П. С. Александров

Энциклопедия элементарной математики

Том 1. Арифметика

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
П11

П. С. Александров
П11 Энциклопедия элементарной математики: Том 1. Арифметика / П. С. Александров – М.: Книга по Требованию, 2023. – 448 с.

ISBN 978-5-458-25956-9

Энциклопедия элементарной математики в 5 томах.Том 1. Арифметика.Происхождение систем счисления. Понятия множества, группы, кольца и поля; теоретические основы арифметики. Элементы теории чисел. Устный и письменный счёт; вспомогательные средства вычислений.

ISBN 978-5-458-25956-9

УСТНЫЙ И ПИСЬМЕННЫЙ СЧЁТ. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СРЕДСТВА ВЫЧИСЛЕНИЙ

(В. М. Брадис)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Издание «Энциклопедии элементарной математики» задумано Академией педагогических наук РСФСР как пособие для учителей математики средней школы и студентов физико-математических факультетов педагогических и учительских институтов. Его назначение — дать систематическое изложение научных основ школьного предмета математики. Отсюда вытекают особенности этого издания. Прежде всего труд этот не может служить для первоначального изучения предмета. Он предназначается для людей, изучавших элементарную математику и уже ставших или готовящихся стать преподавателями элементарной математики. Он не следует, как правило, ни порядку, ни способу изложения математики в средней школе, так как то и другое обусловлено возрастными особенностями учащихся и общеобразовательными целями средней школы, т. е. соображениями, которые не играют роли по отношению к подготовленному читателю-профессионалу. Логика нашего издания — это логика систематического, по возможности простого и доступного, изложения тех вопросов математической науки, из которых строится школьный курс, а также и тех, которые хотя и не находят в этом курсе прямого выражения, однако необходимы для правильного и сознательного его понимания и создают перспективы для дальнейшего развития содержания и методов школьного курса.

Всё издание рассчитано на 7 книг объёмом от 350 до 450 страниц в каждой. Хотя эти книги и их разделы подчинены единому плану, всё же, как правило, ими можно пользоваться независимо одна от другой. Более того, разделы этих книг также могут читаться в большой мере независимо друг от друга. В то же время в отдельных статьях книги встречаются ссылки на ту или иную статью «Энциклопедии» [1]). Вот общий план издания:

Книга первая. Арифметика.

Происхождение систем счисления. Понятия множества, группы, кольца и поля; теоретические основы арифметики. Элементы теории чисел. Устный и письменный счёт; вспомогательные средства вычислений.

---

[1]) Ссылки на статьи из той же книги сопровождаются указанием соответствующих страниц; при ссылках на статьи, помещённые в других книгах «Энциклопедии», указывается «См. Э. э. м.» и приводятся номер книги и название статьи.

Книга вторая. Алгебра.

Векторные пространства и линейные преобразования. Кольцо многочленов и поле рациональных функций. Численные и графические методы решения уравнений.

Книга третья. Анализ.

Функции и пределы; рациональная, степенная, показательная и логарифмическая функции; тригонометрические функции и обратные им. Элементы дифференциального и интегрального исчислений. Элементарные функции комплексного переменного.

Книга четвёртая. Геометрия, часть I.

Топологические понятия. Основания геометрии. Понятие о неевклидовых геометриях. Элементы аналитической и проективной геометрии. Геометрические преобразования. Измерение площадей, длин, объёмов и поверхностей.

Книга пятая. Геометрия, часть II.

Многоугольники и многогранники. Круги и сферы. Применения к геодезии и астрономии. Замечательные кривые и поверхности. Задачи на построение. Методы графических изображений.

Книга шестая. Различные вопросы.

Комбинаторика. Элементы теории вероятностей и математической статистики. Знаменитые математические задачи. Математические парадоксы и софизмы. Математические развлечения и игры.

Книга седьмая. Методология и история математики.

Математика и её место среди других наук, основные этапы её развития, методы и задачи. Очерк истории математики. Математика в Советском Союзе. Приложение. Терминологический словарь.

Первая книга открывается статьёй И. Г. Башмаковой и А. П. Юшкевича, посвящённой системам счисления и нумерации, рассматриваемым в культурно-историческом разрезе.

Далее идёт обширная статья И. В. Проскурякова, задача которой заключается в построении теоретических основ арифметики. В двух первых главах статьи рассматриваются весьма общие математические понятия, значение которых далеко выходит за пределы арифметики и которые неоднократно используются как в первой книге, так и в дальнейших. Это понятия множества, группы, кольца и поля.

