

Н. Бурбаки

Группы и алгебры Ли

Часть 1

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Б91

Б91 **Бурбаки Н.**
Группы и алгебры Ли: Часть 1 / Н. Бурбаки – М.: Книга по Требованию, 2012. – 496 с.

ISBN 978-5-458-31387-2

Книга входит в завоевавшую мировое признание энциклопедию современной математики «Элементы математики», созданную группой французских ученых, выступающих под псевдонимом Н. Бурбаки. В 1972 г. издательством Мир> был выпущен перевод гл. IV-VI книги «Группы и алгебры Ли», а сейчас предлагается перевод ее начальных глав (в таком же порядке выходили французские издания). Книга отражает самые современные результаты в этой области. В ней имеется обширный материал по теории алгебр Ли, свободных алгебр Ли и групп Ли. Книга предназначена для широкого круга математиков различных специальностей - от студентов до научных работников.

ISBN 978-5-458-31387-2

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2012

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2012

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ОТ РЕДАКТОРОВ ПЕРЕВОДА

В 1972 г. издательством „Мир“ был выпущен перевод глав IV — VI книги Н. Бурбаки „Группы и алгебры Ли“, входящей в известный трактат „Элементы математики“. Французское издание этих глав относится к 1968 г. Ко времени работы над русским изданием гл. IV — VI начальные главы книги еще не были полностью опубликованы, и тогда пришлось нарушить привычный порядок издания.

Настоящий выпуск заполняет образовавшийся пробел: он содержит перевод трех первых глав книги. Французские издания этих глав вышли в разное время: гл. I — вторым изданием в 1971 г., гл. II и III — первым изданием в 1972 г. Глава I посвящена алгебрам Ли, гл. II — свободным алгебрам Ли и гл. III — группам Ли. Логическая зависимость этих глав от других частей трактата указана в примечаниях в начале глав.

Короткое авторское введение имеется в гл. IV — VI (см. русское издание 1972 г.); в этих начальных главах авторское введение отсутствует.

ГЛАВА I

АЛГЕБРЫ ЛИ

В параграфах 1, 2 и 3 K обозначает коммутативное кольцо с единицей. В параграфе 4 K обозначает поле. В параграфах 5, 6 и 7 K обозначает поле характеристики 0¹⁾.

§ 1. Определение алгебр Ли

1. Алгебры

Пусть M — унитарный модуль над K , снабженный билинейным отображением $(x, y) \mapsto xy$ произведения $M \times M$ в M . Тогда выполняются все аксиомы, определяющие алгебры, за исключением ассоциативности умножения. Допуская вольность речи, говорят, что M — не обязательно ассоциативная алгебра над K или, если нет опасности возникновения недоразумений, просто что M — алгебра над K . В настоящем параграфе мы будем использовать эту последнюю терминологию.

Если наделять K -модуль M умножением $(x, y) \mapsto yx$, можно получить еще одну алгебру, про которую говорят, что она *противоположна* к ранее введенной.

K -подмодуль N модуля M , устойчивый относительно умножения, очевидным образом наделяется структурой алгебры над K . Говорят, что N есть *подалгебра* алгебры M . Кроме того, говорят, что N является *левым* (соотв. *правым*) *идеалом* алгебры M , если из того, что $x \in N$, $y \in M$, следует, что $yx \in N$ (соотв. $xy \in N$). Если N — одновременно и левый и правый идеал, то говорят, что он — *двусторонний идеал* алгебры M . В этом случае умножение в M позволяет определить посредством факторизации билинейное умножение в фактормодуле M/N таким образом, что M/N наделяется структурой алгебры. Говорят, что M/N является *факторалгеброй* алгебры M по идеалу N .

Пусть M_1 и M_2 — две алгебры над K и φ — отображение M_1 в M_2 . Говорят, что φ — *гомоморфизм*, если оно K -линейно и если $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ для $x \in M_1$, $y \in M_1$. Ядро φ является двусторонним идеалом в M_1 , а его образ — подалгеброй алгебры M_2 .

¹⁾ Теоремы, доказываемые в настоящей главе, опираются исключительно на результаты, полученные в книгах I — VI, и на несколько результатов из *Комм. алг.*, гл. III, § 2.

При факторизации φ определяет изоморфизм алгебры M_1/N на алгебру $\varphi(M_1)$.

