

Э. Галуа

Сочинения. 1936

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Э1

Э1 **Э. Галуа**
Сочинения. 1936 / Э. Галуа – М.: Книга по Требованию, 2021. – 344 с.

ISBN 978-5-458-25764-0

Книга представляет собой собрание переведенных с французского работ известного математика Э. Галуа. За 20 лет жизни Галуа успел сделать открытия, ставящие его на уровень крупнейших математиков XIX века. Решая задачи по теории алгебраических уравнений, он заложил основы современной алгебры, вышел на такие фундаментальные понятия, как группа (Галуа первым использовал этот термин, активно изучая симметрические группы) и поле (конечные поля носят название полей Галуа). Галуа исследовал старую проблему, решение которой с XVI века не давалось лучшим математикам: найти общее решение уравнения произвольной степени, то есть выразить его корни через коэффициенты, используя только арифметические действия и радикалы. Нильс Абель несколькими годами ранее доказал, что для уравнений степени 5 и выше решение «в радикалах» невозможно; однако Галуа продвинулся намного дальше. Он нашёл необходимое и достаточное условие для того, чтобы корни уравнения допускали выражение через радикалы. Но наиболее ценным был даже не этот результат, а те методы, с помощью которых Галуа удалось его получить. Работы Галуа, немногочисленные и написанные сжато, понапачу остались непоняты современниками. Огюст Шевалье и младший брат Галуа, Альфред, послали последние работы Галуа Гауссу и Якоби, но ответа не дождались. Только в 1843 году открытия Галуа заинтересовали Лиувилля, который опубликовал и прокомментировал их (1846). Открытия Галуа произвели огромное впечатление и положили начало новому направлению – теории абстрактных алгебраических структур. Следующие 20 лет Кэли и Жордан развивали и обобщали идеи Галуа, которые совершенно преобразили облик всей математики.

ISBN 978-5-458-25764-0

© Издание на русском языке, оформление

«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,

«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, кляксы, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Жизнь и творчество Эвариста Галуа (Évariste Galois, 1811—1832) представляют собой совершенно исключительное в истории науки явление. Молодой человек, не достигший 21 г., совершает в математике переворот, ставя ее на совершенно новые рельсы. Исследуя вопрос об условиях разрешимости алгебраических уравнений в радикалах [невозможность такого решения для произвольного уравнения степени выше четвертой была незадолго до этого доказана Абелем (Niels-Henrik Abel, 1802—1829)], он дает полное его принципиальное решение. Полученные им результаты позволяют решить для всякого заданного уравнения при помощи конечного числа действий вопрос, разрешается ли оно в радикалах. Но несравненно большую ценность для математики имеет построенный им аппарат, при помощи которого он достиг своих результатов. Выражаясь современным языком, Галуа предложил изучать структуру алгебраических полей, сопоставляя с ними структуру групп конечного числа символов (подстановок), допускающих своеобразные законы действий над ними. Из других принципиальных вопросов алгебры теория Галуа позволила разрешить вопрос о возможности или невозможности

решить данную задачу с помощью циркуля и линейки. Этим путем была доказана невозможность трисекции произвольного угла. Теория групп позволила классифицировать алгебраические иррациональности наиболее естественным путем, а для наиболее простых по структуре иррациональностей — устанавливать их арифметическую природу (например теорема Кронекера-Вебера: корни уравнений с коммутативной группой рационально выражаются через корни из единицы). В соединении с теорией алгебраических чисел и идеалов теория Галуа позволила исследовать дальнейшие глубокие свойства иррациональностей (комплексное умножение эллиптических функций, Klassenkörner), составляющие самую высшую и трудную часть современной теории алгебраических чисел.

Все перечисленные результаты относятся к алгебре. Но созданное Галуа понятие группы проникло во все отделы современной математики, коренным образом изменив ее лицо. Я позволю себе наиметить некоторые отделы математики, в которых теория групп играет особенно важную роль.

Конечные группы Кроме теории Галуа в узком смысле этого понятия¹⁾, они играют роль в теории правильных многоугольников в многомерных пространствах, имея связь с кристаллографией. Основной здесь является теорема Жордана о существенной конечности числа конечных линейных групп заданного измерения. Эта теорема имеет также приложения в вопросе об алгебраических интегралах линейных дифференциальных уравнений.

¹⁾ В которой наиболее важные результаты приведены Камиллу Жордану (Camille Jordan, 1838—1922). Они изложены в его знаменитой книге „Traité des Substitutions“, Paris 1870.

Эти группы играют также (несколько меньшую) роль в алгебраических функциях (римановы поверхности).

Дискретные бесконечные группы. Этот тип групп, наименее изученный, тем не менее лежит в основе нескольких важных отделов анализа и геометрии.

