

В. И. Смирнов

Курс высшей математики

Том 1

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 50
ББК 22
В11

В11 **В. И. Смирнов**
Курс высшей математики: Том 1 / В. И. Смирнов – М.: Книга по Требованию,
2021. – 479 с.

ISBN 978-5-519-70997-2

Издание 23.

ISBN 978-5-519-70997-2

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

- § 10. Приложения понятия об определенном интеграле 241**
 101. Вычисление площадей (241). 102. Площадь сектора (244). 103. Длина дуги (246). 104. Вычисление объемов тел по их поперечным сечениям (253). 105. Объем тела вращения (255). 106. Поверхность тела вращения (256). 107. Определение центров тяжести. Теоремы Гульдина (260). 108. Приближенное вычисление определенных интегралов; формулы прямоугольников и трапеций (264). 109. Формула касательных и формула Понселе (265). 110. Формула Симпсона (266). 111. Вычисление определенного интеграла с переменным верхним пределом (271). 112. Графические способы (273). 113. Площади быстро колеблющихся кривых (274).
- § 11. Дополнительные сведения об определенном интеграле 275**
 114. Предварительные понятия (275). 115. Разбиение промежутка на части и образование различных сумм (278). 116. Интегрируемые функции (280). 117. Свойства интегрируемых функций (284).

ГЛАВА IV

РЯДЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

- § 12. Основные понятия из теории бесконечных рядов 289**
 118. Понятие о бесконечном ряде (289). 119. Основные свойства бесконечных рядов (291). 120. Ряды с положительными членами. Признаки сходимости (293). 121. Признаки Коши и Даламбера (295). 122. Интегральный признак сходимости Коши (298). 123. Знакопеременные ряды (301). 124. Абсолютно сходящиеся ряды (302). 125. Общий признак сходимости (305).
- § 13. Формула Тейлора и ее приложения 306**
 126. Формула Тейлора (306). 127. Различные виды формулы Тейлора (310). 128. Ряды Тейлора и Маклорена (311). 129. Разложение e^x (312). 130. Разложение $\sin x$ и $\cos x$ (314). 131. Бином Ньютона (315). 132. Разложение $\log(1+x)$ (321). 133. Разложение $\arctg x$ (325). 134. Приближенные формулы (327). 135. Максимумы, минимумы и точки перегиба (328). 136. Раскрытие неопределенностей (330).
- § 14. Дополнительные сведения из теории рядов 332**
 137. Свойства абсолютно сходящихся рядов (332). 138. Умножение абсолютно сходящихся рядов (333). 139. Признак Куммера (335). 140. Признак Гаусса (336). 141. Гипергеометрический ряд (339). 142. Двойные ряды (341). 143. Ряды с переменными членами. Равномерно сходящиеся ряды (345). 144. Равномерно сходящиеся последовательности функций (348). 145. Свойства равномерно сходящихся последовательностей (351). 146. Свойства равномерно сходящихся рядов (354). 147. Признаки равномерной сходимости (355). 148. Степенные ряды. Радиус сходимости (357). 149. Вторая теорема Абеля (358). 150. Дифференцирование и интегрирование степенного ряда (360).

ГЛАВА V

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

- § 15. Производные и дифференциалы функции 363**
 151. Основные понятия (363). 152. О предельном переходе (365). 153. Частные производные и полный дифференциал первого

порядка (367). 154. Однородные функции (369). 155. Частные производные высших порядков (371). 156. Дифференциалы высших порядков (373). 157. Неявные функции (375). 158. Пример (377). 159. Существование неявных функций (379). 160. Кривые в пространстве и поверхности (381).

§ 16. Формула Тейлора. Максимумы и минимумы функции от нескольких переменных. 385

161. Распространение формулы Тейлора на случай функции от нескольких независимых переменных (385). 162. Необходимые условия максимума и минимума функции (386). 163. Исследование максимума и минимума функции двух независимых переменных (388). 164. Примеры (391). 165. Дополнительные замечания о нахождении максимумов и минимумов функции (393). 166. Наибольшее и наименьшее значения функции (394). 167. Относительные максимумы и минимумы (395). 168. Дополнительные замечания (398). 169. Примеры (401).