Пусть M — алгебра над K . Отображение D алгебры M в M называется *дифференцированием* этой алгебры, если оно K -линейно и если $D(xy) = (Dx)y + x(Dy)$, как только $x \in M$ и $y \in M$. Это определение обобщает определение 3 из Алг., гл. IV, § 4, п° 3. Ядро дифференцирования алгебры M является подалгеброй в M . Если D_1 и D_2 — дифференцирования алгебры M , то $D_1D_2 - D_2D_1$ — также дифференцирование M (см. Алг., гл. IV, § 4, п° 3, предложение 5; доказательство этого утверждения не использует ассоциативности алгебры).

Пусть M_1 и M_2 — две алгебры над K . В модуле $M = M_1 \times M_2$, являющемся произведением модулей M_1 и M_2 , определим операцию умножения, полагая $(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2y_2)$, если x_1, y_1 — элементы из M_1 , а x_2, y_2 — элементы из M_2 . Алгебра, определенная таким образом, называется *произведением* алгебр M_1 и M_2 . Отображение $x_1 \mapsto (x_1, 0)$ (соотв. $x_2 \mapsto (0, x_2)$) является изоморфизмом M_1 (соотв. M_2) на двусторонний идеал алгебры M . С помощью этих изоморфизмов M_1 и M_2 отождествляются с двусторонними идеалами алгебры M . После этого K -модуль M становится прямой суммой подмодулей M_1 и M_2 . Обратно, пусть M — алгебра над K и M_1, M_2 — двусторонние идеалы M , такие, что M является прямой суммой M_1 и M_2 . Имеем $M_1M_2 \subset M_1 \cap M_2 = \{0\}$; поэтому, если x_1, y_1 принадлежат M_1 и x_2, y_2 принадлежат M_2 , то $(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = x_1y_1 + x_2y_2$, так что M отождествляется с произведением алгебр $M_1 \times M_2$. Каждый левый (соотв. правый, двусторонний) идеал алгебры M_1 является левым (соотв. правым, двусторонним) идеалом в M . Мы предлагаем читателю позаботиться о формулировке аналогичных результатов в случае произвольного конечного семейства алгебр.

Пусть M — алгебра над K , и предположим, что K -модуль M допускает базис $(a_\lambda)_{\lambda \in L}$. Для любых λ, μ из L существует, и притом единственная, система $(\gamma_{\lambda\mu\nu})_{(\lambda, \mu, \nu) \in L \times L \times L}$ элементов из K , такая, что $a_\lambda a_\mu = \sum_{\nu} \gamma_{\lambda\mu\nu} a_\nu$. Элементы $\gamma_{\lambda\mu\nu}$ называются *структурными константами алгебры M в базисе (a_λ)* .

Пусть M — алгебра над K , K_0 — коммутативное кольцо с единицей, а ρ — гомоморфизм кольца K_0 в K , переводящий единицу в единицу. В этом случае M можно рассматривать как алгебру над K_0 , полагая $\alpha \cdot x = \rho(\alpha) \cdot x$ для $\alpha \in K_0, x \in M$. В частности, это так, если в качестве K_0 взять подкольцо кольца K , содержащее единицу, а в качестве ρ — тождественное отображение K_0 в K .

Пусть M — алгебра над K , K_1 — коммутативное кольцо с единицей, а σ — гомоморфизм K в K_1 , переводящий единицу в единицу.

Пусть $M_{(K_1, \sigma)} = M_{(K_1)}$ есть K_1 -модуль, получающийся из M расширением кольца скаляров до K_1 (Алг., гл. III, приложение II, п° 10). Умножение в M канонически определяет K_1 -билинейное отображение $M_{(K_1)} \times M_{(K_1)}$ в $M_{(K_1)}$ (Алг., гл. IX, § 1, п° 4) так, что $M_{(K_1)}$ называется наделенным структурой алгебры над K_1 (про которую говорят, что она *получается из M расширением кольца скаляров до K_1*). В частности, это так, если K — подкольцо кольца K_1 , содержащее единичный элемент, и σ — тождественное отображение K в K_1 .

