А. Пуанкаре

О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
А11

А. Пуанкаре
А11 О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями / А. Пуанкаре – М.: Книга по Требованию, 2013. – 386 с.

ISBN 978-5-458-27820-1

Полная теория функций, определяемых дифференциальными уравнениями, была бы чрезвычайно полезна для большого числа вопросов математики и механики. К сожалению, сразу видно что в громадном большинстве случаев, с которыми нам приходится иметь дело, эти уравнения не могут быть проинтегрированы с помощью уже известных нам функций, например, с помощью функций, определяемых квадратурами. И если бы мы захотели ограничиться только теми случаями, которые можно научить при помощи определённых или неопределённых интегралов, то область наших исследований оказалась бы чрезвычайно суженной, и огромное большинство вопросов, встречающихся в приложениях, осталась бы нерешённым.

ISBN 978-5-458-27820-1

ской системе, где независимое переменное интерпретируется как время, а зависимые переменные рассматриваются как координаты движущихся точек фазового пространства, то задача становится о поведении этих точек по крайней мере в течение того промежутка времени, пока движущиеся точки не оставляют данной области пространства, в частности и для бесконечного в обе стороны промежутка времени.

Первым большим исследованием Пуанкаре в осуществлении этой программы был ряд мемуаров «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями», который даётся русскому читателю в настоящем переводе. В некоторых вопросах, сюда относящихся, результаты Пуанкаре являются фундаментальными и служат основанием для ряда последующих работ. Таково исследование интегральных кривых на плоскости; здесь следующий существенный вклад принадлежит Бендиксону (перевод его мемуара помещён в «Успехах математических наук», 1941, вып. IX); таково исследование траекторий на торе, впоследствии существенно дополненное Данжуа (об исследованиях последнего сообщается в дополнении к настоящему изданию). Общий вопрос об интегральных кривых в n-мерном пространстве только поставлен Пуанкаре, и полученный им ряд результатов носит предварительный характер; но сколько-нибудь полного развития эта теория не получила и до настоящего времени, указывая путь новым исследованиям.

В противоположность Ляпунову, Пуанкаре не всегда строг в доказательствах своих теорем; некоторые его утверждения являются ошибочными. С другой стороны, за 60 лет, протекших со времени появления в свет мемуаров Пуанкаре, прогресс других отделов математики (топологии, теории функций) позволяет по-новому осветить ряд результатов автора. Дополнения к переводу ставят своей целью исправить указанные недочёты и усилить некоторые результаты основного текста.

Мечта Пуанкаре — довести качественную теорию до того уровня, когда она позволит решать основные космогонические проблемы — осталась неосуществлённой и до сих пор; но качественные методы, связанные с именем Пуанкаре, всё глубже проникают в исследования не только в области математики и механики, но и в области физики и техники. Большая заслуга в применении этих методов в физике принадлежит московской школе физиков Л. И. Мандельштама.

В. Степанов.

АНРИ ПУАНКАРЕ

О КРИВЫХ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

*

ПЕРВЫЙ МЕМУАР

Полная теория функций, определяемых дифференциальными уравнениями, была бы чрезвычайно полезна для большого числа вопросов математики и механики. К сожалению, сразу видно, что в громадном большинстве случаев, с которыми нам приходится иметь дело, эти уравнения не могут быть проинтегрированы с помощью уже известных нам функций, например, с помощью функций, определяемых квадратурами. И если бы мы захотели ограничиться только теми случаями, которые можно изучить при помощи определённых или неопределённых интегралов, то область наших исследований оказалась бы чрезвычайно суженной, и огромное большинство вопросов, встречающихся в приложениях, осталось бы нерешённым.

Необходимо, следовательно, изучать функции, определяемые дифференциальными уравнениями сами по себе, не пытаясь сводить их к более простым функциям, так же, как это было сделано по отношению к алгебраическим функциям, которые сначала пытались свести к радикалам, а теперь изучают непосредственно, так же, как это было сделано по отношению к интегралам от алгебраических дифференциалов после долгих попыток выразить их в конечном виде.

Таким образом, исследование свойств функций, определяемых дифференциальными уравнениями, — задача, представляющая величайший интерес. Первый шаг на этом пути уже был сделан, когда было изучено поведение функции, определяемой дифференциальным уравнением, *в окрестности какой-либо данной точки плоскости*. Задача, стоящая теперь перед нами, — это пойти дальше и изучить поведение этой функции *на всём протяжении плоскости*. В этом исследовании нашей отправной точкой, очевидно, будут служить уже известные результаты, относящиеся к поведению такой функции *в некоторой области плоскости*.

Полное исследование функций состоит из двух частей:

1) качественной (если можно так выразиться) части, или геометрического изучения той кривой, которая определяется этой функцией;

2) количественной части, или вычисления численных значений функции.

Так, например, для того чтобы исследовать алгебраическое уравнение, мы сначала определяем, с помощью теоремы Штурма, число действительных корней — это качественная часть; затем находим числовые значения этих корней — в этом заключается количественное изучение уравнения. Точно так же, для того чтобы изучить алгебраическую кривую, мы начинаем с построения этой кривой (как принято выражаться в соответствующих математических курсах), т. е. определяем наличие замкнутых ветвей, бесконечных ветвей и т. д.

После этого качественного изучения кривой можно точно определить некоторое число её точек.

Естественно, что именно с качественной части должно начинаться исследование всякой функции, и поэтому проблема, которая в первую очередь встаёт перед нами, — это *построение кривых, определяемых дифференциальными уравнениями* [1].

