

А.Н. Крылов, Ю.А. Крутков

**Общая теория гироскопов и некоторых
технических их применений**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 62
ББК 30.6
А11

А11 **А.Н. Крылов**
Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений / А.Н. Крылов, Ю.А. Крутков – М.: Книга по Тре-
бованию, 2024. – 402 с.

ISBN 978-5-458-51233-6

ISBN 978-5-458-51233-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

нике, отлагая действительные расчеты приборов практического, а не лекционного назначения, до второго тома.

К сожалению, этот второй том до сих пор не вышел, хотя со времени издания первого тома прошло 13 лет, и кафедру А. Грея занял его сын J. G. Gray, также много работавший в области гироскопии.

Таким образом, А. Грей из педагогических видов, разбирая различные случаи вращательного движения твердого тела, обращает особенное внимание на механическую сторону явления и на применение к его изучению и объяснению общих принципов механики, главным образом законов количеств движения, момента количеств движения и закона живых сил. Расчетной стороне дела он отводит как бы второстепенную роль. Вследствие этого, обширное сочинение А. Грея, являясь превосходным дополнением к курсам теоретической механики, не приспособлено к надобностям техника и инженера узкой специальности.

Было бы слишком долго перечислять причины, вследствие которых мы не остановились, например, на сочинении Bogaert—«Effet gyrostatique», или Grammel—«Der Kreisel und seine Anwendungen», или превосходной статьи Н. Lorenz, «Technische Anwendungen der Kreiselbewegung» — или Rawlings—«The Theory of the gyroscopic compass and its deviations», — мы ими пользовались, как и указанными выше классическими трактатами, но ни одно из них не являлось вполне подходящим для поставленной нам задачи.

Курс прочитанных нами лекций состоит из введения и трех частей. Введение и первая часть были прочитаны и изложены для печати А. Н. Крыловым, вторая часть прочитана и изложена для печати Ю. А. Крутковым, третья часть, заключающая описание приборов, заимствована А. Н. Крыловым из сочинения F. Auerbach und W. Hort—«Technische und physikalische Mechanik», Bd. II, также из журналов и иных печатных материалов на иностранных языках.

Эта часть на лекциях полностью не излагалась, ибо слушатели изучали устройство приборов на деле в Гирокомпасной части Главного гидрографического управления под руководством начальника этой части Б. И. Кудревича. Мы присоединили эту часть для тех читателей, которые самих приборов под руками иметь не будут, главным же образом чтобы дать примеры того, как в иностранной практике использовались те свойства гироскопов, общая теория которых развита в первых двух частях.

Введение содержит изложение начал кинематики и динамики твердого тела, служащих основой для дальнейшего. Кроме того, введение дополнено

чисто математическим отделом, в котором изложены способы интегрирования линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений, с которыми нам все время приходится иметь дело, и в заключение приведено изложение способа численного вычисления корней уравнений третьей и четвертой степени, чтобы для численных расчетов иметь под руками необходимые формулы. Это введение было прочитано и развито по желанию самих слушателей для облегчения пользования нашей книгой.

Первая часть заключает аналитическое изложение общей теории гироскопов, подразделенное на четыре главы, содержание которых следующее.

Глава 1. Простейшие случаи движения тела вращения. Волчок, прецессия и нутация.

Глава 2. Гироскоп Фуко и его видоизменения. Теория и свойства этих приборов, предполагая, что приборы находятся на неподвижном по отношению к земле фундаменте.

Глава 3. Гироскоп на движущемся по отношению к земле фундаменте, связанном, например, с кораблем или аэропланом. Применение гироскопа к получению на корабле меридиана, горизонта и вертикали.

Глава 4. Применение гироскопа для стабилизации корабля или платформы на корабле.