2. Алгебры Ли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Алгебра $\mathfrak{g}$ над K называется алгеброй Ли над K , если умножение в ней (обозначаемое через $(x, y) \mapsto [x, y]$) удовлетворяет тождествам

$$[x, x] = 0, \quad (1)$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \quad (2)$$

где x, y, z — элементы из $\mathfrak{g}$.

Произведение $[x, y]$ называется *коммутатором* (иногда — *скобкой*) x и y . Тождество (2) называется *тождеством Якоби*.

Коммутатор $[x, y]$ является билинейной знакопеременной функцией элементов x, y . Это означает, что

$$[x, y] = -[y, x], \quad (3)$$

так что тождество Якоби можно записать в виде

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]. \quad (4)$$

Любая подалгебра и факторалгебра алгебры Ли сами являются алгебрами Ли. Произведение алгебр Ли также является алгеброй Ли. Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, то и алгебра $\mathfrak{g}^0$, ей противоположная, — снова алгебра Ли, а отображение $x \mapsto -x$ есть изоморфизм $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}^0$ в силу тождества (3).

Пример 1. Пусть L — ассоциативная алгебра над K . Коммутатор $[x, y] = xy - yx$ является билинейной функцией x и y . Легко проверить, что умножение в K -модуле L , задаваемое правилом $(x, y) \mapsto [x, y]$, превращает L в алгебру Ли над K .

Пример 2. В примере 1 выберем в качестве алгебры L алгебру эндоморфизмов K -модуля E . Тогда мы получим *алгебру Ли эндоморфизмов модуля E* , обозначаемую через $\mathfrak{gl}(E)$. (Если $E = K^n$, то вместо $\mathfrak{gl}(E)$ употребляется обозначение $\mathfrak{gl}(n, K)$.)

Любая подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{gl}(E)$ есть алгебра Ли над K . В частности:

1° Если модуль E наделен структурой алгебры (не обязательно ассоциативной), то дифференцирования алгебры E образуют алгебру Ли над K .

2° Если E допускает конечный базис, то его эндоморфизмы со следом нуль образуют алгебру Ли над K , которая обозначается через $\mathfrak{sl}(E)$ (или $\mathfrak{sl}(n, K)$, если $E = K^n$).

3° Множество $M_n(K)$ квадратных матриц порядка n можно рассматривать как алгебру Ли над K , канонически изоморфную $\mathfrak{gl}(n, K)$. Пусть (E_{ij}) — канонический базис алгебры $M_n(K)$ (Алг., гл. II, § 6, п° 2). Легко получить, что

$$\begin{aligned} [E_{ij}, E_{kl}] &= 0, & \text{если } j \neq k \text{ и } i \neq l, \\ [E_{ij}, E_{jl}] &= E_{ii}, & \text{если } i \neq l, \\ [E_{ij}, E_{ki}] &= -E_{kj}, & \text{если } j \neq k, \\ [E_{ij}, E_{ji}] &= E_{ii} - E_{jj}. \end{aligned} \quad (5)$$

Символом $\mathfrak{t}(n, K)$ (соотв. $\mathfrak{st}(n, K)$, $\mathfrak{n}(n, K)$) обозначается подалгебра Ли алгебры $M_n(K)$, образованная треугольными (соотв. треугольными со следом нуль, соотв. нильтреугольными) матрицами (Алг., гл. II, § 6, п° 5).

*Пример 3. Пусть V — бесконечно дифференцируемое вещественное многообразие. Дифференциальные операторы с вещественными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами на V образуют ассоциативную алгебру над $\mathbf{R}$ и, следовательно, в соответствии с примером 1 алгебру Ли Δ над $\mathbf{R}$. Коммутатор двух бесконечно дифференцируемых векторных полей на V есть снова бесконечно дифференцируемое векторное поле, следовательно, бесконечно дифференцируемые векторные поля на V образуют подалгебру Ли $\mathfrak{f}$ алгебры Δ . Если V является *вещественной группой Ли*, то левоинвариантные векторные поля образуют подалгебру Ли $\mathfrak{g}$ алгебры $\mathfrak{f}$, называемую *алгеброй Ли группы V* . Векторное пространство $\mathfrak{g}$ отождествляется с касательным пространством к V в e (единичный элемент группы V). Пусть V' — другая вещественная группа Ли, e' — ее единичный элемент, $\mathfrak{g}'$ — ее алгебра Ли. Любой аналитический гомоморфизм многообразия V в V' определяет линейное отображение касательного пространства к V в e в касательное пространство к V' в e' ; это отображение является гомоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли $\mathfrak{g}'$. Если V — линейная группа вещественного конечномерного пространства E , то существует канонический изоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{gl}(E)$ на алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы V , с помощью которого $\mathfrak{g}$ отождествляют с $\mathfrak{gl}(E)$. *

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и x — ее элемент. Линейное отображение $y \mapsto [x, y]$ алгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}$ называется

линейным отображением, присоединенным к x , и обозначается через ad_x или $\text{ad } x$.

