

Г. Кантор

Труды по теории множеств

Классики науки

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Г11

Г11 **Г. Кантор**
Труды по теории множеств: Классики науки / Г. Кантор – М.: Книга по Требованию, 2023. – 432 с.

ISBN 978-5-458-32887-6

Теория множеств показала огромное влияние на прогресс всей математики и на математическое мышление в целом. В предлагаемой книге содержатся переводы теоретико-множественных работ ее основного создателя Георга Кантора. Настоящее издание - наиболее полное собрание работ Г.Кантора по теории множеств.

ISBN 978-5-458-32887-6

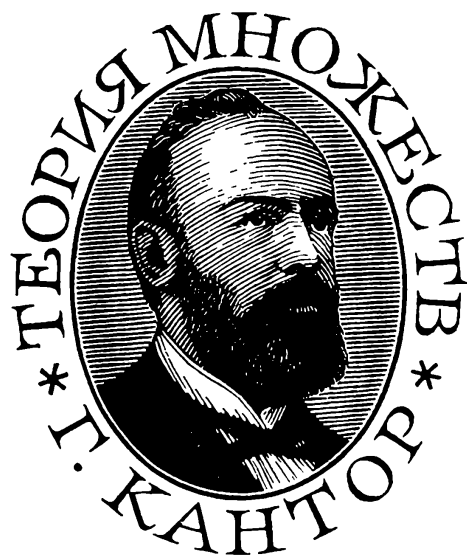
© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



ОТ РЕДАКЦИИ

Вряд ли можно назвать какую-либо возникшую в последней трети прошлого столетия математическую дисциплину, которая оказала бы большее влияние на последующий прогресс всей математики и, шире, на математическое мышление в целом, чем теория множеств. К идеям теории множеств в разное время подходили с разных сторон многие ученые, но оформление ее в самостоятельную науку, со своими особыми предметом и методами исследования, осуществил на протяжении четверти века в работах 1872—1897 гг. Георг Кантор. Среди современников Кантора правильно оценили значение этих работ только немногие, прежде всего Рихард Дедекинд, который внес собственный значительный вклад в новую теорию. Обнаруженные в конце XIX — начале XX вв. логические и методологические парадоксы теории множеств отпугнули некоторых выдающихся математиков, первоначально приветствовавших ее появление, как Анри Пуанкаре. Однако плодотворные приложения теории множеств в различных областях анализа стимулировали ее дальнейшую разработку во многих направлениях, в том числе глубокое исследование самых ее основ средствами бурно расцветавшей математической логики. Какие-либо окончательные и общепризнанные решения всех трудностей не достигнуты и все более и более тонкие изыскания здесь продолжаются; вместе с тем современная математика не может обойтись без основного аппарата понятий и приемов теории множеств.

Издание на русском языке полного собрания ставших классическими теоретико-множественных работ Г. Кантора существенно обогатит нашу переводную математическую литературу. До сих пор на русский язык были переведены только три работы Кантора: «Основы общего учения о многообразиях», «О различных точках зрения на актуально бесконечное» и «К учению о многообразиях». Этот перевод, сделанный П. С. Юшкевичем, составил шестой выпуск «Новых идей в математике» (СПб., 1914), издававшихся под редакцией А. В. Васильева. Перевод П. С. Юшкевича, давно ставший библиографической редкостью, использован с небольшими редакционными изменениями Ф. А. Медведевым и в настоящем однотомнике. Остальные десять работ переведены Ф. А. Медведевым впервые, так же как и богатая содержанием переписка Кантора с Дедекиндом, весьма важная для уточнения роли последнего в развитии теории множеств.

Перевод статей Кантора сделан с однотомника его сочинений, вышедшего в 1932 г. под редакцией Э. Цермело¹. Из названного однотомника

¹ *Cantor, Georg. Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor — Dedekind/Hrsg. von Ernst Zermelo; Nebst einem Lebenslauf Cantors von Adolf Fraenkel. Berlin: Springer, 1932.*

отобраны только работы по теории множеств и ее философским вопросам, к которым добавлена статья «Принципы теории порядковых типов. Первое сообщение», недавно опубликованная А. Граттан-Гиннесом², — при жизни Кантора она не увидела света и ее рукопись хранится в Шведском институте Г. Миттаг-Леффлера. Переписка Кантора с Дедекиндом, из которой в сборник сочинений под редакцией Цермело вошло всего пять писем 1899 г., дана в русском переводе по изданию Э. Нётер и Ж. Кавайеса³, включающему 49 писем 1872—1899 гг.

Вслед за переводами отдельных работ помещены примечания Э. Цермело, написанные им при издании упомянутого однотомника сочинений Г. Кантора (они заключены в квадратные скобки), а в конце книги — статья-послесловие редакторов, биографический очерк и примечания, принадлежащие Ф. А. Медведеву, список литературы, предметный и именной указатели.

Москва, февраль 1983 г.

