

К.У. Шахно

**Сборник конкурсных задач
по математике с решениями**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 82-053.2
ББК 74.27
К11

К.У. Шахно
К11 Сборник конкурсных задач по математике с решениями / К.У. Шахно – М.: Книга по Требованию, 2012. – 234 с.

ISBN 978-5-458-25491-5

В «Сборнике» помещено 540 задач и вопросов по математике, предлагавшихся в 1946–1951 гг. на вступительных экзаменах в Ленинградский университет имени А. А. Жданова, Московский университет имени М. В. Ломоносова, Ленинградский политехнический институт имени М. И. Калинина, Ленинградский электротехнический институт имени В. И. Ульянова (Ленина) и другие высшие учебные заведения. Задачи, по возможности, систематизированы и снабжены решениями. «Сборник» ставит своей целью ознакомить оканчивающих среднюю школу и учителей с характером требований по математике, предъявляемых к поступающим в высшие учебные заведения, и тем самым содействовать устранению имеющегося разрыва между требованиями, предъявляемыми на выпускных экзаменах в школах, и требованиями, предъявляемыми на приемных экзаменах в вузах. Вместе с тем, та часть книги, которая содержит решения, может послужить методическим пособием как учащимся при подготовке к вступительным экзаменам, так и молодым учителям в их школьной работе.

ISBN 978-5-458-25491-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2012

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2012

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

30. $\frac{(x^2 + y\sqrt{xy} + x\sqrt{xy} + y^2)(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{-2} - \sqrt{xy}}{x - y} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$
31. $\frac{\left(\frac{\sqrt[4]{x^3y} - x}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)(\sqrt[4]{xy} + \sqrt{y})}{x + y - (x\sqrt{x} + y\sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{-1}}.$
32. $\left(\frac{\sqrt[4]{ab^3} + \sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1 - \sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right) : \left(\frac{a - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} - 1} - \frac{a + \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a} + 1}\right).$
33. $\left(\frac{1 - \sqrt{a}}{1 - \sqrt[4]{a^3} - \sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt[4]{a^{-1}} + \sqrt[4]{a^2}}{1 + \sqrt[4]{a^{-1}}} - \sqrt{a}}\right)^5.$
34. $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt[4]{bx^3} + \sqrt[4]{a^2bx}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} + \sqrt[4]{bx}\right)^3 + bx + 3}{x(\sqrt{b} + \sqrt{3x^{-1}})^3}.$
35. $\left(\sqrt[3]{\frac{x^3 + 2ax^2 + a^2x}{x - a}} - \sqrt[3]{\frac{x^3 - 2ax^2 + a^2x}{x + a}}\right)^{-1} \sqrt[3]{a} +$
 $+ \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{x} - \frac{a^{-2}}{x^{-1}}}.$
36. $\left[\left(\frac{a\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{a^2b^3}}{\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{a^2b}} - \sqrt[4]{ab}\right) : (\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}) - \sqrt[4]{a}\right]^{-4}.$
37. $\sqrt[3]{a} - \left(\frac{1 + a\sqrt[3]{a} + a + \sqrt[3]{a}}{1 - \sqrt[3]{a^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a-2}}\right) \cdot \frac{\frac{1+a}{\sqrt[3]{a}+1} - \sqrt[3]{a^2}}{a^{-\frac{1}{3}} + \sqrt[3]{a}}.$
38. $(x + a^{\frac{3}{2}} : \sqrt{x})^{\frac{1}{5}} \left(1 - \sqrt{\frac{a}{x}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}\right)^{-\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[10]{(x-a)^3}.$
39. $\left(\frac{\frac{a + \sqrt[3]{2a^2x}}{2x + \sqrt[3]{4ax^2}} - 1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{2x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2x}}\right)^{-6}.$
40. $\frac{(a + a\sqrt{x} + x + x\sqrt{x})^2(1 - \sqrt{x})^2}{x + x^{-1} - 2} - x^{\frac{3}{2}} a \sqrt{\frac{a^2}{x} + 4a + 4x}.$