Предложение 1. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Для любого $x \in \mathfrak{g}$ отображение $\text{ad } x$ является дифференцированием алгебры $\mathfrak{g}$. Отображение $x \mapsto \text{ad } x$ есть гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли $\mathfrak{d}$ дифференцирований алгебры $\mathfrak{g}$. Если $D \in \mathfrak{d}$ и $x \in \mathfrak{g}$, то $[D, \text{ad } x] = \text{ad } (Dx)$.

В самом деле, тождество (4) можно записать в виде

$$(\text{ad } x) \cdot [y, z] = [(\text{ad } x) \cdot y, z] + [y, (\text{ad } x) \cdot z],$$

или

$$(\text{ad } [x, y]) \cdot z = (\text{ad } x) \cdot ((\text{ad } y) \cdot z) - (\text{ad } y) \cdot ((\text{ad } x) \cdot z),$$

откуда вытекают два первые утверждения. С другой стороны, если $D \in \mathfrak{d}$, $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{g}$, то $[D, \text{ad } x] \cdot y = D([x, y]) - [x, Dy] \Rightarrow [Dx, y] = (\text{ad } Dx) \cdot y$, откуда вытекает последнее утверждение.

Отображение $\text{ad } x$ называется также *внутренним дифференцированием*, определенным элементом x .

3. Коммутативные алгебры Ли

Определение 3. Говорят, что два элемента x, y алгебры Ли перестановочны, если $[x, y] = 0$. Говорят, что $\mathfrak{g}$ коммутативна, если любые два ее элемента перестановочны.

Пример 1. Пусть L — ассоциативная алгебра, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, которая определена в $\mathfrak{p}^2$, **пример 1.** Два элемента x, y перестановочны в $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда $xy = yx$ в L .

***Пример 2.** Если вещественная группа Ли G коммутативна, то ее алгебра Ли коммутативна. *

Каждый K -модуль можно, очевидно, единственным образом наделить структурой коммутативной алгебры Ли над K .

Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, то любой ее моногенный подмодуль является коммутативной подалгеброй в $\mathfrak{g}$.

4. Идеалы

Из тождества (3) следует, что в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ нет разницы между левыми и правыми идеалами и любой идеал является двусторонним. Поэтому мы будем говорить просто об идеалах.

***Пример.** Пусть G — группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, H — подгруппа Ли в G . Любое левоинвариантное векторное поле на H канонически определяет левоинвариантное векторное поле на G , что влечет за собой наличие канонического вложения алгебры Ли $\mathfrak{h}$ группы H в $\mathfrak{g}$; посредством этого вложения $\mathfrak{h}$ отожде-

ствляется с подалгеброй алгебры $\mathfrak{g}$. Если H нормальна в G , то канонический образ $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ является в последней идеалом. *

Идеал алгебры $\mathfrak{g}$ является ее подмодулем, устойчивым относительно ее внутренних дифференцирований.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Подмодуль алгебры $\mathfrak{g}$, устойчивый относительно всех ее дифференцирований, называется характеристическим идеалом в $\mathfrak{g}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — ее идеал (соотв. характеристический идеал) и $\mathfrak{b}$ — характеристический идеал алгебры Ли $\mathfrak{a}$. Тогда $\mathfrak{b}$ — идеал (соотв. характеристический идеал) алгебры $\mathfrak{g}$.

В самом деле, любое внутреннее дифференцирование (соотв. любое дифференцирование) $\mathfrak{g}$ отображает $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{a}$ и индуцирует в $\mathfrak{a}$ дифференцирование, $\mathfrak{a}$ поэтому отображает и $\mathfrak{b}$ в себя.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — идеалы в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ — идеалы в $\mathfrak{g}$.

Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — подмодули в $\mathfrak{g}$. Допуская вольность в обозначениях, символом $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ обозначим подмодуль модуля $\mathfrak{g}$, порожденный элементами вида $[x, y]$ ($x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}$). Вследствие тождества (3) выполняется равенство $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = [\mathfrak{b}, \mathfrak{a}]$. Если $z \in \mathfrak{g}$, то под $[z, \mathfrak{a}]$, или $[\mathfrak{a}, z]$, будем понимать подмодуль $[Kz, \mathfrak{a}] = = (\text{ad } z)(\mathfrak{a})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — идеалы (соотв. характеристические идеалы) алгебры $\mathfrak{g}$, то $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ — также идеал¹⁾ (соотв. характеристический идеал) в $\mathfrak{g}$.

В самом деле, пусть D — внутреннее (соотв. произвольное) дифференцирование алгебры $\mathfrak{g}$. Если $x \in \mathfrak{a}$ и $y \in \mathfrak{b}$, то

$$D([x, y]) = [Dx, y] + [x, Dy] \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}],$$

откуда следует доказываемое утверждение.

Если $\mathfrak{a}$ — подмодуль в $\mathfrak{g}$, то множество $x \in \mathfrak{g}$, таких, что $(\text{ad } x) \cdot \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$, есть подалгебра и алгебры $\mathfrak{g}$, называемая *нормализатором* $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{g}$. Если, кроме того, $\mathfrak{a}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{n}$ и $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{n}$.

5. Производный ряд, нижний центральный ряд

Характеристический идеал $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, обозначаемый через $\mathcal{D}\mathfrak{g}$, называется *производным идеалом* (или *коммутантом*) алгебры $\mathfrak{g}$.

Любой подмодуль в $\mathfrak{g}$, содержащий $\mathcal{D}\mathfrak{g}$, является идеалом в $\mathfrak{g}$.

¹⁾ Он называется взаимным коммутантом $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. — Прим. перев.

Производным рядом алгебры $\mathfrak{g}$ называется убывающая последовательность $\mathcal{D}^0\mathfrak{g}, \mathcal{D}^1\mathfrak{g}, \dots$ характеристических идеалов в $\mathfrak{g}$, рекуррентно определяемых следующим образом: 1) $\mathcal{D}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$; 2) $\mathcal{D}^{p+1}\mathfrak{g} = [\mathcal{D}^p\mathfrak{g}, \mathcal{D}^p\mathfrak{g}]$.

Нижним (или убывающим) центральным рядом алгебры $\mathfrak{g}$ называется убывающая последовательность $\mathcal{E}^1\mathfrak{g}, \mathcal{E}^2\mathfrak{g}, \dots$ характеристических идеалов, рекуррентно определяемых следующим образом: 1) $\mathcal{E}^1\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$; 2) $\mathcal{E}^{p+1}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathcal{E}^p\mathfrak{g}]$. Имеем $\mathcal{E}^2\mathfrak{g} = \mathcal{D}\mathfrak{g}$ и $\mathcal{E}^{p+1}\mathfrak{g} \supset \mathcal{D}^p\mathfrak{g}$ для любых p , что немедленно доказывается индукцией по p .

Предложение 4. Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — две алгебры Ли над K и f — гомоморфизм $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{h}$. Тогда $f(\mathcal{D}^p\mathfrak{g}) = \mathcal{D}^p\mathfrak{h}$, $f(\mathcal{E}^p\mathfrak{g}) = \mathcal{E}^p\mathfrak{h}$.

Если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — подмодули в $\mathfrak{g}$, то обязательно $f([\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]) = [f(\mathfrak{a}), f(\mathfrak{b})]$. Утверждение доказывается теперь непосредственно индукцией по p .

Следствие. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Для того чтобы алгебра Ли $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ была коммутативной, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{a} \supset \mathcal{D}\mathfrak{g}$.

В самом деле, безразлично, сказать ли, что $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ коммутативна или что $\mathcal{D}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = 0$. Однако $\mathcal{D}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$, согласно предложению 4, является каноническим образом $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$.

6. Верхний центральный ряд

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и P — подмножество в $\mathfrak{g}$. *Централизатором* P в $\mathfrak{g}$ называется совокупность элементов из $\mathfrak{g}$, перестановочных с этим множеством P . Централизатор есть пересечение ядер отображений $\text{ad } y$, где y пробегает P , а потому является подалгеброй в $\mathfrak{g}$.

