

Л. Эйлер

Новая теория движения Луны

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 52
ББК 22.6
Л11

Л11 **Л. Эйлер**
Новая теория движения Луны / Л. Эйлер – М.: Книга по Требованию, 2024. – 224 с.

ISBN 978-5-458-26472-3

Перевод с латинского первой части книги первой и извлечений из частей второй и третьей с примечаниями и пояснениями переводчика академика А. Н. Крылова

ISBN 978-5-458-26472-3

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

На торжественном заседании Академии Наук, посвященном памяти Эйлера, по случаю исполнившейся 18 сентября 1933 г. 150-й годовщины со дня его смерти, мне было поручено прочесть общее обозрение его жизни и трудов, а затем охарактеризовать более подробно следующие его сочинения: 1) „Введение в Анализ бесконечно малых“, 2) „Дифференциальное исчисление“, 3) „Интегральное исчисление“, 4) „Механика“, 5) „Теория движения Луны“.

При изучении этого последнего сочинения, я невольно обратил внимание на то, что Эйлер, рассматривая это движение в прямолинейных прямоугольных координатах, получает для определения этих координат дифференциальные уравнения, представляющие весьма общий случай уравнений колебательного движения материальных систем. Эйлер с полною подробностью и изумительною простотою развивает общий метод решения этих уравнений и доводит его до конца, т. е. до численных результатов.

Колебательное движение приобретает все большее и большее значение в технике, благодаря введению самых разнообразных, мощных и быстроходных механизмов, и во многих случаях приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями нелинейными, а если и линейными, то с переменными коэффициентами, т. е. как раз с уравнениями того вида, которые рассматривает Эйлер в своей теории Луны.

Само собою разумеется, что едва ли какой-либо техник или инженер, встретив в своем деле уравнения, подобные рассмотренным Эйлером, станет искать их решение в сочинении, изданном в 1772 г. под заглавием „*Theoria Motuum Lunae nova methodo pertractata*“; по большей части он не будет иметь к тому и возможности, ибо это сочинение можно найти в очень немногих библиотеках.

Сочинение Эйлера представляет собою огромный том в 790 страниц in 4^o и состоит из предисловия и двух книг.

Предисловие автора служит вместе с тем и обстоятельным введением, в котором автор излагает содержание своего сочинения и метод, применяемый им для исследования движения Луны. Это предисловие занимает 15 страниц.

Книга первая подразделена в свою очередь на три части, в первой из которых заключается составление уравнений движения Луны

и изложение общего метода их решения, в остальных двух — численное развитие этого метода и получение решения в численном виде, причем со всею подробностью приведены все вычисления, со всеми их деталями, схемами и логарифмами. Эти вычисления занимают 450 страниц.

Книга вторая содержит астрономические приложения развитой теории, т. е. изложение способов вычисления обычных астрономических координат, долготы и широты Луны помощью найденных прямоугольных прямолинейных, сличение теории автора с теорией Клеро и составление и объяснение таблиц, упрощающих производство этих вычислений.

Мой перевод предназначен не для астрономов, а для техников и инженеров, его назначение сделать для них доступными методы Эйлера в его собственном, столь полном и ясном, изложении, поэтому из первой книги первая часть переведена целиком, из второй же части взяты лишь типичные численные вычисления, а остальные, представляющие повторение этих типичных, отброшены, чтобы сократить объем книги и не загромождать ее излишними подробностями.

Книга вторая, как чисто астрономическая, опущена почти целиком, ибо для намеченной цели она интереса не представляет.

Эйлер предназначал свое сочинение для астрономов, поэтому предполагает у читателя достаточное знакомство с этим предметом. Объем этих знаний может превышать тот, которым обладают многие техники и инженеры, поэтому к своему переводу я присоединил прибавление, в котором вкратце изложены необходимые для ясного понимания текста Эйлера сведения из Астрономии.

При применении методы разложения решений дифференциальных уравнений в ряды, расположенные по степеням малых параметров, к которому пользуется Эйлер, возникает то затруднение, что могут появиться так называемые вековые члены, т. е. содержащие время вне знаков синуса и косинуса; чтобы от них избавиться, Эйлер указывает, что есть возможность составить некоторое уравнение, заменяющее собою обыкновенное характеристическое для уравнений с постоянными коэффициентами; это уравнение и доставляет измененное присутствием нелинейных членов значение частоты основных колебаний системы; введение этой частоты избавляет от вековых членов в разложениях. Этому уравнению по его сложности Эйлер, как он говорит, составлять „не отваживается“ (*non sumus ausi*), а определяет нужную ему величину на основании астрономических наблюдений или, как он выражается, берет ее „с неба“ (*ex coelo*).