- $$41. \frac{\left[x \sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^2}} - (x+1) \sqrt[3]{(x^2-1)^{-2}} \right]^{\frac{3}{7}}}{\sqrt[7]{x^2-1}}.$$
- $$42. \frac{x + 2\sqrt{x} + 1 + \frac{x - \sqrt{ax}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x} + \frac{(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{x})^2 + (\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{x})^2}{\sqrt{a} + \sqrt{x}}}.$$
- $$43. \left[\sqrt[3]{\frac{a^5 + 2a^4b + 4a^3b^2}{a^2 - 4ab + 4b^2}} - \frac{1}{4} \right. \\ \left. + \sqrt[3]{8b^3 - \left(\frac{1}{a}\right)^{-3}} \right] : \left(\frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{ab} - b\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{ab} + b\sqrt{2}} \right).$$
- $$44. \frac{\sqrt[3]{(b-3)\sqrt{ab} + (3-b^{-1})\sqrt{ab^{-1}}}}{\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b^{-2}}} \cdot \sqrt{b\sqrt[3]{b^2a}}.$$
- $$45. \frac{(5-4x^2)\sqrt{5} - x\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2 + (\sqrt{2}-1)^2} - 1 \cdot (-8x)}{\sqrt{(5-4x^2)^2 + (4x\sqrt{5})^2}} \times \\ \times \frac{\sqrt{2x} + \sqrt{2a}}{\sqrt{x^{-1}} + \sqrt{a^{-1}}}.$$
- $$46. \left[\frac{x + (x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{x - \sqrt{x^2-1}} + \frac{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} + 1} \right] : \frac{\sqrt{x}}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}}.$$
- $$47. \left\{ \left[\frac{(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3 + 2a - b}{(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3 + 2b - a} \right]^2 : \sqrt[12]{\left(\frac{b}{a}\right)^{-2}} \right\} \sqrt{\frac{b}{a}}.$$
- $$48. \left(\frac{\sqrt[3]{a^2b^2} + a\sqrt[3]{a}}{a\sqrt[3]{b} + b\sqrt[3]{a}} - 1 \right) \left(1 + \sqrt[6]{\left(\frac{b}{a}\right)^{-2}} + \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^2} \right), \\ (a > 0, b > 0).$$
- $$49. \left[\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + \right. \\ \left. + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2} + x-1} \right] \left[\sqrt{x^{-2}-1} - \frac{1}{x} \right], (0 < x < 1).$$
- $$50. \left(\frac{a^{-\frac{1}{6}} - \frac{5}{\sqrt[6]{c}}}{a^{-\frac{1}{3}} - c^{-\frac{1}{3}}} - \frac{5(a^{-\frac{1}{6}} - c^{-\frac{1}{6}})}{a^{-\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{c-1}} \right)^{-1} \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{c}}.$$

51. $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt[4]{5}+1}{1+\sqrt[4]{5}+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[4]{5}-1}{1-\sqrt[4]{5}+\sqrt{x}} \right) \times$
 $\times (x^{\frac{1}{2}} - 4x^{-\frac{1}{2}} + 2) \cdot \sqrt{0.2}.$
52. $\left[2 \cdot \sqrt{\frac{2}{a}} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2a} - \sqrt[4]{b}} + \right. \right.$
 $\left. \left. + \frac{\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}} \sqrt{2+\sqrt{5}}}{\sqrt[4]{2a} + \sqrt[4]{b}} \right)^{-2} \right] : \left(1 + \frac{b}{2a} - 2\sqrt{\left(\frac{2a}{b}\right)^{-1}} \right).$
53. $\left[\frac{\sqrt[4]{b} + \frac{b}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}}{\sqrt[4]{a} - \frac{a}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{a}} + \right.$
 $\left. + \frac{1}{2} \sqrt[4]{\left(\frac{b}{a}\right)^{-2}} \right] : \left(1 + \frac{2\sqrt{ab} + 2b}{a-b} \right).$
54. $\left[\frac{1}{2} \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} \cdot \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} + \right.$
 $\left. + \frac{1}{2} \sqrt{(a+3)\sqrt{a} - 3a - 1} \right] : \left[\frac{a-1}{2(\sqrt{a}+1)} + 1 \right].$
55. $9 \left(\sqrt[3]{2\sqrt{54}} - \sqrt[3]{3\sqrt{\frac{3}{8}}} \right)^{-4} -$
 $- \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \sqrt[3]{40\sqrt{2} + 56} : \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2}.$
56. $\left[\sqrt{\frac{(1-a)\sqrt[3]{1+a}}{a}} \sqrt[3]{\frac{3a^2}{4-8a+4a^2}} \right]^{-1} : \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{1-a^2}}{3a\sqrt{a}}}.$
57. $\left\{ \left[\frac{\sqrt[4]{1-x}}{2\sqrt[4]{(1+x)^3}} + \frac{\sqrt[4]{1+x}(1-x)^{-\frac{3}{4}}}{2} \right] (1-x)^{-\frac{1}{2}} \right\} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-\frac{1}{4}}.$
58. $x^3 \left[\frac{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})^2 + (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})^2}{x + \sqrt{xy}} \right]^5 \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}}{x^{-1}}}.$
59. $x \sqrt{\frac{(x^2-y^2)(x-y)^2}{x+y}} + y \sqrt{\frac{(4x^2-9y^2)^2(x-y)}{(2x-3y)^2}} +$
 $+ \frac{2xy}{x-y} \sqrt{\frac{(x^2-y^2)^3}{(x+y)^3}} - (x^2-y^2) \sqrt{\frac{(x+y)^3}{x-y}}, (2x > 3y > 0).$