Предложение 5. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — идеал (соотв. характеристический идеал) в $\mathfrak{g}$. Централизатор $\mathfrak{a}'$ идеала $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{g}$ есть идеал (соотв. характеристический идеал) алгебры $\mathfrak{g}$.

В самом деле, пусть D — внутреннее (соотв. произвольное) дифференцирование алгебры $\mathfrak{g}$. Если $x \in \mathfrak{a}'$ и $y \in \mathfrak{a}$, то

$$[Dx, y] = D([x, y]) - [x, Dy] = 0,$$

откуда $Dx \in \mathfrak{a}'$. Предложение доказано.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. *Центром* алгебры $\mathfrak{g}$ называется централизатор $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}$, т. е. характеристический идеал, состоящий из таких элементов $x \in \mathfrak{g}$, что $[x, y] = 0$ для всех $y \in \mathfrak{g}$. Центр алгебры $\mathfrak{g}$ является ядром гомоморфизма $x \mapsto \text{ad } x$.

Верхним (или возрастающим) центральным рядом алгебры $\mathfrak{g}$ называется возрастающая последовательность $\mathcal{C}_0\mathfrak{g}, \mathcal{C}_1\mathfrak{g}, \dots$ характеристических идеалов $\mathfrak{g}$, рекуррентно определяемых следующим образом: 1) $\mathcal{C}_0\mathfrak{g} = \{0\}$; 2) $\mathcal{C}_{p+1}\mathfrak{g}$ есть прообраз центра алгебры $\mathfrak{g}/\mathcal{C}_p\mathfrak{g}$ при каноническом отображении $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}/\mathcal{C}_p\mathfrak{g}$.

Идеал $\mathcal{C}_1\mathfrak{g}$ является центром алгебры $\mathfrak{g}$.

7. Расширения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — две алгебры Ли над K . Расширением $\mathfrak{b}$ при помощи $\mathfrak{a}$ (или посредством $\mathfrak{a}$) называется последовательность.

$$\mathfrak{a} \xrightarrow{\lambda} \mathfrak{g} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{b},$$

где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K , μ — сюръективный гомоморфизм $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{b}$ и λ — инъективный гомоморфизм $\mathfrak{a}$ на ядро μ .

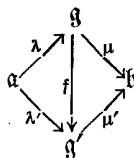
Ядро μ гомоморфизма μ называется ядром этого расширения. Гомоморфизм λ является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{a}$ на $\mu^{-1}(0)$, а гомоморфизм μ определяет при факторизации изоморфизм $\mathfrak{g}/\mu^{-1}(0)$ на $\mathfrak{b}$.

Допуская вольность речи, говорят также, что $\mathfrak{g}$ является расширением $\mathfrak{b}$ при помощи $\mathfrak{a}$.

Два расширения

$$\mathfrak{a} \xrightarrow{\lambda} \mathfrak{g} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a} \xrightarrow{\lambda'} \mathfrak{g}' \xrightarrow{\mu'} \mathfrak{b}$$

называются эквивалентными, если существует гомоморфизм f алгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}'$, такой, что диаграмма



коммутативна (т. е. что $f \circ \lambda = \lambda'$, $\mu' \circ f = \mu$). Покажем, что любой такой гомоморфизм обязательно *биективен*. Прежде всего, f инъективен. В самом деле, если $x \in \mathfrak{g}$ таков, что $f(x) = 0$, то $\mu(x) = \mu'(f(x)) = 0$, откуда $x = \lambda(y)$, где $y \in \mathfrak{a}$; далее, $\lambda'(y) = f(\lambda(y)) = f(x) = 0$, поэтому $y = 0$, а следовательно, и $x = 0$. С другой стороны, f сюръективен. Действительно, отображение $\mu' \circ f = \mu$ сюръективно, поэтому $f(\mathfrak{g}) + \lambda'(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}'$; из других соображений, однако, видно, что $f(\mathfrak{g}) \supset f(\lambda(\mathfrak{a})) = \lambda'(\mathfrak{a})$.

Из доказанного следует, что только что введенное отношение между двумя расширениями является *отношением эквивалентности*.