

Н.Е. Жуковский

Кинематика жидкого тела

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
Н11

Н11 **Н.Е. Жуковский**
Кинематика жидкого тела / Н.Е. Жуковский – М.: Книга по Требованию, 2023. –
155 с.

ISBN 978-5-458-58039-7

ISBN 978-5-458-58039-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ной гидродинамической задачи, которую разрѣшилъ Кирхгофъ, напечаталъ статью, начинающуюся изслѣдованіемъ движенія безъ вращенія возможнаго для несжимаемой жидкости, наполняющей многосвязное пространство. Въ 1871 году появилось прекрасное сочиненіе Бельтрами ¹⁾ „Dell'idrodinamica razionale, первыя двѣ части котораго авторъ посвящаетъ кинематикѣ жидкаго тѣла, излагая ее строго аналитическимъ путемъ. Наконецъ въ 1874 году вышла изъ печати физика Кирхгофа ²⁾, въ которой можно найти многія интересныя соображенія о движеніи жидкости безъ сжатія и вращенія.

Разсматривая эти сочиненія, мы замѣчаемъ, что теорія движенія измѣняемыхъ системъ различныхъ частныхъ видовъ развилась главнымъ образомъ изъ обобщенія и расширенія идей о движеніи твердаго тѣла; общая же теорія движенія измѣняемой системы имѣла свои начала въ теоріи упругости и гидродинамикѣ. Мы видимъ, что не смотря на близкое сродство этихъ двухъ отдѣловъ кинематики измѣняемой системы, несмотря на то, что они должны бы идти, расширяя и пополняя одинъ другаго, они всегда развивались особнякомъ; такъ, напримѣръ, идеи Коши о движеніи частицы, какъ кажется, были не извѣстны авторамъ, писавшимъ по кинематикѣ измѣняемыхъ системъ частнаго вида, и наоборотъ мы встрѣчаемъ въ примѣненіи къ жидкой частицѣ доказательство теоремъ, уже извѣстныхъ для тѣла однородно-измѣняемаго. Съ другой стороны мы видимъ, что общіе законы движенія непрерывнаго измѣняемаго тѣла были по большей части тѣсно связаны вмѣстѣ съ динамическими соображеніями и только въ сочиненіи Бельтрами выступаютъ отдѣльной статьей. Это сочиненіе не оставляетъ ничего болѣе желать по добросовѣстной отдѣлкѣ и глубинѣ мысли; но съ одной стороны строго аналитическій методъ изслѣдованія, принятый авторомъ, не даетъ изложенію той нагляд-

¹⁾ Beltrami, „Dell'idrodinamica razionale“. Memorie dell' Accademia delle scienze dell' istituto di Bologna. Serie III, T. I и II.

²⁾ Kirchhoff „Vorlesungen über mathematische Physik“. Leipzig 1874.

ности, которая главнымъ образомъ была бы желательна; съ другой—итальянскій ученый не рѣшился включить въ кинематику статью объ ускореніяхъ, а обстоятельное геометрическое изслѣдованіе послѣднихъ можетъ, какъ намъ кажется, всего болѣе освѣтить трудные вопросы гидродинамики.