Теория аналитических функций, а именно изучение важного класса автоморфных функций, привела Пуанкаре и Клейна к построению теории групп дробных линейных преобразований. Сюда же можно отнести аналитическую теорию линейных дифференциальных уравнений, в которой недавно покойный Лапп-Данилевский получил фундаментальные результаты.

Топология. Каждый топологический образ характеризуется в известной мере своей *фундаментальной группой*, в общем случае бесконечной. Всякий прогресс в теории бесконечных групп должен поэтому отразиться на состоянии *комбинаторной топологии*, находящейся до сих пор в младенческой стадии своего развития. В настоящее время в комбинаторной топологии хорошо изучены только *гомологии*, связанные с абелевыми (коммутативными) факторгруппами фундаментальных групп и позволяющие исследовать некоторые поверхностные свойства топологических образов.

Особенно большую роль играют группы в отделе топологии, носящем название *теории узлов*. Занимаясь частными типами узлов — *косами*, — Артни создал для них групповую теорию, характеризующую их в полной мере; однако дальнейшие успехи в ней тормозятся в силу наших слабых познаний в теории бесконечных групп.

Прогресс в этих отделах математики связан с именем Галуа не только потому, что опирается на группы, но, главным образом, потому, что фундаментальные группы имеют в топологических образах ту же функцию, какую группа Галуа имеет в алгебраических полях.

Непрерывные группы. Это понятие было создано знаменитым норвежским математиком Софусом Ли (Sophus Lie, 1842—1899) под влиянием идей Галуа, которым Ли проникся, работая в Париже под руководством Камилла Жордана. Первоначальным поводом к созданию теории непрерывных групп послужило желание перенести методы Галуа на теорию дифференциальных уравнений, проблему их интегрирования. Но область применения непрерывных групп оказалась несравненно шире. Одним из важнейших приложений их теории было выяснение смысла существования геометрии, как независимой от анализа науки, и классификация всех систем геометрии на основе непрерывных групп, связанных с каждой из этих систем. Эта идея впервые была высказана в Эрлангенской программе Феликса Клейна (Felix Klein, 1849—1925).

В настоящее время теория непрерывных групп хорошо изучена и непрерывно продолжает развиваться. В самое последнее время она нашла себе новую грандиозную область приложений. Открытия де-Бройля, Шредингера, Дирака и др. в квантовой механике и теории структуры материи показали, что современная физика должна опираться на теорию непрерывных групп и притом на те отдельы, которые в позднейшее время были разработаны Картаном, Вейлем и др., — теорию представления групп линейными операторами, теорию характеров и т. п.

Таково влияние идей Галуа на современную математику. Поэтому естественно со стороны каждого образованного математика ознакомиться с тем, как зародились эти идеи, в каком виде они были представлены у самого Галуа.

Немалый также интерес для историка представляет собой жизнь Галуа. Эта недолгая жизнь протекла исключительно бурно, тесно соприкасаясь с на-

пряженией политической жизнью Франции той эпохи— последние годы реставрации (Карл X) и первые годы царствования Людовика-Филиппа. Будучи уволен из Нормальной школы за газетное выступление против ее директора, игравшего двуличную роль во время июльского переворота (1830), Галуа пытается основать свою школу, где предполагает обучать желающих новые идеи алгебры и теории эллиптических функций, но скоро политическая жизнь страны вовлекает его в свой водоворот.

Принимая активное участие в нелегальной политической организации и публично выступая против короля Людовика-Филиппа, Галуа непрерывно подвергался преследованию королевской полиции и неоднократно сидел в тюрьмах. Кончил жизнь на дуэли, причины которой остаются до сих пор неясными. Существует подозрение, что дуэль была спровоцирована королевскими агентами, желавшими избавиться от своего беспокойного и опасного врага.

Издание сочинений и биографии Галуа, предпринятое Объединенным научно-техническим издательством, является вполне своевременным (лучше, правда, было бы издать их в 1932 г., в столетию годовщину смерти Галуа). В этом издании я не мог по понятным техническим причинам выполнить требования, предъявляемые к так называемым академическим изданиям (критическое сличение текста с подлинником; розыск неопубликованных работ Галуа; самостоятельные биографические исследования или сличение различных биографий Галуа). Текст статей Галуа взят непосредственно из издания его сочинений, вышедшего в Париже в 1897 г. под редакцией Пикара. Я присоединил к этому перевод отрывков из наследия Галуа, опубликованных Ж. Таннери в 1906—1907 гг. в *Bulletin des Sciences Mathématiques*.