Во всех практических применениях гироскопа, кроме стабилизации, от него требуется, чтобы ось маховика обладала определенным положением устойчивого равновесия, около которого она должна совершать быстро затухающие свободные колебания и весьма малые вынужденные, вызываемые действием сил, происходящих от движений корабля или аэроплана, на котором прибор установлен. Таким образом, для целей практических и надо рассматривать эти малые колебания, для чего еще Лагранжем развита общая метода; поэтому, при рассмотрении всех вопросов, затронутых в этой части, принят совершенно однообразный прием решения — правда приближенного, но такого, что его точность для практики более чем достаточна. Этот прием состоит в следующем: сперва составляются во второй Лагранжевой форме *точные* уравнения движения для данного прибора, не рассматривая однако возмущающих сил, происходящих от трения в связях с фундаментом; затем в этих уравнениях отбрасываются те второстепенные члены, которые являются весьма малыми по сравнению с главными, по полученным упрощенным уравнениям определяется положение динамического равновесия оси маховика, составляющего главную часть гироскопа, после чего исследуются *малые* колебания его около этого положения рав-

новесия, разбираются способы погашения свободных колебаний, влияние трения в подшипниках и цапфах прибора, влияние возмущающих сил, происходящих от движения фундамента, и устанавливаются необходимые соотношения между главными конструктивными элементами прибора, которые должны быть соблюдены, чтобы прибор с требуемой степенью точности отвечал своему назначению.

Эта расчетная сторона дела выдвинута на первый план, не касаясь ни физико-механического объяснения происходящих явлений, которое отнесено во вторую часть, ни описания действительного устройства исполненных приборов, которое отнесено в третью часть.

Остается сказать несколько слов о второй части, которая стоит как бы особняком.

Вторая форма уравнений Лагранжа, исключительно применяемая в первой части, имеет свои достоинства и недостатки.

Достоинство этой методы состоит в ее общности, однообразии хода действий для составления уравнений движения системы, причем требуются только дифференцирования и не требуется никаких сложных рассуждений или пространственных представлений, благодаря чему достигается легкость проверки выкладок и результатов, ибо гораздо легче найти ошибку в дифференцировании, нежели заметить ее в рассуждении.

Но следствием этих достоинств является и главный недостаток метода — его математическая отвлеченность и отсутствие наглядности, вследствие чего утрачивается представление о физических причинах явления и общем его ходе.

Для устранения этого недостатка и включена вторая часть, в которой все главнейшие выводы первой части получены вновь применением векторного анализа.

В векторном анализе все как раз основано на наглядном представлении самого хода явления, но зато здесь для получения весьма сжатых и кратких формул требуется гораздо большая затрата внимания, рассуждения и воображения, нежели при сравнительно громоздких выкладках в методе Лагранжа.

Другая причина включения второй части в наш курс состояла в том, что во многих иностранных статьях и руководствах по гироскопии применяется векторный анализ, — необходимо было ознакомить слушателей с этим методом, чтобы дать им возможность свободно разбираться в новейшей литературе предмета.

Октябрь 1931.

А. Крылов.

Ю. Крутков.

ВВЕДЕНИЕ

Основные сведения из кинематики и динамики твердого тела

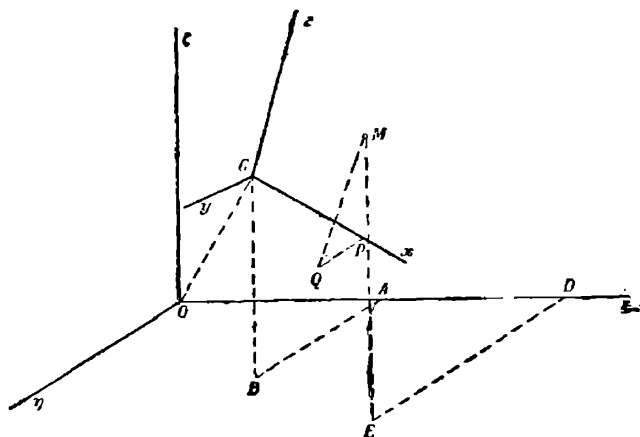
§ 1. Движение твердого тела считается известным, когда в любой заданный момент времени t известно положение каждой точки тела.

Для определения положения тела выбирают в пространстве три взаимно перпендикулярные оси координат $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$; в теле принимают за начало какую-либо точку G и проводят через нее три оси координат Gx , Gy , Gz , неизменно связанные с телом.

Оси координат условимся всегда брать такие, чтобы, смотря по положительной части оси $O\zeta$ на плоскость $\xi O\eta$, иметь положительную часть оси $O\xi$ расположенной так, чтобы поворотом в плоскости $\xi O\eta$ на 90° по часовой стрелке ось $O\xi$ переводилась в $O\eta$. Точно так же, чтобы, смотря по положительной части оси $O\xi$ на плоскость $\eta O\zeta$, иметь оси так расположенными, что поворотом по часовой стрелке на 90° ось $O\eta$ переходит в $O\zeta$, тогда и ось $O\zeta$ поворотом на 90° в плоскости $\zeta O\xi$ по часовой стрелке переходит в $O\xi$.