Технику и инженеру в подобном случае пришлось бы прибегнуть к опыту, когда такой опыт возможен, но иногда производство этого опыта неосуществимо, тогда надо применить другой путь.

Через сто лет после Эйлера американский астроном G. W. Hill дал метод составления и решения если не того уравнения, составлять которое Эйлер не отваживался, то уравнения, ему равносильного, поэтому как естественное дополнение к сочинению Эйлера я присоединил крат-

кое изложение методы Hill'я, следуя лекциям, читанным по теории Луны в Кембриджском Университете Адамсом и сэром Дж. Дарвином.

Наконец, если бы оказалось, что и метода Hill'я не ведет к цели, то возникнет вопрос об устойчивости рассматриваемого движения и тогда придется прибегнуть к методам А. М. Ляпунова, излагаемым в его знаменитой докторской диссертации „Общая задача об устойчивости движения“, которая будет переиздана Академией Наук; но изучение этого сочинения несравненно труднее, нежели изучение сочинения Эйлера, которое, однако, явится весьма существенным подспорьем в этом деле.

Обыкновенно Академия Наук не издает переводных сочинений, но в данном случае Редакционно-издательский совет Академии Наук признал, что издание сокращенного перевода сочинения Эйлера, изданного самой же Академией Наук более 150 лет тому назад, с указанными прибавлениями, чтобы сделать его методы доступными техникам и инженерам, вполне соответствует потребностям нашего великого строительства и самой цели научно-технической серии изданий Академии, в которую это сочинение и включено.

Акад. А. Крылов.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Сколько раз в продолжение сорока лет я ни пытался развивать теорию Луны и определять, на основании законов тяготения, ее движение, всякий раз возникали такие трудности, что мне приходилось прерывать работу и дальнейшее исследование.

На основании начал Механики весь вопрос немедленно приводится к трем дифференциальным уравнениям второго порядка, однако их не только никаким способом не удастся интегрировать, но даже нахождение приближений, которыми в этом случае можно довольствоваться, сопровождалось такими препятствиями, что я никак не мог усмотреть, каким образом это исследование не только могло бы быть закончено, но даже сколь-нибудь приспособлено к использованию.

В начале я главным образом трудился над тем, чтобы привести сказанные уравнения к интегрируемой форме, однако в дальнейшем я все более и более убеждался, что все подобного рода попытки не только для приложений бесполезны, но что такое интегрирование и не особенно желательно, ибо не трудно видеть, что интегральные формулы будут столь длинны и сложны, что от них для астрономии никакой пользы ожидать нельзя.

Хотя лет тридцать тому назад я составил таблицы Луны, а затем даже издал теорию Луны, но этот предмет не был полностью исчерпан, ибо весьма многие неравенства остались совершенно неизвестными, хотя я и стремился их обнаружить.

Впоследствии с тем же неудобством встретились знаменитые Майер и Клеро, стяжавшие такую славу своими таблицами Луны, — многие неравенства, которые следовало бы вывести теоретически, получены ими из наблюдений, как бы догадкою.

Эти трудности возникают по большей части от того, что Луне приписывалась движущаяся по плоскости эклиптики орбита, наклоненная к ней под изменяющимся углом, так что для всякого момента времени надо сперва определить пересечение этой орбиты с эклипкою, т. е. линию узлов, затем наклонность, по нескольким уравнениям, после этого опять-таки по многим уравнениям находится место Луны на ее орбите, и наконец по этому месту приходится определять широту и долготу Луны.

Недавно я вновь стал заниматься этим вопросом, и по обстоятельном обсуждении всех этих трудностей, я понял, что всю работу надо начать заново на совершенно других основаниях, чтобы достигнуть цели с боль-

шим успехом. Поэтому я рассматриваю в любой заданный момент времени среднюю долготу Луны в плоскости эклиптики, пусть это будет прямая ζM , луна же пусть находится в $\mathcal{D}$ (см. фиг. 4 § 556); из этой точки на плоскость эклиптики опускается перпендикуляр $\mathcal{D}l$ и из точки l проводится к прямой ζM нормаль lL , тогда по обычному для геометров способу место Луны определяется тремя координатами ζL , Ll , $l\mathcal{D}$, по нахождении которых истинное место Луны легко определяется, ибо по углу $M\zeta l$, тангенс которого есть $\frac{lL}{\zeta L}$, сейчас же становится известной долгота Луны, точно так же угол $l\zeta \mathcal{D}$, тангенс которого есть $\frac{\mathcal{D}l}{\zeta l}$, доставит широту Луны.