ques; к сожалению, не имея в своем распоряжении подлинников рукописей Галуа, я не мог критически подойти к выбору и расположению этих отрывков в публикации Ж. Тайнери. Весь этот текст снабжен мной примечаниями, имеющими цель, с одной стороны, облегчить чтение сочинений Галуа начинающим читателям и приблизить рассуждения Галуа к современным (все-таки знакомства читателя с теорией Галуа, хотя бы по одному из элементарных курсов, и вынужден потребовать, — иначе пришлось бы изложить в примечаниях полный курс теории Галуа); с другой стороны, я в своих примечаниях стремлюсь указывать, каких результатов добились современные математики в направлениях, намеченных в беглых фразах Галуа, а также отмечать и частью исправлять встречающиеся у Галуа ошибки (можно ли эти ошибки поставить в вину гению, предначертавшему путь современной математики, ио имевшему слишком мало времени для обработки своих идей?). Здесь я подчеркну особую важность предсмертного письма Галуа к его другу Огюсту Шевалье, письма, полного глубочайшего внутреннего трагизма, сквозящего между строк, — скорби об идеях, непонятых современниками и обречеиных по виешним причинам оставаться неразработанными, и твердой уверенности в их правильности и важности. В этом изумительном письме приводятся результаты частью в четкой форме, частью лишь в туманных очертаниях, результаты, которые через 25 или даже 50 лет должны были вновь быть открыты величайшими математиками позднейшей эпохи. Это, главным образом, относится к абелевым интегралам. Что я мог, я старался разъяснить или указать на связь с позднейшими исследованиями. Многое в моих примечаниях является лишь попыткой при-

открыть завесу таинственности в утверждениях Галуа. Может быть, не все согласятся с моими толкованиями. Я сделал, что мог, и буду приветствовать всякую новую попытку комментировать это трудное для понимания письмо.

В издание включен также (с некоторыми сокращениями и исправлениями) очерк жизни Галуа, написанный французским историком Дюпюи (Дириу). Вряд ли можно считать удовлетворительным освещение автором политических взглядов и деятельности Эвариста Галуа. В ряде мест проскальзывает склонность объяснять участие Галуа в революционном движении его личными невзгодами и юношеской горячностью. Сами неудачи, преследовавшие Галуа, автор избегает ставить в связь с общественным строем, давившим и душившим таланты. Но среди имеющихся биографий Галуа статья Дюпюи является наиболее подробной и, можно смело сказать, лучшей. В этой статье собрано много интересного материала, связанного с жизнью Галуа; к ней приложено несколько относящихся к Галуа документов. Среди школьных характеристик, полицейских рапортов и т. п., ни словом не упоминающих о математической ценности Галуа, мы находим документ, впервые с большой теплотой и уважением отзывающийся о нем, как о выдающемся математике. Это — протокол медицинского вскрытия Галуа. Факт, ие лишенный драматизма!

Я позволю себе сделать маленько сопоставление: редактор французского издания сочинений Галуа пишет в своем предисловии: „Влияние Галуа, если бы он жил, в большой мере изменило бы ориентацию математических исследований в нашей стране“. Я боюсь, что если бы мы перешли на сослагательное наклонение в истории, то нам пришлось бы добавить еще несколько „если бы“. Но можно сказать с уверенностью, что

и при настоящем положении вещей влияние Галуа изменило лицо математики во всем мире.

В издание включена также моя статья о современных проблемах теории Галуа, написанная несколько лет тому назад. В этой статье характеризуется в известной мере современное направление в алгебре, опирающееся на идеи Галуа. Статья не претендует на объективность и не касается влияния идей Галуа на другие отрасли математики. В этом отношении должна быть интересной статья Софуса Лив *„Livre du centenaire de l'École Normale“*, и мне очень жаль, что она осталась мне недоступной.

Я надеюсь, что настоящее издание удовлетворит многие запросы читателей, интересующихся жизнью и творчеством великого математика, и послужит материалом для будущего издания, более исчерпывающего. Может быть, читателя поразит непропорционально малый объем самих статей Галуа по сравнению с объемом всего издания. На это можно ответить, что таково же соотношение между продолжительностью жизни Галуа и ценностью его творчества.

Мое участие в этом издании выразилось в редактировании *„Сочинений Галуа“* и составлении примечаний. Редакция *„Жизни Эвариста Галуа“* проведена преподавателем французского языка в Казанском государственном университете Н. П. Каширской. Перевод был сделан Н. Н. Мейманом.

Я позволю себе выразить глубокую благодарность сотрудникам Анатомического музея Казанского государственного медицинского института проф. В. О. Бику и д-ру В. Н. Мурату за ценные указания при редактировании перевода *„Протокола вскрытия Галуа“*.

Н. Чеботарев.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
РАБОТЫ

ГАЛУА