

М. Ван-Дайк

**Методы возмущений в
механике жидкостей**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
М11

М11 **М. Ван-Дайк**
Методы возмущений в механике жидкостей / М. Ван-Дайк – М.: Книга по Требованию, 2021. – 308 с.

ISBN 978-5-458-35520-9

Книга известного американского ученого, посвященная систематическому изложению теории и приложений методов возмущений; таким методом автор считает любой метод приближенного решения задач, в котором так или иначе содержатся малые величины. Основное содержание книги составляет исследование задач «особых возмущений», в которых сколь угодно малое изменение параметра возмущения приводит к конечным изменениям решения. Примеры, рассматриваемые автором, относятся к механике жидкости в широком смысле слова — от течений несжимаемой идеальной жидкости до гиперзвуковых течений вязкого газа, — однако изложенные автором общие методы несомненно найдут обширные применения в других разделах механики и физики. Книга представит интерес и для математиков, так как она содержит обширный «экспериментальный» материал в виде примеров по сложной и мало разработанной современной проблематике.

ISBN 978-5-458-35520-9

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

В книге для исследования задач особых возмущений даны два общих метода (гл. 5 и гл. 6). Эти методы были развиты в последние десятилетия трудами многих выдающихся ученых, причем существенный вклад был внесен самим Ван-Дайком. Первый метод — метод сращиваемых асимптотических разложений — представляет собой обобщение теории пограничного слоя. Он включает в себя нахождение так называемых внутреннего и внешнего разложений и сращивание их определенным образом. Второй метод — метод деформированных координат — восходит к идеям Пуанкаре, предложен Лайтхиллом и развит рядом работ последующих ученых (так называемый метод Пуанкаре — Лайтхилла — Го).

В обоих методах приходится оперировать с асимптотическими расходящимися разложениями, сращивать два таких разложения и производить ряд рискованных с точки зрения математики действий. Строгое математическое обоснование рассматриваемых методов практически отсутствует. Тем более интересным представляется проникновение автора в суть этих вопросов путем исследования множества примеров. В некоторых случаях в качестве простых моделей, демонстрирующих существенные черты методов, используются обыкновенные дифференциальные уравнения, однако основная часть примеров дается из механики жидкости, т. е. из области уравнений в частных производных.

Несмотря на то что рассматриваемый в книге материал касается механики жидкости в классической ее постановке — от несжимаемого течения до гиперзвуковых обтеканий как идеальной, так и вязкой жидкостью, — изложенные в книге общие методы, несомненно, найдут обширные приложения и в новейших разделах гидроаэродинамики: в динамике разреженного газа, магнито-гидродинамике и др.

Книга М. Ван-Дайка представляет большой теоретический и практический интерес для ученых-гидромехаников, и для них ее появление будет важным событием. Представляется целесообразным рекомендовать эту книгу и представителям других областей механики, а также представителям других точных наук, ибо методы, продемонстрированные здесь на задачах гидромеханики, безусловно имеют гораздо более общее значение. Настоящая книга может заинтересовать и математиков, так как она содержит обширный «экспериментальный» материал в виде примеров по сложной и мало разработанной современной проблематике.

А. А. Никольский

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Мне было очень приятно во время своего пребывания в Советском Союзе увидеть, что моя книга переводится на русский язык, и убедиться в заботе моих коллег о точном ее воспроизведении. Приятно также, что в русское издание удалось внести некоторые мелкие исправления исходного текста.

Методы возмущений в настоящее время находятся в стадии быстрого и плодотворного развития. Во многих отраслях механики этими методами получены замечательные результаты как в Советском Союзе, так и в странах английского языка. Этим методам, несомненно, предстоят еще более замечательные приложения, и я надеюсь, что моя книга окажет некоторую помощь моим молодым коллегам, которые возьмут на себя эту работу.

Я неизбежно проявлял тенденцию к ссылкам на статьи, написанные по-английски, и поэтому не смог отразить в должной мере существенный вклад советских исследователей в развитие предмета. К счастью, мой давний друг, профессор А. А. Никольский, напишет предисловие к переводу, и я надеюсь, что он сообщит также дополнительные сведения о работах советских ученых.

Милтон Ван-Дайк

Москва, декабрь 1965 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга посвящена главным образом исследованию задач особых возмущений, возникающих в механике жидкости. В частности, в ней дается единое представление двух сравнительно общих методов, которые были развиты за последние пятнадцать лет в работах Лагерстрёма, Каплуна, Коула, Лайтхилла и Уитема. Основное внимание мы уделяем тем задачам, которые непосвященному могут показаться патологическим аспектом теории возмущений, но это оправдывается не столько новизной этих приемов, сколько тем фактом, что особые возмущения представляются в механике жидкости скорее правилом, чем исключением, и во все большем количестве встречаются в современных исследованиях. Тем не менее книга начинается с изложения общих методов, приложимых в равной мере как к регулярным, так и к особым возмущениям, поскольку возможен последующий независимый учет характера возмущений.