$$60. \frac{(V^{a^2+1}+a)\left(\frac{a}{V^{a^2+1}}-1\right)-(V^{a^2+1}-a)\left(\frac{a}{V^{a^2+1}}+1\right)}{V^{a^2+1}+a} \times \\ \times \frac{1}{V^{a^2+1}-a}.$$

$$61. \sqrt{\left(\frac{p^2+q^2}{p^3-pq^2}+\frac{2q}{p^2-q^2}\right)(p^2+pq)}- \\ -\sqrt{\left(\frac{p}{p-q}-\frac{q}{p+q}-\frac{2pq}{p^2-q^2}\right)(p+q)}, (p>q>0).$$

$$62. \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1+(V^x+1)^2(1-V^x)^{-2}}\left[\frac{1}{2\sqrt[4]{x}(1-\sqrt[4]{x})}-\right. \\ \left.-\frac{1}{2\sqrt[4]{x}(1+\sqrt[4]{x})}\right]^2-\frac{1}{2V^x-2xV^x}.$$

$$63. \frac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}}; \left(2+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}}\right)+\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}}.$$

Вычислить выражения (64—70):

$$64. \frac{V^{m+x}+V^{m-x}}{V^{m+x}-V^{m-x}} \text{ при } x=\frac{2mn}{n^2+1}, (m>0, n>1)$$

$$65. \frac{2aV^{1+x^2}}{x+V^{1+x^2}} \text{ при } x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right), (a>0, b>0).$$

$$66. x^3+12x \text{ при } x=\sqrt[3]{4(\sqrt{5}+1)}-\sqrt[3]{4(\sqrt{5}-1)}.$$

$$67. x^3+ax+b \text{ при } x=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}+ \\ +\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}.$$

$$68. (x^{-1}+a^{-1})(x+a)^{\frac{1}{n}}-b^{-1}x^{\frac{1}{n}}$$

при $x=ab^{\frac{n}{n+1}}(a^{\frac{n}{n+1}}-b^{\frac{n}{n+1}})^{-1}$.

$$69. \frac{1-(m+x)^{-2}}{\left(1-\frac{1}{m+x}\right)^2}; \left[1-\frac{1-(m^2+x^2)}{2mx}\right]^{-1} \text{ при } x=\frac{1}{m-1}.$$

$$70. \frac{\sqrt{2+\sqrt{5}} \sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}} - mx}{\sqrt{2+\sqrt{5}} \sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}} + mx} : \sqrt{\frac{1-nx}{1+nx}}$$

при $x = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{2m}{n}} - 1$, ($0 < m < n < 2m$).

71. Доказать, что если $|a| < b$, то $-b < a < b$.

72. Доказать, что если $-b < a < b$, то $|a| < b$.

73. Доказать, что $|a+b| \leq |a| + |b|$.

74. Доказать, что $|a-b| \geq |a| - |b|$.

75. Доказать, что арифметическая дробь с увеличением числителя и знаменателя на одно и то же положительное число увеличивается, если она правильная, и уменьшается, если она неправильная.

76. Доказать, что дробь $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$ заключена между наименьшей и наибольшей из дробей:

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, (b_k > 0, k = 1, 2, \dots, n).$$

77. Доказать, что

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4},$$

$$(a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a_3 \geq 0, a_4 \geq 0).$$

78. Доказать, что

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

79. Доказать, что $\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \geq \sqrt[n]{n}$.

II. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Решить уравнения (80—97):

$$80. |x-1| = 2.$$

$$81. |x-1| + |x-2| = 1.$$

$$82. |x-2| + |x-3| + |2x-8| = 9.$$

$$83. x^2(1+x)^2 + x^2 = 8(1+x)^2.$$

$$84. x(x+1)(x-1)(x+2) = 24.$$

$$85. \frac{(2m-ax)^3 + (ax-3n)^3}{(2m-ax)^2 + (ax-3n)^2} = 2m-3n.$$

$$86. \frac{(x-1)(x-2) - (x-3)(x-4)}{\sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{x^2-7x+12}} = \sqrt{2}.$$

$$87. x^3 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = \frac{3}{2}(x + 1).$$

$$88. \sqrt[5]{(7x-3)^3} + 8\sqrt[5]{(3-7x)^{-3}} = 7.$$

$$89. \left(1 + \frac{9}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + 4\left(\frac{x}{x+9}\right)^{\frac{1}{2}} = 4.$$

$$90. (a+x)^{\frac{2}{3}} + 4(a-x)^{\frac{2}{3}} - 5(a^2 - x^2)^{\frac{1}{3}} = 0.$$

$$91. \sqrt[n]{\frac{a-x}{b+x}} + \sqrt[n]{\frac{b+x}{a-x}} = 2.$$

$$92. \sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1.$$

$$93. \sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{b}.$$

$$94. \frac{\sqrt[5]{3+x}}{3} + \frac{\sqrt[5]{3+x}}{x} = \frac{64}{3}\sqrt[5]{x}.$$

$$95. \frac{1+x-\sqrt{2x+x^2}}{1+x+\sqrt{2x+x^2}} = a^3 \cdot \frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}.$$

$$96. \frac{1-ax}{1+ax} \sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} = 1.$$

97. Найти вещественные корни уравнения

$$(\sqrt{x}-2)^4 + (\sqrt{x}-3)^4 = 1.$$

Решить системы уравнений (98—109):

$$98. \begin{cases} |x+1| + |y-1| = 5; \\ |x+1| = 4y-4. \end{cases}$$

$$99. \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0; \\ x^2 + 5x - 14 = 0. \end{cases}$$

$$100. \begin{cases} x^2 + xy = 6; \\ y^2 + xy = 3. \end{cases}$$

$$101. \begin{cases} x^4 + 3x^2y^2 + y^4 = 109; \\ x^2 + y^2 + xy = 13. \end{cases}$$

$$102. \begin{cases} (x+y+1)^2 + (x+y)^2 = 25; \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

$$103. \begin{cases} x(y+z) = 5; \\ y(z+x) = 8; \\ z(x+y) = 9. \end{cases}$$

$$104. \begin{cases} \frac{xy}{ay + bx} = c; \\ \frac{zx}{az + cx} = b; \\ \frac{yz}{bz + cy} = a. \end{cases}$$

$$105. \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2; \\ xy + zy + zx = 47; \\ (z - x)(z - y) = 2. \end{cases}$$

$$106. \begin{cases} (b + c)(y + z) - ax = b - c; \\ (c + a)(z + x) - by = c - a; \\ (a + b)(x + y) - cz = a - b. \end{cases}$$

$$a + b + c \neq 0.$$

$$107. \begin{cases} x - y + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{20}{x+y}; \\ x^2 + y^2 = 34. \end{cases}$$

$$108. \begin{cases} \frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2y} - \sqrt[3]{xy^2}} = \frac{7}{2}; \\ \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3. \end{cases}$$

$$109. \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x+y} - \sqrt{x}}{y} = 0,375; \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7. \end{cases}$$

110. Найти вещественные корни системы

$$\begin{cases} 2x - y = 1; \\ 4x + y - 2xy - z^2 = 3. \end{cases}$$

111. При каких значениях a и b система уравнений

$$\begin{cases} 3x - 4y = 12; \\ 9x + ay = b \end{cases}$$

будет несовместна и при каких неопределенна?

112. При каких целых значениях n решение системы

$$\begin{cases} nx - y = 5; \\ 2x + 3ny = 7 \end{cases}$$

удовлетворяет условиям $x > 0$, $y < 0$?

113. Составить квадратное уравнение с вещественными коэффициентами, один из корней которого равен $\frac{1+i}{1-i}$.

114. При каких значениях a уравнение

$$(5a - 1)x^2 - (5a + 2)x + 3a - 2 = 0$$

имеет равные корни?

115. При каком вещественном значении m выражение

$$x^2 + m(m - 1)x + 36$$

есть полный квадрат?

116. При некоторых значениях p уравнение

$$x^2 + 3x + 3 + p(x^2 + x) = 0$$

имеет равные корни. Составить квадратное уравнение, имеющее корнями эти значения p .

117. В уравнении $x^2 - 2x + q = 0$ квадрат разности корней равен 16.

Определить свободный член уравнения.

118. При каких m уравнение

$$9x^2 - 18mx - 8m + 16 = 0$$

будет иметь один корень вдвое больше другого?