Предлагаемое нами сочиненіе „Кинематика жидкаго тѣла“ имѣетъ въ виду дать краткій, но, по возможности, наглядный очеркъ теоріи скоростей и ускореній непрерывнаго измѣняемаго тѣла, и можетъ быть разсматриваемо какъ вступленіе въ гидродинамику. При составленіи его мы старались поставить общія теоремы о движеніи жидкости въ уровень съ тѣмъ развитіемъ, которое получили изслѣдованія измѣняемыхъ системъ частнаго вида. Сочиненіе раздѣляется на 4 главы. Въ первой главѣ мы изложили движеніе бесконечно малой жидкой частицы; при этомъ мы старались обобщить различныя воззрѣнія на этотъ вопросъ, исходя изъ одного общаго изслѣдованія о свойствахъ поверхности удлинненія Коши. Въ этой главѣ, кромѣ многихъ небольшихъ теоремъ, намъ принадлежитъ теорія конуса постоянныхъ направленныхъ и изслѣдованіе вида траекторій точекъ частицы въ движеніи относительно ея центра. Вторая глава посвящена изученію линій токовъ (Stromlinien) и скоростей движущейся жидкости. Мы позволяемъ себѣ ввести въ ней новый терминъ, характеризующій, какъ линіи токовъ, такъ и скорости точекъ жидкости, — *теченіе жидкости*. Глава начинается общимъ геометрическимъ и кинематическимъ изслѣдованіемъ теченія жидкости и кончается спеціальнымъ изученіемъ теченія жидкости безъ сжатія и вращенія. При составленіи этой главы мы пользовались, кромѣ вышеупомянутыхъ сочиненій, сочиненіями, которыя написали Клейцъ ¹⁾ и Гатонъ дела Гупильеръ ²⁾. Въ этой главѣ намъ принадлежитъ, кромѣ

¹⁾ Kleitz, „Etudes sur les forces moléculaires dans les liquides en mouvement et application à l' Hydrodynamique“. Paris, 1873.

²⁾ Haton de la Goupillière, „Mémoire sur la théorie du potentiel cylindrique“.

общаго метода изслѣдованія, теоремы о зависимости измѣненія жидкой частицы отъ кривизны линій токовъ и теорія критическихъ точекъ. Третья глава компилятивная; въ ней излагаются согласно съ приемами изслѣдованія, предложенными во второй главѣ, ученіе о сложении и разложеніи теченій жидкости, которое установили Гельмгольцъ, Рохъ, Томсонъ, Липшицъ и Бельтрами. Четвертая глава посвящена ускореніямъ точекъ движущейся жидкости. Мы начинаемъ ее общими теоремами объ ускореніяхъ, стараясь при этомъ выставить съ возможною ясностью идеи Преображенскаго ¹⁾ и теорему Липшица ²⁾ которыя, на нашъ взглядъ, должны играть высокую роль въ гидродинамикѣ. Глава оканчивается приложеніемъ найденныхъ общихъ результатовъ къ изслѣдованію перманентнаго движенія несжимаемой жидкости и движенія несжимаемой жидкости, для которой давленіе равно нулю. Въ этой главѣ намъ принадлежитъ обобщеніе теоремы Кориолиса и многіе новые результаты по перманентному движенію, которые значительно пополняютъ теоремы найденныя Клебшемъ ³⁾.

Во всемъ сочиненіи мы разбирали одновременно свойства сжимаемой и несжимаемой жидкости, указывая всякій разъ на особенности послѣдней. Мы старались сдѣлать изложеніе по возможности простымъ, предпочитая, гдѣ было можно, геометрическія соображенія аналитическимъ, и пользуясь криволинейными координатами, имѣющими непосредственное

„Nouvelle théorie générale des lignes isothermes“.

„Nouvelle théorie générale du potentiel cylindrique“ Comptes Rendus. T. XLVIII, 1 Semestre.

¹⁾ Преображенскій: Отчеты казанскаго съѣзда естествоиспытателей.

²⁾ Lipschitz, „Determinazione della pressione nell'interno d'un fluido incompressibile soggetto ad attrazioni interne ed esterne“. Annali di Matematica pura ed applicata, deretti da Brioscchie Cremona, Serie II, T. VI.

³⁾ Clebsch, „Transformation der hydrodynamischen Gleichungen“. Journal von Borchardt, Bd. 54.

„Über die Integration der hydrodynamischen Gleichungen“. Ibid, Bd. 56.

кинематическое значеніе въ разбираемомъ вопросѣ. Мы старались слѣдовать, на сколько умѣли, совѣту великаго геометра: „*etudier les choses en elles-mêmes*“. Надѣмся, что нашъ скромный трудъ не останется безполезнымъ и прольетъ нѣкоторый свѣтъ на трудные вопросы гидродинамики.