Общие методы вводятся в основном с помощью примеров, причем последние, за исключением нескольких математических моделей, взяты из механики жидкости. Несомненно, что эти методы могут быть непосредственно использованы и в других разделах прикладной механики, и я надеюсь, что книга окажется полезной для исследователей и в этих областях. Тем не менее оба общих метода, упомянутых выше, были изобретены в связи с задачами течения жидкости, были развиты и получили приложения преимущественно в этой области. Приводимые примеры в основном ограничиваются теми, которые в середине века считались относящимися к классической аэродинамике. Очевидно, однако, что задачи особых возмущений в изобилии содержатся в таких новых разделах, как теория неравновесных течений, теория течений излучающего газа, магнитогидродинамика, динамика плазмы, динамика разреженного газа. Рассматриваемые методы определенно получают там плодотворные примене-

ния, так же как и в океанографии, метеорологии и других областях великого мира движения жидкости.

Начало этой книге было положено заметками, подготовленными для курса, который я читал в 1959 г. на Отделении аэронавтики и астронавтики Станфордского университета. Естественно, многое в книге взято из моих собственных исследований и работ моих учеников. Большая часть этих работ была выполнена по заказу Научно-исследовательского управления военно-воздушных сил.

Центральным пунктом книги является исследование (в гл. 4) потенциального обтекания симметричного тонкого профиля потоком несжимаемой жидкости. Хотя эта задача сравнительно проста и для ее решения достаточно использовать двумерное уравнение Лапласа, она обладает основными чертами задач как регулярных, так и особых возмущений. В частности, она служит для введения двух общих методов исследования задач особых возмущений. Ссылки на эту основную задачу повторяются во всех последующих главах.

Я рекомендовал бы читателю не пренебрегать упражнениями. Они предусматривают в краткой форме многие дополнительные детали, дальнейшие ссылки на литературу, обобщения и развитие материала, изложенного в основном тексте.

Я обязан прежде всего П. А. Лагерстрому, который не только является моим учителем, коллегой и другом, но и сыграл выдающуюся роль в развитии одного из двух главных методов исследования задач особых возмущений. Многие из изложенных в книге идей носят отпечаток моего сотрудничества с Р. Т. Джонсом, М. А. Хислетом и их коллегами по Эймской лаборатории. За полезные замечания и критику я в долгу перед многими другими коллегами, в частности перед О. Бургграфом, Чжан Ай-ди, Г. Эмануэлем, С. Каплуном, С. Надиром, Б. Перри, А. Ф. Пилау. Эта книга не была бы написана без помощи и ободрения со стороны моей жены Сильвии, и ей я посвящаю этот труд как дар любви.

Милтон Ван-Дайк

Станфорд, Калифорния
Май, 1964 г.

Глава I

СУЩНОСТЬ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

1.1. Приближения в механике жидкости

Механика жидкости явилась одним из основных источников теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. В отличие от основных уравнений многих других разделов математической физики уравнения, описывающие движение жидкости, существенно нелинейны (точнее квазилинейны) независимо от того, учитываются или не учитываются вязкость и сжимаемость жидкости. Единственным важным исключением является хорошо исследованный случай безвихревого движения несжимаемой невязкой жидкости, сводящийся к уравнению Лапласа. Тогда при отсутствии свободных границ нелинейность проявляется лишь алгебраически в уравнении Бернулли.

В силу этой существенной нелинейности точные решения в любом разделе механики жидкости получаются редко. Обычно это *автомодельные* решения, для которых вследствие высокой степени симметрии, присущей задаче, дифференциальные уравнения в частных производных сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Нужда в точных решениях столь велика, что решение — несколько нестрогое — называется «точным» даже в том случае, когда интегрирование полученных обыкновенных дифференциальных уравнений может быть осуществлено лишь численно. Лайтхилл [1] дал более или менее полный список таких решений для невязкой сжимаемой жидкости:

- а) установившееся сверхзвуковое обтекание выпуклого угла;
- б) установившееся сверхзвуковое обтекание вогнутого угла;
- в) установившееся сверхзвуковое обтекание кругового конуса без угла атаки;

- г) течение от импульсивного вдвигания бесконечной плоскости в покоящийся газ;
- д) течение от импульсивного выдвигания бесконечной плоскости из покоящегося газа;
- е) течение от равномерного расширения кругового цилиндра в покоящемся газе;
- ж) течение от равномерного расширения сферы в покоящемся газе.