119. Показать, что уравнение

$$(x - 1)(x - 3) + m(x - 2)(x - 4) = 0$$

имеет вещественные корни при любом вещественном m .

120. При каком значении m уравнение

$$2mx^2 - 2x - 3m - 2 = 0$$

имеет различные корни?

121. Какими должны быть p и q , чтобы уравнение

$$x^2 + px + q = 0$$

имело корнями числа p и q ?

122. При каком m уравнения

$$2x^2 - (3m + 2)x + 12 = 0;$$

$$4x^2 - (9m - 2)x + 36 = 0$$

имеют общий корень?

123. Найти те значения a , при которых уравнения

$$x^2 + ax + 1 = 0;$$

$$x^2 + x + a = 0$$

имеют общий корень.

124. Доказать, что уравнение

$$x^2 + ax + 1 = 0$$

не имеет рациональных корней, если a — целое число, но $|a| \neq 2$.

125. Составить уравнение наименьшей степени с рациональными коэффициентами, имеющее корнями

$$1 + \sqrt{3} \text{ и } 2 + \sqrt{3}.$$

126. Равносильны ли уравнения:

$$\frac{A}{B} = 0 \text{ и } A = 0,$$

где A и B — целые многочлены относительно неизвестного?

127. Найти наименьшее значение функции:

$$y = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2. *$$

128. Показать, что при вещественных значениях аргумента x функция

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$$

не может иметь значений больших $\frac{3}{2}$ и меньших $\frac{1}{2}$.

129. Дана функция вещественного аргумента: $y = \frac{x}{1 + x^2}$. Какова область определения обратной ей функции?

130. При каких вещественных значениях x функция $y = \sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$ имеет вещественные значения?

Построить графики функций (131—133):

131. $y = |x + 2|$.

132. $y = |x - 1| + |x - 2|$.

133. $y = |x^2 - 1|$.

Где расположены точки плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнениям (134—136):

134. $xy = 0$?

135. $|x - 2| = 1$?

136. $x^2 = y^2$?

* Здесь x является аргументом, а x_1, x_2, \dots, x_n — постоянные.

III. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

137. Несколько человек взялись вырыть канаву и могли бы окончить работу за 24 часа, если бы делали ее все одновременно. Вместо этого они приступили к работе один за другим через равные промежутки времени, и затем каждый работал до окончания всей работы. Сколько времени они рыли канаву, если первый, приступивший к работе, проработал в 5 раз больше, чем последний?

138. Турист, идущий из деревни на ж.-д. станцию, пройдя за первый час 3 км, рассчитал, что он опоздает к поезду на 40 минут, если будет двигаться с тою же скоростью. Поэтому остальной путь он проходит со скоростью 4 км/час и прибывает на станцию за 45 минут до отхода поезда. Каково расстояние от деревни до станции?

139. Трехзначное число оканчивается цифрой 3. Если эту цифру перенести влево (т. е. поместить вначале), то новое число будет на единицу больше утроенного первоначального числа. Найти это число.

140. Самолет летел сначала со скоростью 220 км/час. Когда ему осталось пролететь на 385 км меньше, чем он пролетел, он изменил скорость и стал двигаться со скоростью 330 км/час. Средняя скорость его на всем пути оказалась равной 250 км/час. Какое расстояние пролетел самолет?

141. «Мне вдвое больше лет, чем Вам было тогда, когда мне было столько лет, сколько Вам теперь; когда Вам будет столько лет, сколько мне теперь, тогда сумма наших возрастов будет равна 63 годам». Сколько лет каждому?

142. Двое рабочих, работая вместе, могут окончить некоторую работу в 12 дней. После 8 дней совместной работы один из них заболел, и другой окончил работу один, проработав еще 5 дней. Во сколько дней каждый из них, работая отдельно, может выполнить эту работу?

143. Две артели рабочих, работая одновременно, могут выполнить некоторую работу в 8 дней. Если бы работало $\frac{2}{3}$ рабочих первой артели и $\frac{4}{5}$ второй, то работа была бы выполнена в $11\frac{1}{4}$ дней. Во сколько дней могла бы выполнить эту работу каждая артель в отдельности?

144. В сберкассе на книжку было положено 1640 рублей и в конце года было взято обратно 882 рубля. Еще через год на книжке снова оказалось 882 рубля. Сколько процентов начисляет сберкасса в год?

145. Двое рабочих взялись сжать ржаное поле в течение одного дня, причем каждый обязался сжать половину поля. Пер-