ГЛАВА VI

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, НАЧАЛА ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ

§ 17. Комплексные числа 404

170. Комплексные числа (404). 171. Сложение и вычитание комплексных чисел (407). 172. Умножение комплексных чисел (408). 173. Деление комплексных чисел (411). 174. Возвышение в степень (412). 175. Извлечение корня (414). 176. Показательная функция (416). 177. Тригонометрические и гиперболические функции (418). 178. Цепная линия (422). 179. Логарифмирование (427). 180. Синусоидальные величины и векторные диаграммы (428). 181. Примеры (431). 182. Кривые в комплексной форме (434). 183. Представление гармонического колебания в комплексной форме (437).

§ 18. Основные свойства целых многочленов и вычисление их корней 437

184. Алгебраическое уравнение (437). 185. Разложение многочлена на множители (439). 186. Кратные корни (440). 187. Правило Горнера (442). 188. Общий наибольший делитель (445). 189. Вещественные многочлены (446). 190. Зависимость между корнями уравнения и его коэффициентами (447). 191. Уравнение третьей степени (447). 192. Решение кубического уравнения в тригонометрической форме (451). 193. Способ итерации (454). 194. Способ Ньютона (458). 195. Способ простого интерполирования (459).

§ 19. Интегрирование функций 461

196. Разложение рациональной дроби на простейшие (461). 197. Интегрирование рациональной дроби (463). 198. Интеграл от выражений, содержащих радикалы (466). 199. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ (467). 200. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ (470). 201. Интегралы вида $\int e^{ax} [P(x) \cos bx + Q(x) \sin bx] dx$ (472).

Алфавитный указатель 475

ПРЕДИСЛОВИЕ К ВОСЬМОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание весьма существенно отличается от предыдущего. Из книги исключен материал, относящийся к аналитической геометрии. В связи с этим пришлось сделать перегруппировку оставшегося материала. В частности, все имеющиеся в настоящем томе приложения дифференциального исчисления к геометрии собраны в § 7 (глава II). Далее, в первый том отнесена глава, посвященная комплексным числам, основным свойствам целых многочленов и систематическому интегрированию функций. Прежде она была главой I второго тома.

Не останавливаясь на мелких добавлениях и изменениях в изложении, мы укажем на существенные добавления. Принимая во внимание, что в следующих томах приходится встречаться с довольно тонкими и сложными вопросами современного анализа, мы сочли полезным в конце § 2 (глава I) после изложения теории пределов поместить изложение теории иррациональных чисел и ее применений к доказательству признаков существования предела и свойств непрерывных функций. Там же мы приводим строгое определение и исследование свойств элементарных функций. В главе V, посвященной функциям нескольких переменных, мы приводим доказательство существования неявных функций.

Изложение ведется таким образом, что крупный шрифт может читаться самостоятельно. В мелкий шрифт отнесены примеры, некоторые отдельные дополнительные вопросы, а также весь тот теоретический материал, о котором мы упоминали выше, и последние параграфы главы IV, также содержащие дополнительный теоретический материал более сложного характера.

Профессор Г. М. Фихтенгольц сделал мне ряд ценных указаний в отношении изложения, которыми я воспользовался при окончательной редакции этой книги. Считаю своим приятным долгом выразить ему мою глубокую благодарность.

В. Смирнов

ПРЕДИСЛОВИЕ К ДВАДЦАТЬ ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании основной текст и весь план книги остались без перемен, но в ряде мест были сделаны изменения в изложении материала. Особенно это коснулось теории пределов и дополнительных сведений об определенном интеграле.

В. Смирнов

ГЛАВА I

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

§ 1. ПЕРЕМЕННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Величина и ее измерение. Математический анализ имеет основное значение в ряде наук и, в частности, в естественных науках и технике. В отличие от остальных наук, из которых каждая интересуется лишь некоторой определенной стороной окружающего нас мира, математика имеет дело с самыми общими свойствами, присущими всем доступным для научного исследования явлениям.

Одним из основных понятий является понятие о *величине и ее измерении*. Характерное свойство *величины* заключается в том, что она может быть измерена, т. е. тем или иным путем сравнена с некоторой определенной величиной того же рода, которая принимается *за единицу меры*. Самый процесс сравнения зависит от свойства исследуемой величины и называется *измерением*. В результате же измерения получается *число*, выражающее отношение рассматриваемой величины к величине, принятой за единицу меры.