Таким образом все дело сводится к определению для любого заданного времени этих трех координат; с этою целью я привел те три дифференциальные уравнения второго порядка, которые доставляются непосредственно Механикою, к сказанным трем координатам, причем, хотя я опять пришел к сложным уравнениям, однако, в них я достигаю явной выгоды, состоящей в следующем: так как прямая ζM представляет среднюю долготу Луны, то если на ней взять отрезок ζO , равный среднему расстоянию от Земли до Луны, все три прямые OL , Ll , $l\mathcal{D}$ все время остаются настолько малыми, что высшие их степени образуют весьма быстро сходящиеся ряды. После этого общего замечания необходимо, наряду с теми тремя неизвестными, которыми определяется место Луны, рассматривать известные величины, по коим эти неизвестные находятся. Этих известных величин два рода—одни постоянные, другие—переменные. Здесь входят четыре постоянные, величины которых необходимо определять из наблюдений: *во-первых* та, которая обозначена буквою K и которая представляет эксцентриситет орбиты Луны. Величина его зависит от движения, сообщенного Луне вначале, и значит, она могла бы быть больше или меньше теперь имеющейся; значение этой постоянной, выведенное из многих наблюдений, есть

$$K = 0.05445$$

т. е. настолько малое, что высшие его степени можно принимать исчезающими. *Второе* постоянное количество, обозначенное буквою i , охватывает наклонение движения Луны к плоскости эклиптики, которого величина была бы большею или меньшею, если бы наклонность (орбиты) была большею или меньшею; из многих наблюдений найдено значение

$$i = 0.08964$$

которого также высшие степени быстро приближаются к нулю. *Третья* постоянная есть эксцентриситет орбиты Земли, обозначенный буквою κ , который, без сомнения, ничтожен, ибо

$$\kappa = 0.01679$$

Четвертая постоянная, входящая в определение положения Луны, зависит от параллакса Солнца, ибо заключает отношение среднего расстояния

Земли до Солнца к среднему расстоянию Луны до Земли; я его обозначаю через $1:a$, и так как теперь это отношение можно считать известным с достаточною точностью, то можно положить

$$a = \frac{1}{390}$$

так что можно пренебречь даже второю его степенью.

Кроме этих четырех постоянных, необходимо для того времени, для которого требуется место Луны, еще знать четыре угла, пропорциональные времени, которые легко находятся по таблицам средних движений Луны.

Из этих углов *первый*, который я обозначаю буквою p , представляет элонгацию Луны от Солнца, т. е. разность, получаемую вычитая из средней долготы Луны среднюю долготу Солнца; *второй* угол, обозначенный буквою q , есть средняя аномалия Луны, которая для любого момента времени обыкновенно показывается в таблицах, но так как они между собою не вполне согласуются, то легко может произойти, что эти углы q окажутся или немного больше, или немного меньше, если их выбирать из той или другой таблицы; *третий* угол, обозначенный буквою r , совпадает с тем, который в таблицах именуется средним аргументом широты, и получается вычитая среднюю долготу восходящего узла из средней долготы Луны, этот угол сообразно тому, как таблицы составлены, может требовать небольших поправок. *Четвертый* угол, обозначенный буквою t , представляет среднюю аномалию Солнца и, следовательно, ни в каких поправках не нуждается.

Таким образом надо вести весь анализ так, чтобы для любого времени определялись через указанные постоянные и переменные значения трех вышеупомянутых координат, для которых я полагаю

$$\delta L = 1 + x$$

$$Ll = y$$

$$L\mathfrak{D} = z$$

принимая $\delta 0 = 1$, представляющую среднее расстояние от Земли до Луны. Все эти величины выбраны соответственно тем неравенствам, которыми движение Луны возмущается и между которыми иначе едва ли было бы возможно установить какой-либо порядок. Главную помощь в этом деле мне оказало надлежащее распределение всех неравенств на определенные классы. К первому классу я отношу все неравенства, которые зависят только от угла p , т. е. от средней элонгации Луны от Солнца, и которые в астрономии называются *вариацией*. Вторым классом содержит те неравенства, которые зависят только от эксцентриситета K лунной орбиты, их следует подразделить на порядки соответственно тому, содержат ли они или самое величину K , или ее квадрат K^2 , или куб K^3 , причем легко видеть, что нет надобности брать степени K выше третьей; эти неравен-