А. Н. Колмогоров
А. П. Юшкевич

² *Grattan-Guinness I.* An unpublished paper of George Cantor «Prinzipien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mitteilung». — *Acta math.*, 1970, vol. 124, p. 83—101. Эта статья, предназначенная для «*Acta mathematica*», была отклонена их редактором Миттаг-Леффлером, как слишком философская. В связи с этим второе сообщение не последовало.

³ *Briefwechsel Cantor — Dedekind/Hrsg. von E. Noether, J. Cavallès.* Paris, 1937.



Georg Cantor

I

РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ИЗ ТЕОРИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ * [1]

В нижеследующем я предлагаю некоторое обобщение теоремы о том, что представления функций в форме тригонометрических рядов являются однозначными.

Тот факт, что два тригонометрических ряда

$${}^{1/2}b_0 + \sum (a_n \sin nx + b_n \cos nx) \text{ и } {}^{1/2}b'_0 + \sum (a'_n \sin nx + b'_n \cos nx),$$

которые сходятся для каждого значения x и имеют ту же самую сумму, имеют одинаковые коэффициенты, я попытался доказать в «Journal für die reine und angewandte Mathematik», 1870, Bd. 72, S. 139; в заметке в том же журнале, связанной с этой работой, я далее показал, что указанная теорема остается справедливой и в том случае, если отказаться от сходимости или совпадения сумм рядов в конечном числе точек [2].

Предполагаемое здесь обобщение состоит в том, что мы отказываемся от сходимости или совпадения сумм рядов в бесконечном числе значений x на интервале $(0 \dots 2\pi)$ без того, чтобы нарушалась справедливость теоремы.

Однако этому я вынужден предпослать, причем большей частью в форме намеков, соображения, предназначенные для того, чтобы выяснить соотношения, встречающиеся всегда, когда задано конечное или бесконечное число числовых величин. При этом я введу несколько определений, которые формулируются здесь только для того, чтобы дать в § 3 по возможности наиболее краткое изложение доказательства рассматриваемой теоремы.

§ 1

Рациональные числа образуют основу для установления более общего понятия числовой величины; я буду называть эти числа (включая нуль) областью A .

Когда я говорю о числовой величине в обобщенном смысле, то это происходит прежде всего в том случае, когда предложена бесконечная последовательность рациональных чисел

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, \quad (1)$$

* Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.— Math. Ann., 1872, Bd. 5, S. 123—132. Перевод Ф. А. Мелведева.

заданная при помощи некоторого закона и обладающая тем свойством, что разность $a_{n+m} - a_n$ становится бесконечно малой при возрастании n , каково бы ни было целое положительное число m , или, другими словами, что для произвольно выбранного (положительного рационального) ε существует такое целое число n_1 , что $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, если $n \geq n_1$ и m — любое положительное целое число.

Это свойство последовательности (1) я выражаю словами: «*последовательность (1) имеет определенный предел b* ».

Следовательно, эти слова не имеют никакого другого смысла, кроме смысла некоторого выражения для этого свойства последовательности, а из того обстоятельства, что с последовательностью (1) мы связываем особый знак b , вытекает, что различным таким последовательностям должны соответствовать и разные знаки $b, b', b'', \dots$.

Если задана другая последовательность

$$a_1', a_2', \dots, a_n', \dots, \quad (1')$$

имеющая определенный предел b' , то оказывается, что обе последовательности (1) и (1') всегда находятся в одном из трех следующих отношений, исключаящих друг друга: 1) $a_n - a_n'$ становится бесконечно малой при возрастании n ; 2) $a_n - a_n'$ начиная с определенного n всегда остается больше некоторой положительной (рациональной) величины ε ; 3) $a_n - a_n'$ начиная с определенного n всегда остается меньше некоторой отрицательной (рациональной) величины $-\varepsilon$.

Если имеет место первое отношение, то я полагаю

$$b = b',$$

если второе, то $b > b'$, если третье, то $b < b'$.

Точно так же получается, что последовательность (1), имеющая предел b , находится только в одном из следующих трех отношений с рациональным числом a : 1) $a_n - a$ становится бесконечно малой при возрастании n ; 2) $a_n - a$ начиная с определенного n всегда остается больше некоторой положительной (рациональной) величины ε ; 3) $a_n - a$ начиная с определенного n всегда остается меньше некоторой отрицательной (рациональной) величины $-\varepsilon$.

Для выражения этих отношений мы полагаем соответственно

$$b = a, \quad b > a, \quad b < a,$$

Из этих, а также непосредственно следующих определений получается в качестве *следствия*, что если b — предел последовательности (1), то $b - a_n$ при возрастании n становится бесконечно малой, чем, *между прочим*, находит определенное оправдание наименование «предел последовательности» для b .

Совокупность числовых величин b можно будет обозначить через B .

При помощи указанных выше формулировок можно распространить на взятые вместе области A и B элементарные операции, принятые для рациональных чисел.