Далее, по Шлихтингу [1], может быть дан аналогичный список для течений несжимаемой вязкой жидкости:

- а) установившееся течение между бесконечными параллельными плоскостями, в цилиндрической трубе с круговым сечением или между круговыми концентрическими цилиндрами;
- б) установившееся течение между неподвижной и скользящей плоскостями или концентрическими круговыми цилиндрами;
- в) установившееся течение между концентрическими вращающимися цилиндрами;
- г) плоское или осесимметричное течение навстречу бесконечной плоскости;
- д) течение, образованное установившимся вращением бесконечного плоского диска;
- е) установившееся плоское течение между расходящимися плоскостями;
- ж) течение от импульсивного или синусоидального движения бесконечной плоской пластины в ее собственной плоскости.

Для этих автомодельных течений типично то, что они связаны с идеализированными геометрическими образами, далекими от большинства практически интересных форм.

Для того чтобы продвинуться дальше, необходимо использовать приближенные методы. (Иной, недавно возникший путь — составление программ для вычислительных машин.) Приближения представляют собой искусство, и обычно с успешными аппроксимациями связаны имена знаменитых ученых:

теория крыла Прандтля;
 метод Кармана — Цяня для профиля в дозвуковом потоке ¹⁾;
 приближение Прандтля — Глауэрта для дозвуковых течений;
 разложение Рэлея — Янсена для дозвуковых течений;
 приближения Стокса и Озеена для вязкого течения;
 теория пограничного слоя Прандтля;
 метод Кармана — Польгаузена для пограничного слоя;
 теория Ньютона — Буземана гиперзвукового обтекания.

Во многих важных областях успешные аппроксимации еще должны быть найдены. Примерами являются отрывные вязкие течения, гиперзвуковое обтекание затупленных тел.

1.2. Рациональные и иррациональные приближения

Наиболее полезные аппроксимации имеют место, когда один или несколько из параметров или переменных задачи малы (или велики). Этой *величиной возмущения* часто является один из безразмерных параметров:

разложение Рэлея — Янсена	число Маха	$\ll 1$,
теория тонкого профиля	относительная толщина	$\ll 1$,
теория несущей линии	удлинение	$\gg 1$,
течение Стокса, Озеена	число Рейнольдса	$\ll 1$,
теория пограничного слоя	число Рейнольдса	$\gg 1$,
теория Ньютона — Буземана	число Маха $\gg 1$, $(\gamma - 1) \ll 1$	
метод квазистационарности	приведенная частота	$\ll 1$,
теория свободно-молекулярного течения	число Кнудсена	$\gg 1$.

Необычным примером является исследование Гарабедяна [1] осесимметричного течения со свободными линиями тока, которое представляет собой приближение,

¹⁾ В СССР независимо от указанного метода приближенная теория профиля в дозвуковом потоке была дана в работе С. А. Христиановича «Обтекание тел газом при больших дозвуковых скоростях», Труды ЦАГИ, вып. 481, 1940. — *Прим. ред.*

основанное на предположении, что число измерений пространства лишь слегка отличается от двух.

Во всех этих случаях говорится о *возмущении параметров*. Величиной возмущения может также быть одно из независимых переменных (в безразмерной форме):

ряд Блазиуса для пограничного слоя расстояние $\ll 1$,
импульсивное движение в вязкой
или сжимаемой жидкости время $\ll 1$.

В таких случаях говорят о *возмущении координат*.

Приближения такого типа становятся все более точными по мере стремления величины возмущения к нулю (или бесконечности). Они являются таким образом *асимптотическими решениями*. В принципе можно улучшить результат, рассматривая его как первый шаг в схеме последовательных приближений. Получающиеся ряды, хотя и необязательно сходящиеся, по построению представляют собой *асимптотические разложения*. Практически обычно вычисляется только первое приближение, иногда — второе. Основной смысл второго приближения часто состоит в том, что оно помогает понять первое. Лишь в редких случаях вычисления проводятся до пятого или шестого приближений. Но возможность бесконечного продолжения этого процесса имеет фундаментальное значение. Мы будем называть приближение такого типа *рациональным приближением*.

С другой стороны, некоторые очень полезные приближения не становятся точными ни при каком известном предельном переходе. Примерами являются следующие приближения:

- Метод Кармана — Цяня для профиля в дозвуковом потоке (Липман и Паккет [1]);
- теория скачка и волны разрежения и ее распространение на осесимметричные и трехмерные течения (Хейз и Пробстин [1]);
- локальная линеаризация Спрейтера для околосзвуковых течений (Спрейтер [2]);
- теория Честера — Чизнелла в динамике ударных волн (Честер [3]);
- теория Мотт-Смита структуры ударных волн (Мотт-Смитт [1]).