ства можно просто назвать *эксцентрическими*. Третий класс относится к эксцентриситету κ Солнца, которые поэтому можно назвать *солнечными*. Четвертый класс содержит букву a , поэтому относящиеся к нему неравенства называются *паралактическими*. Наконец к пятому классу мы относим неравенства, зависящие от постоянной i , т. е. от наклонности орбиты Луны, и поскольку они влияют на долготу Луны, их совокупность обыкновенно называют *редукцией*; очевидно, что широта Луны определяется главным образом по этому классу. После того как эти классы установлены, они могут между собою разным образом сочетаться, отчего происходят как бы смешанные неравенства, которые я отношу к нескольким порядкам.

Эти порядки надо различать, поскольку они относятся к долготе Луны или, что то же, к координатам x и y ; широта же или третья координата z содержит свои отдельные классы.

Для долготы или для координат x и y я установил следующие порядки:

$$\begin{aligned} x = & \mathfrak{O} + K\mathfrak{P} + K^2\mathfrak{Q} + K^3\mathfrak{R} + a\mathfrak{S} + aK\mathfrak{T} + \kappa\mathfrak{U} + \kappa K\mathfrak{V} + \kappa K^2\mathfrak{W} \\ & + a\kappa w + i^2\mathfrak{X} + i^2K\mathfrak{Y} + i^2\kappa\mathfrak{Z} \\ y = & O + KP + K^2Q + K^3R + aS + aKT + \kappa U + \kappa KV + \kappa K^2W \\ & + a\kappa w + i^2X + i^2KY + i^2\kappa Z, \end{aligned}$$

для широты же или третьей координаты z порядки составляются так:

$$z = i\mathfrak{p} + iKq + iK^2r + i\kappa\mathfrak{s} + i^2u + iat$$

Такое распределение по порядкам в весьма большой мере способствует доведению вычисления до счастливого успеха, ибо общие формулы для трех координат настолько длинны и сложны, что они заполняли бы целую страницу и даже продолжались бы до бесконечности; после же того, как мы их привели к различным порядкам, они почти, вопреки ожиданиям, приняли настолько сжатый вид, что для любого порядка можно было установить отдельное исследование, тогда как такую работу для самих уравнений никто не был бы в состоянии выполнить.

Причина такого сокращения заключается в том, что величины обозначенные буквами O и $\mathfrak{O}$, едва превосходят одну сотую часть единицы. поэтому кубы их приблизительно равны одной миллионной, так что ими, и тем более высшими степенями этих величин, можно пренебречь, ибо одна стотысячная в месте Луны составляет около двух секунд. Отсюда видно, что величины отдельных членов входящих в выражения O и $\mathfrak{O}$ достаточно вычислять до шестого десятичного знака.

Кроме того, для развития отдельных членов вышеприведенных порядков я нашел простое правило, которое содержит в себе общее основание интегрирований, так что при помощи его возможно достаточно быстро определять все члены, тогда как такой прием для общих уравнений совершенно не приложим.

Таким образом мы последовательно определяли члены различных порядков, и так как члены первого порядка вычислялись до шестого десятичного знака, члены второго порядка, содержащие множитель K , достаточно вычислять до пятого десятичного знака, в виду того что они умножаются на K . В величинах же $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{Q}$, умножаемых на K^2 , достаточно иметь четвертый знак, ибо от умножения на K^2 погрешность не достигает одной секунды; таким образом, чем выше порядок члена, тем с меньшим числом знаков надо его вычислять; однако я добавляю, что попадаются такие члены, в которых, вследствие особенной сложности, получается меньшая точность. Вследствие этой причины в членах, содержащих $\mathfrak{H}$ и R , погрешность может достигать нескольких секунд. То же неудобство происходит и в членах, содержащих множители $\mathfrak{B}$ и V , которые можно было бы иметь с точностью, не большей одной секунды, что само по себе малое имеет значение, но так как эти величины входят затем в состав множителей $\mathfrak{B}$ и W , то в них погрешность накапливается до нескольких секунд, чего по простому развитию этих величин предвидеть было невозможно. Затем мы заметили, что опущен член с множителем $^3K^2$, который следовало удержать.