Это качественное исследование, когда оно будет полностью выполнено, будет очень полезно для вычисления численных значений искомой функции и позволит более просто установить сходящийся ряд, изображающий искомую функцию в некоторой части плоскости, и главная трудность заключается именно в отыскании надёжного критерия для перехода от одной области, где функция определена одним сходящимся рядом, к другой области, где она выражается с помощью другого ряда.

С другой стороны, это качественное исследование и само по себе представляет первостепенный интерес. К нему могут быть сведены различные, исключительно важные вопросы анализа и механики. Возьмём в качестве примера задачу трёх тел. Разве нельзя поставить вопрос, будет ли одно из этих тел всегда оставаться в некотором участке неба или оно сможет удалиться в бесконечность? Или вопрос о том, будет ли расстояние между двумя из этих тел неограниченно убывать, или, напротив, это расстояние будет всегда заключено в определённых пределах? Разве нельзя поставить тысячу вопросов такого рода, и все эти вопросы будут разрешены, как только мы сумеем качественно построить траектории этих трёх тел. И если рассматривать большее число тел, то чем иным является вопрос о неизменности элементов планет, как не подлинным вопросом качественной геометрии? Так как показать, что большая ось не имеет вековых изменений, это значит обнаружить, что она постоянно колеблется между некоторыми определёнными границами.

Таково обширное поле открытий, простирающееся перед взорами математика. Я не имел претензии пройти его полностью, но я хотел по крайней мере переступить его границы; я ограничился одним весьма частным случаем, тем, который естественно представлялся первым, — именно, изучением дифференциальных уравнений первого порядка и первой степени.

Таким образом, во всём последующем я рассматриваю кривые, определяемые дифференциальным уравнением вида

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y},$$

где X и Y — многочлены, целые относительно x и y. Я называю эти кривые *характеристиками* [2].

Рассматривая две части одной и той же характеристики, находящиеся по одну и по другую сторону от какой-нибудь из её точек, мы разделяем эту характеристику (если только она не является замкнутой кривой) на две различные *полухарактеристики*; эти две полухарактеристики будут в дальнейшем играть довольно существенную роль. Например, предположим, что характеристика есть логарифмическая спираль $\rho = e^{\omega}$; её можно разделить на две полухарактеристики, допустим, так, чтобы одна полухарактеристика состояла бы из точек, для которых

$$\rho < 1,$$

а другая из точек, для которых

$$\rho > 1.$$

Для того чтобы обойти те трудности, которые могут возникнуть при изучении бесконечных ветвей, мы будем предполагать, что кривые спроектированы при помощи гномонической проекции на сферу. Именно, пусть мы имеем плоскость P и точку (x, y) на ней; рассмотрим сферу, разделённую на две полусферы плоскостью, параллельной плоскости P, — мы будем называть эту плоскость *плоскостью экватора*. Если соединить прямой линией центр сферы с точкой (x, y), то эта прямая пересечёт сферу в двух точках, лежащих на разных концах одного и того же диаметра; мы будем обозначать через $(x, y, 1)$ ту из этих точек, которая лежит в одной полусфере, и через $(x, y, 2)$ ту, которая лежит в другой полусфере.

Всякая прямая плоскости P проектируется в большой круг этой сферы. Когда в дальнейшем мы будем говорить о касательной в какой-нибудь точке характеристики, то это будет означать, что речь идёт о большом круге, касающемся характеристики в этой точке.

Всякий большой круг пересекает экватор в двух точках: ω_1 и ω_2; угол, определяющий положение большого круга, проходящего через эти диаметрально противоположные точки ω_1 и ω_2 экватора, измеряется дугой экватора, заключённой между ω_1 и некоторой фиксированной точкой экватора. Угловой коэффициент прямой, соответствующей такому большому кругу, будет тангенсом этого угла.

Наконец, точки перегиба характеристики — это те точки, в которых она пересекает, переходя с одной стороны на другую, соприкасающиеся большие круги.

Очевидно, что при этих условиях через все точки сферы, за исключением некоторых особых точек, проходит одна и только одна характеристика, причём угловой коэффициент касательной к характеристике даётся уравнением

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}.$$

Кроме того, очевидно, что расположение характеристик симметрично по отношению к центру сферы.

ГЛАВА I

ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Прежде чем итти дальше, необходимо дать некоторые определения и привести некоторые общие теоремы, которые окажут нам большую пользу при качественном изучении кривых на сфере.

Рассмотрим сначала кривые на сфере, не имеющие ни двойных точек, ни точек остановки [3].

Мы будем называть кривую на сфере *сферическим циклом*, если, выйдя из некоторой её точки и пройдя конечную дугу этой кривой, мы снова вернёмся в исходную точку [4]. Сферическим циклом будут, например, малый или большой круги на сфере.

Мы будем называть *сферической спиралью* кривую, которая пересекает какой-нибудь сферический цикл только в одной точке. Примером сферической спирали может служить локсодрома, которая пересекает каждый параллельный круг в одной точке.

Сферический цикл разделяет поверхность сферы на две области — одну из них мы будем называть *внутренней*, другую *внешней*; невозможно перейти из одной такой области в другую, не пересекая цикла.

Если соединить две точки характеристики при помощи дуги какой-нибудь кривой, которая, кроме этих двух конечных точек, не имеет никаких других общих точек с характеристикой, то дуга кривой и дуга характеристики, заключённые между этими точками, составят в совокупности сферический цикл. Так, например, если мы соеди-