Всякий закон природы дает нам соотношение между величинами или, вернее, между числами, выражающими эти величины. Предметом исследования математики и являются как раз числа и различные соотношения между ними, независимо от конкретного характера тех величин или законов, которые привели нас к этим числам и соотношениям.

Итак, *каждой величине соответствует измеряющее ее число*. Но число это существенно зависит от принятой при измерении единицы или *масштаба*. При увеличении этой единицы будет уменьшаться число, измеряющее данную величину, и, наоборот, число это будет увеличиваться при уменьшении единицы.

Выбор масштаба обусловливается характером исследуемой величины и обстоятельствами, при которых производится измерение. Величина масштаба при измерении одной и той же величины может меняться в самых широких пределах, — например, при измерении *длины*

в точных оптических исследованиях принимают за единицу длины один *ангстрем* (одну десятиллионную долю миллиметра, 10^{-7} мм); в астрономии же употребляют единицу длины, называемую *световым годом*, т. е. расстояние, проходимое светом в течение одного года (за одну секунду свет проходит примерно 300 000 км).

2. Число. Число, которое получается в результате измерения, может быть *целым* (если единица содержится целое число раз в измеряемой величине), *дробным*, или *рациональным* (если существует другая единица, которая содержится целое число раз как в измеряемой величине, так и в выбранной раньше единице, — короче, когда измеряемая величина *соизмерима* с единицей меры), и, наконец, *иррациональным* (когда такой общей меры не существует, т. е. данная величина оказывается *несоизмеримой* с единицей меры).

Так, например, в элементарной геометрии доказывается, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной, так что, если мы будем измерять диагональ квадрата, приняв за единицу длины его сторону, то полученное при измерении число $\sqrt{2}$ будет иррациональным. Иррациональным же оказывается и число π , измеряющее длину окружности, диаметр которой принят за единицу.

Для уяснения понятия об иррациональном числе полезно обратиться к десятичным дробям. Всякое рациональное число, как известно из арифметики, может быть представлено или в виде конечной десятичной дроби или в виде бесконечной десятичной дроби, причем в последнем случае бесконечная дробь будет периодической (числой периодической или смешанной периодической). Так, например, производя деление числителя на знаменатель по правилу деления десятичных дробей, мы получим

$$\frac{5}{33} = 0,151515 \dots = 0,(15), \quad \frac{5}{18} = 0,2777 \dots = 0,2(7).$$

Наоборот, как известно из арифметики, всякая периодическая десятичная дробь выражает рациональное число.

При измерении величины, несоизмеримой с принятой единицей, мы можем сначала подсчитать, сколько раз полная единица заключается в измеряемой величине, затем сколько раз десятая доля единицы заключается в полученном остатке величины, затем сколько раз сотая доля единицы заключается в новом остатке и т. д. Таким путем при измерении величины, несоизмеримой с единицей, будет образовываться некоторая бесконечная непериодическая десятичная дробь. Всякому иррациональному числу соответствует такая бесконечная дробь и, наоборот, всякой бесконечной непериодической десятичной дроби соответствует некоторое иррациональное число. Если в этой бесконечной десятичной дроби оставить лишь несколько первых десятичных знаков, то получится приближенное значение по

недостатку иррационального числа, представляемого этой дробью. Так, например, извлекая квадратный корень по обычному правилу до третьего десятичного знака, получим

$$\sqrt{2} = 1,414\dots$$

Числа 1,414 и 1,415 будут приближенными значениями $\sqrt{2}$ с точностью до одной тысячной по недостатку и по избытку.

Пользуясь десятичными знаками, можно иррациональные числа сравнивать по величине друг с другом и с рациональными числами.

Во многих случаях приходится рассматривать величины разных знаков: положительные и отрицательные (температура выше и ниже 0° и т. п.). Такие величины выражаются соответственно положительными и отрицательными числами. Если a и b — положительные числа и $a > b$, то $-a < -b$, и любое положительное число, включая нуль, больше любого отрицательного числа.

Все рациональные и иррациональные числа располагаются в некотором определенном порядке по своей величине. Все эти числа образуют совокупность *вещественных чисел*.