Г Л А В А I.

О движеніи бесконечно малой частицы жидкости.

§ 1. Описанію сложнаго явленія мы обыкновенно посылаемъ разборъ нѣкоторыхъ простыхъ явленій, которыя его характеризуютъ. Такъ какъ эти явленія не только должны быть просты, но и должны возможно глубже выяснять характеръ описываемаго явленія, то они по необходимости усложняются, по мѣрѣ того какъ оно становится сложнѣе. Во всѣхъ сочиненіяхъ по кинематикѣ твердаго тѣла занимаются сначала движеніями точки; такое вступленіе нельзя считать достаточнымъ при изложеніи движенія непрерывной жидкой массы, такъ какъ каждая бесконечно малая частица ея измѣняетъ со временемъ не только свое положеніе, но и свою форму. Въ основу геометрической теоріи этого движенія, кажется, всего удобнѣе положить изученіе измѣненій бесконечно малой частицы.

Измѣненіе частицы, несмотря на полную произвольность движущейся жидкой массы, совершается всегда по нѣкоторымъ простымъ законамъ, что происходитъ отъ непрерывности функцій, характеризующихъ движеніе жидкости. Вотъ какими словами выражаетъ Бертранъ это вліяніе непрерывности: «На первый взглядъ кажется не возможно изслѣдованіе движенія системы, точки которой другъ отъ друга независимы и образуютъ непрерывную массу, плотность и форма которой можетъ измѣняться каждое мгновеніе, такъ

какъ индивидуальное движеніе каждой точки вполне произвольно. Но непрерывность функций является здѣсь, какъ всегда, условіемъ весьма существеннымъ и позволяетъ обнаружить между скоростями нѣкоторые простые законы, подобно тому, какъ непрерывность поверхностей даетъ всѣмъ извѣстныя теоремы о радіусахъ кривизны, не смотря на полную произвольность поверхности. Простые законы, о которыхъ говоритъ геометръ, суть законы измѣненія жидкой частицы, изученіемъ которыхъ мы намѣрены начать кинематику жидкости.

§ 2. Пусть будутъ a, b, c и x, y, z прямоугольныя координаты одной изъ точекъ жидкости въ началѣ времени и по прошествіи времени t . Напишемъ приращенія x, y, z , происходящія отъ измѣненія a, b, c .

$$dx = \frac{dx}{da} da + \frac{dx}{db} db + \frac{dx}{dc} dc,$$

$$dy = \frac{dy}{da} da + \frac{dy}{db} db + \frac{dy}{dc} dc,$$

$$dz = \frac{dz}{da} da + \frac{dz}{db} db + \frac{dz}{dc} dc.$$

Вообразивъ бесконечно малую частицу жидкости произвольной формы, заключающую точку (a, b, c) , увидимъ, что координаты точекъ этой частицы относительно точки (a, b, c) , которую назовемъ ея центромъ, будутъ da, db, dc . По прошествіи времени t , частица измѣняется такъ, что координаты точекъ ея относительно центра будутъ dx, dy, dz . Обозначая по примѣру Бельтрами бесконечно малыя величины da, db, dc, dx, dy, dz черезъ a, b, c, x, y, z ¹⁾, получимъ уравненія:

¹⁾ Подобнымъ же образомъ и другіе дифференціалы будемъ обозначать, отбрасывая знакъ дифференціала и измѣняя шрифтъ; вмѣсто dt du, dv, dw , наприимѣръ, мы будемъ писать t, u, v, w .

$$x = \frac{dx}{da} a + \frac{dx}{db} b + \frac{dx}{dc} c,$$

$$y = \frac{dy}{da} a + \frac{dy}{db} b + \frac{dy}{dc} c,$$

$$z = \frac{dz}{da} a + \frac{dz}{db} b + \frac{dz}{dc} c.$$

Эти уравненія показываютъ, что координаты точекъ измѣненной частицы относительно ея центра бываютъ всегда линейныя функции первоначальныхъ координатъ.