А именно если b, b', b'' — три числовые величины из B , то формулы

$$b \pm b' = b'', \quad bb' = b'', \quad b/b' = b''$$

служат выражением того, что между последовательностями

$$a_1, a_2, \dots, \quad a_1', a_2', \dots, \quad a_1'', a_2'', \dots,$$

соответствующим числам b, b', b'' , имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \lim (a_n \pm a_n' - a_n'') &= 0, & \lim (a_n a_n' - a_n'') &= 0, \\ \lim (a_n/a_n' - a_n'') &= 0 & [\text{для } a_n' \neq 0], \end{aligned}$$

где, по сказанному выше, я не вхожу подробнее в смысл знака « $\lim$ ». Аналогичные определения вводятся для случая, когда из трех чисел одно или два принадлежат области A .

Вообще, всякое уравнение

$$F(b, b', \dots, b^{(p)}) = 0,$$

образованное при помощи конечного числа элементарных операций, получается отсюда как выражение определенного соотношения между последовательностями, задающими числовые величины $b, b', b'', \dots, b^{(p)}$ ¹.

Область B получается из области A ; она теперь вместе с областью A аналогично порождает новую область C .

А именно если задана бесконечная последовательность

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

числовых величин из областей A и B , не все из которых принадлежат области A , и если эта последовательность обладает тем свойством, что $b_{n+m} - b_n$ становится бесконечно малой при возрастании n , каково бы ни было m , — свойством, которое по предыдущим определениям представляет собой нечто вполне определенное в понятийном отношении, — то я говорю об этой последовательности, что она имеет определенный предел c .

Числовые величины c образуют область C .

Определения отношений равенства, больше и меньше, а также элементарных операций как для величин c , так между ними и величинами из областей B и A даются аналогично предыдущим.

Теперь если области B и A ведут себя по отношению друг к другу так, что каждая a может быть приравнена некоторой b , но не наоборот, то здесь оказывается, что как каждая b может быть приравнена некото-

¹ Если, например, уравнение μ -й степени $f(x) = 0$ с целочисленными коэффициентами имеет действительный корень ω , то это означает вообще лишь то, что имеется последовательность

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

обладающая свойством последовательности (1), для предела которой выбран знак ω и которая, кроме того, обладает свойством

$$\lim f(a_n) = 0.$$

рой c , так и наоборот, каждая c может быть приравнена некоторой b [3].

Хотя тем самым области B и C в некотором роде перекрываются друг с другом, однако в излагаемой здесь теории (в которой числовая величина первоначально появляется вообще как нечто беспредметное, лишь как составная часть теорем, придающих ей реальность, например теоремы, что соответствующая последовательность имеет пределом эту числовую величину) важно проводить понятийное различие между этими двумя областями B и C хотя бы уже из-за того, что даже установление равенства двух величин b, b' из B не влечет их идентичности, а лишь выражает некоторое определенное отношение между последовательностями, которым они сопоставляются.

Из области C и предшествующих ей аналогично получается область D , из всех их — область E и т. д.; посредством λ таких переходов (если переход от A к B рассматривается как первый) получается область L числовых величин. Если представить установленной цепь определений равенства, больше, меньше и элементарных операций от одной области к другой, то область L так относится к предыдущим, за исключением A , что числовая величина l всегда может быть сопоставлена одной из числовых величин $k, i, \dots, c, b$ и наоборот.

Результаты анализа бесконечно малых можно (отвлекаясь от не-большого числа известных случаев) свести к форме таких сопоставлений, хотя (чего здесь можно коснуться, лишь учитывая указанные исключения) понятие числа, как оно развито здесь, несет в себе зародыш необходимого и абсолютно бесконечного обобщения.

Если в области L задана некоторая числовая величина, то, по-видимому, целесообразно пользоваться выражением: *она задана как числовая величина, значение или предел λ -го вида*, откуда видно, что слова *числовая величина, значение и предел* я употребляю вообще как равнозначные.

Уравнение $F(l, l', \dots, l^{(p)}) = 0$, образованное при помощи конечного числа элементарных операций с числами $l, l', \dots, l^{(p)}$, в развитой здесь теории рассматривается как выражение определенного соотношения между $p+1$ вообще λ -кратно бесконечными последовательностями рациональных чисел; это суть те последовательности, которые получаются из просто бесконечных последовательностей, первоначально связанных с величинами $l, l', \dots, l^{(p)}$, когда их элементы заменены соответствующими этим элементам последовательностями, затем аналогично рассмотрены получающиеся вообще двукратно бесконечные последовательности и этот процесс продолжен до тех пор, пока не получим только рациональные числа.

Я оставляю за собой право возвратиться к более подробному рассмотрению всех этих соотношений в другой раз [4]. Равным образом, здесь не место рассматривать и то, как содержащиеся в данном параграфе определения и операции могут служить для нужд анализа бесконечно малых. Да и в следующем параграфе, где будет изложена взаимосвязь числовых величин с геометрией прямой линии, я ограничусь почти исключительно теми необходимыми предложениями, из которых, если я не