Это опущение в нашем выводе несущественно, ибо неравенства этого порядка сами по себе весьма малые и в крайнем случае не достигают одной четверти минуты, поэтому мы не сочли нужным все наше длинное вычисление производить наново и доводить до большей степени точности, тем более, что два или три неравенства, подверженные этой погрешности, легко могут быть выведены из наблюдений.

Однако весьма желательно ради теории, чтобы впоследствии опытные вычислители предприняли бы эту работу и определили бы все величины с большей степенью точности. Для этого необходимо, чтобы в простейших членах удерживались кубы величин $\mathfrak{Q}$ и O и вычисление в них доводилось бы до восьмого знака, таким же образом и при определении всех дальнейших членов надо получать в сто раз большую точность, чтобы иметь полную уверенность, что все обнаруженные неравенства определены точнейшим образом.

Такая, работа, однако, будет, несомненно, тяжелой и трудной, так что ее едва ли можно исполнить меньше, нежели в течение одного года, главным образом потому, что при этом отдельные вычисления надо повторять два или три раза. Предприняв нашу работу, мы не подозревали каких утомительных вычислений и какого громадного труда она потребует, если же кто, хотя бы слегка, изучит изложенные здесь вычисления, тот легко убедится, что едва ли существует какой-либо аналитический вопрос, доселе рассмотренный, который потребовал бы столь сложных исследований и столь длинных вычислений.

Однако многое из того, что требуется для самой теории и для приложения найденных значений x , y , z определяется с большим трудом; во-первых, из наблюдений необходимо вывести истинные значения

постоянных, обозначенных буквами K и i , т. е. средние места апогея и узлов Луны для любого заданного времени, однако в этих элементах может заключаться погрешность, достигающая одной минуты. Но эти определения могли бы быть без большого труда выполнены, если бы имелось достаточное число точнейших наблюдений Луны. На самом же деле, как мне сообщено, обыкновенно производимые астрономические наблюдения доставляют результаты, которые могут отличаться от истинных на целую минуту; это главным образом относится до результатов, выводимых из наблюдений кульминаций Луны, при которых определяется сперва высота верхнего или нижнего края, затем прохождение через меридиан левого или правого края лунного диска. В высоте же, как наблюденной, так и исправленной рефракцией, едва ли можно избежать погрешности, достигающей до $10''$, затем в моменте прохождения через меридиан может, наверное, быть погрешность до одной секунды времени, отчего в месте Луны происходит погрешность в $15''$. Кроме того, надо точнейшим образом знать видимый диаметр Луны, в котором также едва ли возможно избежать погрешностей, затем для определения геоцентрического места Луны, требуется точное значение ее параллакса, зависящего от самой теории, и в величине которого наверное может заключаться погрешность в несколько секунд. Сопоставив все эти погрешности, едва ли можно ожидать, чтобы наблюденные места Луны согласовались с истинными до одной минуты. Отсюда понятно, что эти погрешности переходят в упомянутые выше элементы, определяемые непосредственно или по уравнениям, если только не взять весьма большое число наблюдений. Поэтому те определения этих элементов, которые произведены на основании различных наблюдений и которыми мы в этом сочинении пользуемся, мы отнюдь не считаем вполне точными, и не сомневаемся, что они требуют значительных исправлений, ибо мы не слишком доверяем даже тем точным наблюдениям, которыми мы пользовались. Может оказаться, что наши таблицы несколько отличаются от других, что, однако, не должно быть относимо к недостаткам теории, тем более, что места апогея и узлов мы брали те, которые показаны в таблицах Майера, требующих значительных исправлений. Тем не менее прилагаемые к этому сочинению таблицы в редких случаях дают результаты, отличающиеся от наблюдений более чем на одну минуту, так что астрономы могут ими пользоваться вместо таблиц Майера или Клеро, тем более, что вычисление по нашим таблицам значительно проще, ибо все величины определяются по четырем углам, пропорциональным времени, и даже самая широта Луны находится непосредственно по этим же углам, тогда как иначе нужно производить довольно утомительное вычисление поправок для узлов и места Луны на ее орбите. Но я добавляю, что нетрудно видеть, что если бы кто пожелал сопоставить эти таблицы с многочисленными наблюдениями, то добавив к этим таблицам некоторые малые поправки, он довел бы эти таблицы до гораздо большего совершенства и тем принес бы весьма большую пользу астрономии.