,5 см и 10,5 см. Определить диагонали.

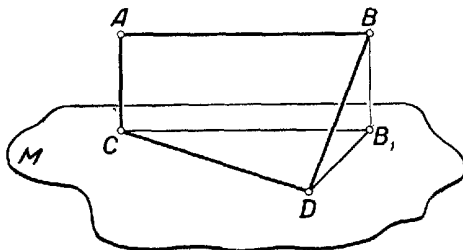
19. Через одну из сторон ромба проведена плоскость на расстоянии 4 см от противоположащей стороны. Проекция диагоналей ромба на эту плоскость равны 8 см и 2 см. Найти проекции сторон.

20. Через вершину прямого угла C прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость параллельно гипотенузе на расстоянии 1 дм от неё (черт. 7). Проекция катетов на эту плоскость равны 3 дм и 5 дм. Определить проекцию гипотенузы на эту же плоскость.



Черт. 7.

21. AB и CD — две параллельные прямые, лежащие в плоскости M на расстоянии 28 см одна от другой; EF — внешняя прямая, параллельная AB и удалённая от AB на 17 см, а от плоскости M на 15 см. Найти расстояние между EF и CD . (Два случая.)



Черт. 8.

22. Из концов отрезка AB , параллельного плоскости M , проведены к ней перпендикуляр AC и наклонная $BD \perp AC$. Определить расстояние CD , если $AB = a$, $AC = b$ и $BD = c$ (черт. 8).

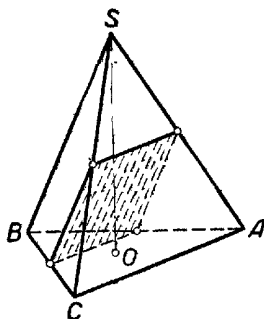
23. AB — отрезок, параллельный плоскости M ; AC и BD — две равные

наклонные к плоскости M , проведённые перпендикулярно к отрезку AB и в разных направлениях от него. Отрезок AB , равный 2 см, отстоит от плоскости M на 7 см, а отрезки AC и BD содержат по 8 см. Определить расстояние CD .

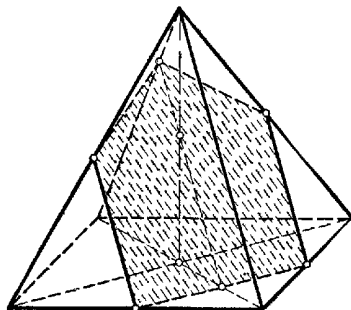
24. В правильной четырёхугольной пирамиде провести плоскость через диагональ основания параллельно боковому

ребру. Сторона основания равна a , а боковое ребро равно b . Определить площадь полученного сечения.

25. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания a и боковое ребро равно b . Провести в этой пирамиде плоскость через середины рёбер AB и BC параллельно ребру SB . Определить площадь полученного сечения (черт. 9).



Черт. 9.



Черт. 10.

26. Каждое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно a . Провести сечение через середины двух смежных сторон основания и середину высоты (черт. 10) и найти его площадь.

27. Через данную точку провести плоскость параллельную данной плоскости.

**Параллельные
плоскости.**

28. В кубе с ребром a провести плоскость, которая проходила бы через середины двух смежных сторон верхнего основания и через

центр нижнего. Вычислить периметр сечения.

29. Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно 8 дм. Отрезок длиной 10 дм своими концами упирается в эти плоскости. Определить проекции отрезка на каждую плоскость.

30. 1) Плоскости M и P параллельны. Из точек A и B плоскости M проведены к плоскости P наклонные: $AC = 37$ см и $BD = 125$ см. Проекция наклонной AC на одну из плоскостей равна 12 см. Чему равна проекция наклонной BD ?

2) Отрезки двух прямых, заключённые между двумя параллельными плоскостями, равны 51 см и 53 см, а их проекции на одну из этих плоскостей относятся, как 6 : 7. Определить расстояние между данными плоскостями.

31. Между двумя параллельными плоскостями заключены перпендикуляр длиной 4 м и наклонная, равная 6 м. Расстояния

между их концами в каждой плоскости равны по 3 м. Найти расстояние между серединами перпендикуляра и наклонной.

32. Два отрезка, сумма которых равна c , упираются своими концами в две параллельные плоскости; проекции их a и b . Найти отрезки.

33. Между двумя параллельными плоскостями P и Q проведены отрезки AC и BD (точки A и B лежат в плоскости P); $AC = 13$ см; $BD = 15$ см; сумма длин проекций AC и BD на одну из данных плоскостей равна 14 см. Найти длины этих проекций и расстояние между плоскостями.

34. 1) Два прямых угла в пространстве расположены так, что стороны их соответственно параллельны, одинаково направлены и перпендикулярны к отрезку, соединяющему их вершины. Длина этого отрезка равна a . На стороне одного угла отложен от его вершины отрезок b , а на непараллельной ей стороне другого угла отложен отрезок c . Определить расстояние между концами этих отрезков.

2) В предыдущей задаче прямые углы заменить углами в 60° и взять: $a = 24$, $b = 5$ и $c = 8$.

35. Вершины равностороннего треугольника со стороной a находятся вне плоскости M на одинаковом от неё расстоянии d . Из центра треугольника проведён перпендикуляр к его плоскости, равный h и направленный в сторону, противоположную плоскости M . Из конца этого перпендикуляра проведены прямые через вершины треугольника до пересечения с плоскостью M . Определить отрезки этих прямых между вершинами треугольника и плоскостью M и расстояния между их концами.

36. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ середины K и L противолежащих рёбер AA_1 и CC_1 соединены отрезками прямых с вершинами куба B и D_1 . Найти стороны и диагонали получившегося четырёхугольника $KBLD_1$ и определить вид его. Ребро куба равно a .

37. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ соединить по порядку середины следующих рёбер: AA_1 , $A_1 B_1$, $B_1 C_1$, $C_1 C$, CD , DA и AA_1 . Доказать, что полученная фигура есть правильный шестиугольник, и определить её площадь по ребру куба a .

38. 1) Основанием правильной призмы служит шестиугольник со стороной в 3 дм; высота призмы равна 13 дм. Определить площадь сечения, проведённого через две противолежащие стороны верхнего и нижнего оснований призмы.

2) Правильная шестиугольная призма, у которой боковые грани — квадраты, пересечена плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и противолежащую ей сторону верхнего основания. Сторона основания равна a . Определить площадь полученного сечения.

§ 4. Двугранные углы и перпендикулярные плоскости.

1. 1) На одной грани двугранного угла даны две точки A и B (черт. 11); из них опущены перпендикуляры на другую грань: $AC = 1$ дм и $BD = 2$ дм, и на ребро: $AE = 3$ дм и BF . Найти BF .

2) На одной грани двугранного угла взяты две точки, отстоящие от ребра на 51 см и 34 см. Расстояние первой точки от другой грани равно 15 см. Определить расстояние второй точки.

2. Двугранный угол равен 45° . На одной грани дана точка на расстоянии a от другой грани. Найти расстояние этой точки от ребра.

3. Если равнобедренный прямоугольный треугольник ABC перегнуть по высоте BD так, чтобы плоскости ABD и CBD образовали прямой двугранный угол, то линии DA и DC сделаются взаимно перпендикулярными, а BA и BC составят угол в 60° . Доказать.

4. Определить величину двугранного угла, если точка, взятая на одной из граней, отстоит от ребра вдвое далее, чем от другой грани.

5. 1) Из точки, взятой внутри двугранного угла, опущен перпендикуляр на ребро; он образует с гранями углы в $38^\circ 24'$ и $71^\circ 36'$. Вычислить величину двугранного угла.

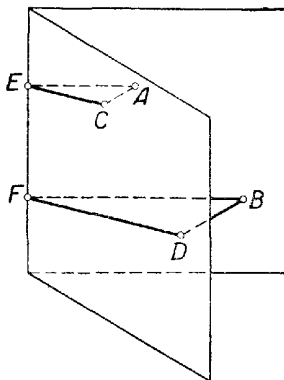
2) Точка, взятая внутри двугранного угла в 60° , удалена от обеих граней на a . Найти ее расстояние от ребра.

6. 1) A и B — точки на ребре прямого двугранного угла; AC и BD — перпендикуляры к ребру, проведенные в разных гранях. Определить расстояние CD , если $AB = 6$ см, $AC = 3$ см и $BD = 2$ см.

2) В предыдущей задаче прямой двугранный угол заменить углом в 120° и взять: а) $AB = AC = BD = a$; б) $AB = 3$, $AC = 2$, $BD = 1$.

7. Треугольник ABC , прямоугольный при C , опирается катетом AC на плоскость M , образуя с ней двугранный угол в 45° . Катет $AC = 2$ м, а гипотенуза AB относится к катету BC , как 3 : 1. Определить расстояние от вершины B до плоскости M .

8. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник ABC , у которого две стороны AB и BC содержат по 7 см, а третья $AC = 2$ см. Через сторону AC проведем



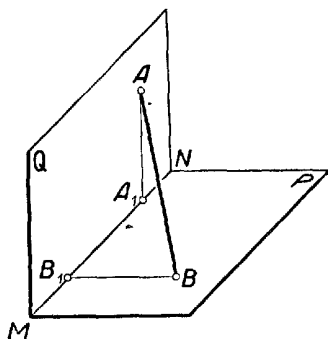
Черт. 11.

плоскость под углом в 30° к плоскости основания, пересекающая противоположащее боковое ребро в точке D . Определить площадь полученного сечения и отрезок BD бокового ребра.

9. Два равнобедренных треугольника имеют общее основание, а плоскости их отклонены на 60° . Общее основание равно 16 см ; боковая сторона одного треугольника равна 17 см , а боковые стороны другого взаимно перпендикулярны. Определить расстояние между вершинами треугольников.

10. 1) Катеты прямоугольного треугольника равны 7 см и 24 см . Определить расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол в 30° с плоскостью треугольника.

2) Дан треугольник ABC со сторонами: $AB = 9$; $BC = 6$ и $AC = 5$. Через сторону AC проходит плоскость M , составляющая с плоскостью треугольника угол 45° . Найти расстояние между плоскостью M и вершиной B .



Черт. 12.

11. Прямая AB параллельна плоскости M и отстоит от неё на a ; через AB проходит плоскость P , образующая с плоскостью M угол в 45° ; в плоскости P проведена прямая линия под углом 45° к AB . Определить её отрезок между AB и плоскостью M .

12. AB и CD — параллельные прямые, лежащие на двух пересекающихся плоскостях, образующих угол в 60° . Точки A и D удалены от линии пересечения плоскостей на 8 см и $6,3\text{ см}$. Найти расстояние между AB и CD .

13. Отрезок AB упирается своими концами в грани прямого двугранного угла $PMNQ$ (черт. 12); концы отрезка находятся на одинаковых расстояниях от ребра MN двугранного угла. Найти отношение углов, под которыми отрезок наклонён к граням.

14. Найти геометрическое место прямых, перпендикулярных к данной плоскости и пересекающих прямую, данную на той же плоскости.

15. 1) Через данную точку провести плоскость, перпендикулярную к другой плоскости.

2) Через данную прямую провести плоскость, перпендикулярную к другой плоскости. Сколько таких плоскостей можно провести?