Отметим одно обстоятельство, связанное с представлением вещественных чисел десятичными дробями. Вместо любой конечной десятичной дроби мы можем написать бесконечную десятичную дробь с девяткой в периоде. Так, например: $3,16 = 3,1599\dots$. Если не пользоваться конечными десятичными дробями, то получится точное биоднозначное соответствие между вещественными числами и бесконечными десятичными дробями, т. е. всякому вещественному числу соответствует бесконечная десятичная дробь и всякой бесконечной десятичной дроби соответствует вещественное число. Отрицательным числам соответствуют бесконечные десятичные дроби с предшествующим им знаком минус.

В области вещественных чисел выполнимы первые четыре действия, кроме деления на нуль. Корень нечетной степени из любого вещественного числа имеет всегда одно определенное значение. Корень четной степени из положительного числа имеет два значения, которые различаются только знаком. Корень четной степени из отрицательного вещественного числа не имеет смысла в области вещественных чисел

$$(\sqrt[n]{0} = 0).$$

Строгая теория вещественных чисел и действий над ними будет нами изложена в [40].

Арифметическим, или *абсолютным*, значением числа a называется само число a , если a — положительное число или нуль, и число $-a$, если a — отрицательное число. Абсолютное значение числа a обозначается символом $|a|$, так что $|a| = a$, если $a \geq 0$, и $|a| = -a$, если $a < 0$. Так, например, $|5| = 5$ и $|-5| = 5$ и вообще $|a| = |-a|$. Нетрудно видеть, что абсолютное значение суммы $|a + b|$ будет равно сумме абсолютных значений слагаемых,

т. е. равно $|a| + |b|$ только в том случае, если слагаемые имеют одинаковый знак, а при разных знаках слагаемых $|a + b| < |a| + |b|$, так что во всех случаях

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Так, например, при $a = -3$ и $b = -7$ мы имеем знак равенства, а при $a = 3$ и $b = -7$ имеем $|3 + (-7)| = 4$ и $|3| + |-7| = 10$, т. е. знак неравенства.

Точно так же легко видеть, что

$$|a - b| \geq |a| - |b|,$$

причем считается, что $|a| \geq |b|$. При $|a| < |b|$ неравенство также справедливо, ибо слева стоит положительная величина, а справа — отрицательная.

Абсолютное значение произведения равно произведению абсолютных значений сомножителей, и абсолютное значение частного (делитель отличен от нуля) равно частному абсолютных значений делимого и делителя, т. е.

$$|abc| = |a| \cdot |b| \cdot |c| \quad \text{и} \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

3. Величины постоянные и переменные. Величины, исследуемые в математике, разделяются на два класса: постоянные и переменные.

Постоянной величиной называется величина, которая при данном исследовании сохраняет одно и то же, неизменное, значение. Ей соответствует, таким образом, при фиксированной единице меры определенное число.

Переменной величиной называется такая величина, которая по тем или иным причинам может принимать различные значения при данном исследовании.

Из этих определений ясно, что понятие о постоянной и переменной величине в значительной мере условно и зависит от обстоятельств, при которых изучается данное явление. Одна и та же величина, которая при одних условиях могла рассматриваться как постоянная, при других условиях может стать переменной, и наоборот.

Так, например, при измерении веса тел важно знать, производится ли взвешивание в одном и том же месте земной поверхности или в разных: если измерение производится в одном и том же месте, то ускорение силы тяжести, от которой и зависит вес, будет оставаться величиной постоянной, и различие в весе между разными телами будет зависеть только от их массы; если же измерения производятся в разных местах земной поверхности, то ускорение силы тяжести не может считаться постоянным, так как оно зависит от центробежной

силы вращения Земли; благодаря этому одно и то же тело на экваторе весит меньше, чем на полюсе, что и можно обнаружить, если производить взвешивание не на рычажных, а на пружинных весах.

Равным образом при грубых технических расчетах можно считать, что длина входящих в конструкцию стержней есть величина неизменная; при более же точных, когда приходится принимать во внимание действие изменения температуры, длина стержней оказывается переменной, что, конечно, значительно усложняет все расчеты.