Центральное место в статье занимает аксиоматическое изложение теории натуральных чисел; это — теоретический фундамент всей арифметики. На основе теории натуральных чисел развёртывается в порядке последовательного обобщения теория целых, рациональных, действительных и, наконец, комплексных чисел. Автор знакомит также с дальнейшими обобщениями понятия числа (гиперкомплексные числа). Вся статья в целом принадлежит к числу наиболее трудных и отвлечённых во всём настоящем издании; трудности здесь коренятся в самом существе дела. Читатель, не заинтересованный в первую очередь вопросами логического обоснования арифметики, может опустить эту статью, обращаясь по мере надобности для справок к её первым двум главам.

Статья А. Я. Хинчина излагает наиболее элементарные и важные вопросы теории чисел. Сюда относятся вопросы, связанные с теорией делимости, в частности теория цепных (непрерывных) дробей и вопросы приближения иррациональных чисел посредством рациональных.

Наконец, статья В. М. Брадиса посвящена вопросам округления чисел, правилам приближённых вычислений, подсчёта погрешностей и вспомогательным средствам вычислений, включая логарифмическую линейку.

Существенным дополнением к первой книге должны служить сведения об этапах исторического развития понятия числа, о постепенном и весьма длительном формировании общего понятия натурального числа, о развитии понятия дроби, о том прообразе позднейшей теории действительных положительных чисел, который сложился у древних греков (в «Началах Евклида»), о развитии понятия отрицательных и комплексных чисел в связи с теорией уравнений, а впоследствии — аналитической геометрией и анализом. Эти сведения не выделяются нами в отдельную статью; они включаются в общий очерк истории математики, помещаемый в последней книге всего издания.

Редакция

И. Г. БАШМАКОВА и А. П. ЮШКЕВИЧ

ПРОИСХОЖДЕНИЕ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ

ВВЕДЕНИЕ

Целью всякой нумерации является изображение любого натурального числа с помощью небольшой группы индивидуальных знаков. Этого можно было бы достичь при помощи одного единственного знака 1 (единицы). Каждое натуральное число тогда записывалось бы путём повторения символа единицы столько раз, сколько в этом числе содержится единиц. Сложение свелось бы к простому приписыванию единиц, а вычитание — к их вычёркиванию. Лежащая в основании такой системы идея весьма проста, однако система эта является крайне неудобной. Для записи больших чисел она практически неприменима и ею пользовались только народы, счёт которых не простирался дальше одного-двух десятков.

Наиболее совершенным принципом записи чисел является тот, на котором основана наша десятичная система нумерации. В этой нумерации все числа от 1 до 9 обозначаются индивидуальными символами 1, 2, 3, ..., 9. К ним присоединяется знак 0 для нуля. Любое натуральное число может быть изображено при помощи *только* этих десяти знаков по принципу *поместного* или *позиционного* значения.

Всякое натуральное число n однозначно представимо в виде

$$n = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \dots + a_1 10 + a_0,$$

где a_i могут принимать значения 0, 1, 2, ..., 9. Тогда число n в позиционной системе запишется так:

$$n = a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0.$$

Каждый символ a_i получает значение, определяемое: 1) его начертанием, 2) его положением в записи числа. Если, например, мы хотим записать четыре тысячи, мы должны поставить цифру 4 на четвёртое место, считая справа; остальные три разряда в данном случае отсутствуют, поэтому на их место ставятся нули: 4000. Таким же образом символ 4 может означать 4 единицы, 4 десятка, 4 сотни и т. д., смотря по тому положению, которое он занимает.

Несмотря на кажущуюся простоту такой системы записи, она явилась продуктом длительного исторического развития, и в создании её принимали участие целые народы. Можно сказать даже, что создание такой системы является делом всего человечества. Известный французский математик и физик XVIII—XIX вв. Лаплас писал: «Мысль выражать все числа 9 знаками, придавая им, кроме значения по форме, ещё значение по месту, настолько проста, что именно из-за этой простоты трудно понять, насколько она удивительна. Как нелегко было притти к этой метóде, мы видим на примере величайших гениев греческой учёности Архимеда и Аполлония, от которых эта мысль осталась скрытой».

В качестве основания позиционной системы могут быть взяты и другие числа, отличные от 10. Многие учёные, например, считали, что более удобным основанием было бы число 12, имеющее больше делителей: 2, 3, 4, 6. Особенно широкое распространение десятичной системы связано с количеством пальцев на наших руках. На это обстоятельство впервые обратил внимание Аристотель в своих «Проблемах». Десятичная система на самом деле не обладает какими-либо особыми преимуществами, выделяющими её из позиционных систем с другим основанием. Выбор основания является принципиально произвольным. Разумеется, оно не должно быть слишком большим, так как в этом случае система будет содержать слишком много цифр, очень громоздка будет в ней таблица умножения и т. д. С другой стороны, оно не должно быть и слишком маленьким [1]).