Оси $Gxyz$ берем так, чтобы, совместив плоскость Gxy с плоскостью $O\xi\eta$ и направив ось Gx по $O\xi$, иметь и оси Gy совпадающей с $O\eta$ и Gz совпадающей с $O\zeta$, как это будет для осей, изображенных на фиг. 1.*

Возьмем в теле какую-либо точку M —ее координаты относительно осей $Gxyz$ обозначим через x , y , z ; эта же точка по отношению к осям $O\xi\eta\zeta$



Фиг. 1.

* Такую систему осей называют «левой».

имеет координаты ξ, η, ζ , требуется найти зависимость между величинами x, y, z и величинами ξ, η, ζ .

Положение осей $Gxyz$ относительно осей $O\xi\eta\zeta$ задается координатами точки G , именно:

$$\xi_0 = OA$$

$$\eta_0 = AB$$

$$\zeta_0 = BG$$

направление же каждой из осей — косинусами углов, которые эта ось составляет с $O\xi, O\eta, O\zeta$. Эти косинусы обозначим как показывает следующая таблица:

	x	y	z
ξ	a_1	a_2	a_3
η	b_1	b_2	b_3
ζ	c_1	c_2	c_3

так что, например,

$$\cos(\widehat{x\xi}) = \cos(\widehat{\xi x}) = a_1$$

$$\cos(\widehat{x\eta}) = \cos(\widehat{\eta x}) = b_1$$

и т. д.

Тогда, рассматривая OM как замыкающую ломаной $OGRPQM$ и замечая, что

$$x = GP, \quad y = PQ, \quad z = QM$$

и что проекция OM на ось $O\xi$ есть координата ξ точки M , получим

$$(1) \quad OD = \xi = \xi_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z$$

Совершенно так же, проектируя ту же ломаную на оси $O\eta$ и $O\zeta$, получим

$$(1') \quad DE = \eta = \eta_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z$$

и

$$(1'') \quad EM = \zeta = \zeta_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z$$

Между показанными в таблице косинусами имеют место следующие соотношения.

Во-первых,

$$(2) \quad \begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1 \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1 \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1 \end{aligned}$$

ибо оси $O\xi\eta\zeta$ — прямоугольные.

Во-вторых,

$$(2') \quad \begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 1 \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1 \end{aligned}$$

ибо оси Gx, Gy, Gz — прямоугольные.

В третьих, соотношения

$$(3) \quad \begin{aligned} a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 &= 0 \\ a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 &= 0 \\ a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 &= 0 \end{aligned}$$

которые выражают, что оси Gx, Gy, Gz взаимно перпендикулярны, т. е. что каждая из них перпендикулярна к каждой из двух остальных.

В четвертых, соотношения

$$(4) \quad \begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 &= 0 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 &= 0 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 &= 0 \end{aligned}$$

которые выражают, что оси $O\xi, O\eta, O\zeta$ взаимно перпендикулярны.

Заметим следующее тождество, данное Эйлером, которое легко проверить:

$$(5) \quad \begin{aligned} (A^2 + B^2 + C^2)(a^2 + b^2 + c^2) - (Aa + Bb + Cc)^2 = \\ = (Ab - Ba)^2 + (Bc - Cb)^2 + (Ac - Ca)^2 \end{aligned}$$

Как сказано, это равенство представляет собою *тождество*, т. е. имеет место при всяких значениях букв, в него входящих.