Отсюда слѣдуетъ, что всѣ точки жидкости, лежащія на безконечно малой поверхности, будутъ во все время движенія лежать на поверхности того же порядка. Безконечно малыя части плоскости и прямой линіи будутъ во время движенія оставаться плоскостью и прямою линіею. Точки, дѣлящія безконечно малую прямую линію въ извѣстномъ отношеніи, будутъ дѣлить въ томъ же отношеніи и преобразованную линію, вслѣдствіи чего безконечно малыя параллельныя линіи и плоскости, во все время движенія, останутся параллельны. Частица жидкости, ограниченная поверхностью безконечно малаго шара, будетъ все время движенія ограничена поверхностью эллипсоида, потому что поверхность должна сохранить порядокъ и изъ сомкнутой не можетъ сдѣлаться разомкнутой; при этомъ каждымъ тремя взаимноперпендикулярнымъ діаметрамъ шара будутъ соответствовать три сопряженные діаметра эллипсоида, между которыми всегда найдутся такіе три, которые сохраняютъ свою ортогональность.

Изъ послѣдняго заключенія вытекаетъ теорема: *Черезъ всякія два положенія точки движущейся жидкости можно провести двѣ системы безконечно малыхъ жидкихъ триортогональныхъ линій, которыя во время движенія переходятъ одна въ другую* ¹⁾. Томсонъ называетъ эллипсоидъ, въ который преобразуется безконечно малый шарикъ, эллипсо-

¹⁾ Эта теорема обнаружена въ 1828 году въ сочиненіи Коши въ Exercices de Mathématiques, Troisième année, p. 242.

идомъ деформаціи, а линіи, сохраняющія тріортогональность, которыя соотвѣтствуютъ осямъ эллипсоида,—осями деформаціи. Понятно, что по направленію осей деформаціи частица претерпѣваетъ наибольшее и наименьшее удлинненія; мы называемъ сжатіе отрицательнымъ удлинненіемъ.

На основаніи сказаннаго, *безконечно малая частица можетъ быть переведена изъ своего начального положенія въ положеніе, соотвѣтствующее времени t , помощью трехъ движеній: помощью поступательнаго движенія, помощью движенія, обращающаго безконечно малый шарикъ въ эллипсоидъ деформаціи, и помощью вращенія эллипсоида деформаціи.*

§ 3. Въ предъидущемъ параграфѣ мы указали главные черты измѣненія частицы за конечный промежутокъ времени, для того чтобы яснѣе представить ея безконечно малыя измѣненія. Прилагая найденные результаты къ двумъ безконечно близкимъ положеніямъ частицы, соотвѣтствующимъ моментамъ времени t и $t + dt = t + t$, видимъ, что *черезъ каждую точку движущейся жидкости можно провести три взаимно ортогональныя безконечно малыя прямыя, которыя сохраняютъ свою ортогональность, двигаясь вмѣстѣ съ жидкостью въ продолженіи безконечно малого времени t . Эти три линіи будемъ называть осями деформаціи данного момента времени t ; онѣ будутъ соотвѣтствовать линіямъ, по которымъ въ этотъ моментъ частица претерпитъ наибольшее и наименьшее удлинненія. Все безконечно малое движеніе частицы будетъ состоять: изъ поступательнаго движенія ея центра, изъ движенія, обращающаго безконечно малый шарикъ въ эллипсоидъ деформаціи, безконечно мало отличающійся отъ шара, и изъ вращенія осей деформаціи.*

Скорость вращенія осей деформаціи называютъ *скоростью вращенія частицы*. Первое и третье движенія частицы будемъ называть *внѣшними*, а второе *внутреннимъ*. Понятно, что внутреннее движеніе частицы вполнѣ характеризуется эллипсоидомъ деформаціи, оси котораго даютъ намъ направленіе осей деформаціи. Но мы не будемъ пользоваться урав-