Свидетельством того, что не во все эпохи системы нумерации совпадали с нашей современной, служит уже наша речь. В названиях числительных вовсе не заметно того единообразия, которое имеет место в их записи. Так, в нашем родном языке, кроме различных названий для девяти первых натуральных чисел 1, 2, ..., 9 и нуля, имеется специальное название для десяти (тогда как при письме мы обозначаем десять, как 10, т. е. с помощью 1 и 0). Такие же специальные названия существуют для ряда единиц высших разрядов: сорок [2]), сто, тысяча, миллион и т. д.

Далее, числа, начиная с 11 до 19, мы называем один-на-дцать, ..., девят-на-дцать, т. е. называем некоторое число от 1 до 9 с добавлением «на десять». Частица «на» здесь, очевидно, не означает умножения, и о её происхождении мы скажем ниже.

Числа от 21 до 99 произносятся большею частью по тому же принципу, по которому они записываются: два-дцать один (два-десять один), тридцать два и т. д. Исключениями служат числительные сорок и девяносто [3]). Числа, имеющие индивидуальные, не

---

[1]) Сущность нумерации с произвольным основанием была впервые разобрана Б. Паскалем в сочинении De numeris multiplicibus ex sola characterum numericorum additione agnoscendis («О делимости чисел, выведенной с помощью одного сложения их цифр», 1654, опубл. 1665).

[2]) Число 40 в русской нумерации и у многих народов Востока играло особую роль, о чём будет сказано ниже.

[3]) Слово девяносто не относится к узловым (см. ниже). Есть предположение, что оно возникло как сочетание «девять до ста».

разложимые на составные числительные наименования (*один*, два, десять, сорок, сто, тысяча, ...), мы будем называть *узловыми*. Числа, наименования которых получаются комбинированием наименований узловых чисел, мы будем называть *алгорифмическими*. Как мы увидим, отличие в наименовании тех и других отражает отличие в их происхождении [1]).

Аналогичные явления имеют место и в других языках. Например, во французском языке сохранились явные остатки двадцатиричной непозиционной системы. Двадцать является тем новым узловым числом, название которого не складывается из названий первых десяти чисел: vingt. Число 80 произносится, как «четыре-двадцать», quatre-vingts, 90—как «четыре-двадцать-десять», quatre-vingts-dix, 120 — как «шесть-двадцать», six-vingts. В старофранцузском языке, кроме того, 140 произносилось, как «семь-двадцать», 160 — как «восемь-двадцать», 300 — как «пятнадцать-двадцать» и т. д. В романских, немецком, английском языках, как и в русском языке, имеются специальные названия для ста, тысячи и т. д. Следы двадцатиричной системы сохранились, кроме французского, в английском, голландском языках. Так, по-английски слово score означает наряду с иными понятиями число 20, а three score, т. е. «три-двадцать», — шестьдесят. В скандинавских языках сильны, кроме того, следы пятиричной системы.

Таким образом:

1) современная письменная система счисления является строго позиционной, а устная не является строго позиционной;

2) письменная является строго десятичной, устная сохраняет следы существования пятиричной и иных систем;

3) в письменной системе существует только десять узловых чисел 0, 1, 2, ... , 9, в устном счёте имеются и другие узловые числа, каждое из которых служит основанием своей местной системы, т. е. основанием некоторого отрезка числового ряда, а не всего числового ряда (например, в русском языке, начиная от ста, счёт идёт путём комбинирования ста с меньшими узловыми или алгорифмическими числами: сто один, сто два и т. д.).

Можно заметить, что наша устная речь отражает более раннюю стадию счёта, чем наша нумерация. Так, например, римская письменная нумерация, предшествовавшая появлению нашей позиционной системы, родственна по своей структуре устной нумерации современных европейских народов.

---

[1]) Различение «перстов» (числа до 10), «составов» (целых десятков) и «сочинений» (прочие числа в пределах до ста) имеется в «Арифметике» Л. Магницкого (1703). Наиболее ранний известный пример подобного распределения чисел встречается у Герберта в X в. (digiti, articuli, compositi). Очевидно, что мы имеем здесь дело с отражением того же разделения чисел на узловые и алгорифмические. Несомненна также связь терминов «персты» и «суставы» с пальцевым счётом.

Узловыми числами в римской нумерации являются: I — единица, V — пять, X — десять, L — пятьдесят, C — сто, D — пятьсот, M — тысяча. Нуля там нет. Система эта является десятичной непозиционной с сильными следами пятиричной системы (индивидуальные символы для 5, 50, 500). Все алгорифмические числа получаются в результате сложения и вычитания узловых. Например, число 1948 в этой системе запишется так: MCMXLVIII.

Примерно в том же отношении, в каком римская письменная нумерация находится к современному устному счёту, способы счёта многих так называемых «первобытных» народов находились к римской системе нумерации. Уже из сказанного понятно, что для выяснения происхождения систем счисления (как современной позиционной, так и непозиционных) мы должны будем использовать и этнографический и языковедческий материал.