4. Промежуток. Характер изменения переменной величины может быть самым разнообразным. Переменная величина может принимать либо всевозможные вещественные значения, без всяких ограничений (например время t , отсчитываемое от некоторого определенного начального момента, может принимать всевозможные, как положительные, так и отрицательные, значения), либо значения ее ограничиваются некоторыми неравенствами (например абсолютная температура T° , которая должна быть больше -273°C); наконец, переменная величина может принимать лишь некоторые, а не всевозможные значения (только целые — число жителей данного города, число молекул в данном объеме газа — или только соизмеримые с данной единицей и т. п.).

Укажем некоторые, наиболее распространенные в теоретических исследованиях и на практике способы изменения переменных величин.

Если переменная величина x может принимать все вещественные значения, удовлетворяющие условию $a \leq x \leq b$, где a и b — заданные вещественные числа, то говорят, что x *изменяется в промежутке* (a, b) . Такой промежуток, со включенными концами, называют иногда *замкнутым промежутком*. Если переменная x может принимать все значения из промежутка (a, b) , кроме его концов, т. е. $a < x < b$, то говорят, что x *изменяется внутри промежутка* (a, b) . Такой промежуток с исключенными концами называется *открытым промежутком*. Кроме того, областью изменения x может быть и промежуток, замкнутый с одной стороны и открытый с другой: $a \leq x < b$ или $a < x \leq b$.

Если область изменения x определяется неравенством $a \leq x$, то говорят, что x изменяется в промежутке $(a, +\infty)$, который замкнут слева и открыт справа. Точно так же при неравенстве $x \leq b$ мы имеем промежуток $(-\infty, b)$, открытый слева и замкнутый справа. Если x может принимать любые вещественные значения, то говорят, что x изменяется в промежутке $(-\infty, +\infty)$, открытом с обеих сторон.

В дальнейшем через (a, b) мы всегда будем обозначать замкнутый промежуток. Часто для замкнутого промежутка пользуются обозначением $[a, b]$. Исключение одного или обоих концов из промежутка мы будем оговаривать особо.

5. Понятие о функции. Чаще всего в приложениях приходится иметь дело не с одной переменной величиной, а с несколькими сразу. Рассмотрим, например, 1 кг воздуха. Переменные величины, определяющие его состояние, будут: давление p (кг/м²), под которым он находится; объем v (м³), который он занимает; температура его t (°C). Предположим пока, что температура воздуха поддерживается равной 0° C. Число t есть в данном случае постоянная, равная нулю. Остаются переменные p и v . Если менять p , то будет меняться и v ; например, если воздух сжимать, то объем уменьшается. Давление p мы можем менять произвольно (по крайней мере в пределах, доступных технике), а потому мы можем называть p *независимой переменной*; при каждой фиксированной величине давления газ, очевидно, должен занимать вполне определенный объем; стало быть, должен существовать такой закон, который позволяет при каждом значении p найти соответствующее ему значение v . Этот закон хорошо известен — это закон Бойля—Мариотта, который гласит, что объем, занимаемый газом при постоянной температуре, обратно пропорционален давлению.

Применяя этот закон к нашему килограмму воздуха, можно найти зависимость между v и p в виде *уравнения*

$$v = \frac{273 \cdot 29,27}{p}.$$

Переменная величина v называется в данном случае *функцией* независимой переменной p .

Отвлекаясь от этого частного примера мы можем сказать, что, теоретически говоря, для *независимой переменной* характерным является множество ее возможных значений, и мы можем по произволу выбирать для нее любое значение из этого множества ее возможных значений. Так, например, множеством значений независимой переменной x может служить какой-либо промежуток (a, b) или внутренность этого промежутка, т. е. независимая переменная x может, например, принимать любые значения, удовлетворяющие неравенству $a \leq x \leq b$ или неравенству $a < x < b$. Может случиться, что x принимает любые целочисленные значения и т. д. В указанном выше примере роль независимой переменной играло p , и объем v был функцией p . Дадим теперь определение функции.

Определение. Величина y называется *функцией* независимой переменной x , если любому определенному значению x (из множества ее возможных значений) соответствует определенное значение y .

Если, например, y есть функция от x , определенная в промежутке (a, b) , то это значит, что любому значению x из этого промежутка соответствует определенное значение y .

Вопрос о том, какую из двух величин, x или y , считать независимой переменной, есть часто вопрос только удобства. В нашем при-