неніемъ этого эллипсоида, а выведемъ уравненіе нѣкоторой другой поверхности втораго порядка, которое получается, разсматривая скорости точекъ частицы относительно центра. Для этого возьмемъ отъ x, y, z производныя по времени и, полагивъ

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w, \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w,$$

замѣнимъ начальныя координаты

$$a, b, c, a, b, c \text{ на } x, y, z, x, y, z,$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{du}{dx} x + \frac{du}{dy} y + \frac{du}{dz} z, \\ v &= \frac{dv}{dx} x + \frac{dv}{dy} y + \frac{dv}{dz} z, \\ w &= \frac{dw}{dx} x + \frac{dw}{dy} y + \frac{dw}{dz} z. \end{aligned} \quad (1)$$

Найденныя уравненія выражаютъ безконечно малыя скорости u, v, w , точекъ частицы относительно движущихся осей x, y, z , параллельныхъ x, y, z и имѣющихъ начало въ центрѣ частицы. Прологая эти скорости на радіусъ векторъ r , соединяющій точку частицы съ ея центромъ, дѣлимъ полученное на r и называемъ полученный результатъ черезъ ϵ .

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{du}{dx} x^2 + \frac{dv}{dy} y^2 + \frac{dw}{dz} z^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) yz + \left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right) zx + \left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} \right) xy \right]. \end{aligned}$$

Здѣсь ϵ выражаетъ удлинненіе радіуса вектора, отнесенное къ единицѣ времени и длины. Дѣлая положенія

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \epsilon_1, \quad \frac{dv}{dy} = \epsilon_2, \quad \frac{dw}{dz} = \epsilon_3, \\ \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} &= 2\theta_1, \quad \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = 2\theta_2, \quad \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} = 2\theta_3, \end{aligned}$$

въ которыхъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, суть удлинненія по направленію координатъ, представимъ удлинненіе ε слѣдующею формулою

$$\varepsilon = \frac{1}{r^2} (\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 + 2\theta_1 yz + 2\theta_2 zx + 2\theta_3 xy). \quad (2)$$

Если выберемъ безконечно малыя координаты x, y, z , такъ, чтобы для нихъ $\varepsilon r^2 = 2F$, гдѣ F постоянная безконечно малая величина втораго порядка, то увидимъ, что всѣ точки, имѣющія такія координаты, лежатъ на поверхности втораго порядка:

$$2F = \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 + 2\theta_1 yz + 2\theta_2 zx + 2\theta_3 xy. \quad (3)$$

Это даетъ теорему Коши: ¹⁾ *Линейныя удлинненія частицы по различнымъ направленіямъ обратно пропорціональны квадрату центральнаго радіуса вектора нѣкоторой поверхности втораго порядка.*

Эта поверхность, которую называютъ *поверхностью удлинненія*, играетъ почти единственную роль въ теоріи измѣненія жидкой частицы, различныя свойства движенія которой связаны болѣе или менѣе тѣсно со свойствами этой поверхности.

Такъ какъ оси деформаціи соотвѣтствуютъ наибольшему и наименьшему удлинненіямъ, то направленіе ихъ совпадаетъ съ направленіемъ осей поверхности удлинненія и можетъ быть опредѣлено помощью уравненій:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_1 cs\alpha + \theta_3 cs\beta + \theta_2 cs\gamma}{cs\alpha} &= \frac{\theta_3 cs\alpha + \varepsilon_2 cs\beta + \theta_1 cs\gamma}{cs\beta} = \\ &= \frac{\theta_2 cs\alpha + \theta_1 cs\beta + \varepsilon_3 cs\gamma}{cs\gamma} = E, \end{aligned}$$

въ которыхъ α, β, γ —углы, дѣлаемые осью деформаціи съ осями координатъ, а E —удлинненіе по этой оси, равное одному изъ корней кубическаго уравненія

¹⁾ Cauchy, Exercices de Mathématique, Seconde année, p. 69. 1827.