Напишем первые два из уравнений (3) так:

$$\begin{aligned}\frac{b_1}{a_1} \cdot b_2 + \frac{c_1}{a_1} \cdot c_3 &= -a_2 \\ \frac{b_1}{a_1} \cdot b_3 + \frac{c_1}{a_1} \cdot c_3 &= -a_3\end{aligned}$$

решив их относительно $\frac{b_1}{a_1}$ и $\frac{c_1}{a_1}$, принимаемых за неизвестные, получим

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{c_2 a_3 - a_2 c_3}{b_2 c_3 - c_2 b_3}; \quad \frac{c_1}{a_1} = \frac{a_2 b_3 - b_2 a_3}{b_2 c_3 - c_2 b_3}$$

Эти два равенства можно писать в виде такой пропорции:

$$(*) \quad \frac{b_2 c_3 - c_2 b_3}{a_1} = \frac{c_2 a_3 - a_2 c_3}{b_1} = \frac{a_2 b_3 - b_2 a_3}{c_1} = s$$

где через s обозначена общая величина этих трех отношений, нам пока неизвестная. Чтобы ее найти, составим производную пропорцию, взяв отношение суммы квадратов всех предыдущих к сумме квадратов всех последующих членов, тогда получим

$$\frac{(b_2 c_3 - c_2 b_3)^2 + (c_2 a_3 - a_2 c_3)^2 + (a_2 b_3 - b_2 a_3)^2}{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} = s^2$$

Откуда следует

$$s^2 = (b_2 c_3 - c_2 b_3)^2 + (c_2 a_3 - a_2 c_3)^2 + (a_2 b_3 - b_2 a_3)^2$$

ибо

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$$

Возьмем тождество Эйлера и сделаем в нем, например:

$$\begin{aligned}A &= a_2 & B &= b_2 & C &= c_2 \\ a &= a_3 & b &= b_3 & c &= c_3\end{aligned}$$

и воспользуемся уравнением (2) и (3), тогда получим

$$\begin{aligned}(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2) - (a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3)^2 &= \\ = (b_2 c_3 - c_2 b_3)^2 + (c_2 a_3 - a_2 c_3)^2 + (a_2 b_3 - b_2 a_3)^2 &= 1\end{aligned}$$

Отсюда следует

$$s^2 = 1$$

и значит

$$s = \pm 1$$

дают возможность по данным x, y, z вычислять ξ, η, ζ , т. е. для данной точки в теле вычислить ее координаты в пространстве; если же ставится обратный вопрос, т. е. какая точка тела находится в заданной точке пространства, то эти уравнения надо решить относительно x, y, z . Умножив первое уравнение на a_1 , второе на b_1 и третье на c_1 , мы на основании (2) и (3) § 17 получим

$$x = -(a_1 \xi_0 + b_1 \eta_0 + c_1 \zeta_0) + a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta$$

и совершенно подобно

$$(2) \quad y = -(a_2 \xi_0 + b_2 \eta_0 + c_2 \zeta_0) + a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta$$

и

$$z = -(a_3 \xi_0 + b_3 \eta_0 + c_3 \zeta_0) + a_3 \xi + b_3 \eta + c_3 \zeta$$

Понятно, что эти формулы можно писать и так:

$$(2') \quad \begin{aligned} x &= a_1 (\xi - \xi_0) + b_1 (\eta - \eta_0) + c_1 (\zeta - \zeta_0) \\ y &= a_2 (\xi - \xi_0) + b_2 (\eta - \eta_0) + c_2 (\zeta - \zeta_0) \\ z &= a_3 (\xi - \xi_0) + b_3 (\eta - \eta_0) + c_3 (\zeta - \zeta_0) \end{aligned}$$

§ 3. Вместо того, чтобы задавать три из девяти косинусов таблицы § 17, Эйлер задает три угла, через тригонометрические функции которых все девять косинусов выражаются. Так как дело идет только об углах, составляемых осями двух координатных систем, то очевидно, что можно их рассматривать как имеющие общее начало.

Во всех случаях, когда приходится иметь дело с различными направлениями в пространстве, удобно пользоваться приемом, издавна применяемым в астрономии: надо вообразить сферу произвольного радиуса (этот радиус часто принимают равным длине принятой за единицу), описанную из начала координат, как центра (фиг. 2). Всякая плоскость, проходящая через начало, пересекает эту сферу по большому кругу, всякая прямая, проведенная через начало в одном направлении, пересекает сферу в одной точке, значит всякому направлению в пространстве соответствует одна и только одна точка этой вспомогательной сферы (в астрономии эту сферу зовут небесной).

Таким образом, в нашем случае получатся на сфере точки ξ, η, ζ и точки x, y, z , соответствующие осям координат, и большие круги $\xi\eta, \eta\zeta, \zeta\xi$