А.М. Воронец

Геометрия циркуля

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
А11

А.М. Воронец

А11 Геометрия циркуля / А.М. Воронец – М.: Книга по Требованию, 2021. – 40 с.

ISBN 978-5-458-26269-9

Книжка предназначается для учащихся старших классов средней школы, заинтересовавшихся геометрическими построениями, которые снова стали появляться, хотя очень медленно и в весьма ограниченном объеме, в школьном курсе элементарной геометрии. Решение задач на построение развивает геометрическое мышление гораздо полнее и острее, чем решение задач на вычисление, и способно вызвать увлечение работой, которое приводит к усилению любознательности и к желанию расширить и углубить изучение геометрии.

ISBN 978-5-458-26269-9

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

чертеж, но исполненный в соответствии с геометрическими теоремами и потому геометрически точный.

Инструменты, употребляемые для выполнения геометрических построений, весьма разнообразны. К основным принадлежат линейка и циркуль, служащие для проведения прямых линий, одиночных, параллельных и перпендикулярных, и окружностей. Угольник есть вспомогательный инструмент, так как, имея линейку и циркуль, можно строить параллельные и перпендикулярные прямые. К вспомогательным инструментам относится также миллиметровая шкала, которую можно построить с помощью циркуля и линейки, отложив на прямой линии циркулем одинаковые сантиметровые отрезки и разделив каждый из этих отрезков на 10 равных между собою частей. Транспортир есть уже самостоятельный инструмент, так как точное в геометрическом смысле градуирование любой дуги на произвольное число равных частей с помощью линейки и циркуля невозможно (почему — об этом будет сказано дальше).

Не упоминая пока о других многочисленных чертежных инструментах, скажем, что с глубокой древности повелось допускать к исполнению геометрических построений только циркуль и линейку, т. е. приборы, позволяющие проводить прямые линии и окружности. Знакомую нам логическую элементарную геометрию, в которой каждая теорема обосновывается рассуждением, создали древние греки. В III в. до начала нашей эры появился замечательный труд греческого математика Евклида, изложившего в стройной системе определения геометрических форм, теоремы и доказательства. Геометрические построения делались в строгом соответствии с доказанными теоремами и выполнялись с помощью только линейки и циркуля. Такие построения называются классическими.

Оказалось, что подавляющее большинство геометрических задач на построение может быть решено элементарным путем, т. е. на основании теорем элементарной геометрии, а выполнение построения может быть достигнуто с помощью циркуля и линейки. Но уже древние греки столкнулись, правда с немногими, такими задачами, решение которых не может быть выполнено с помощью циркуля и линейки. К числу таких задач принадлежат следующие три знаменитые задачи: 1) разделить произвольный угол на три равные части; 2) построить квадрат, равновеликий данному кругу и 3) построить ребро куба, объем которого в два раза больше данного куба. Не понимая причины невозможности решения таких задач (невозможности вследствие ограничительного требования выполнить построение с помощью только линейки и циркуля), древние греки и математики последующих веков тщетно стремились к победе над этими неподатливыми задачами. И в настоящее время встречаются любители-математики, которые вследствие недостаточного знания теории напрасно тратят время на изобретение способа разделить с помощью линейки и циркуля любой угол на три равные части и потом испытывают глубокое разочарование от неудач.

Исчерпывающая теория геометрических построений создалась сравнительно недавно, в конце прошлого века. Теперь мы знаем, какие задачи могут быть решены с помощью циркуля и линейки и почему, какие — нет и почему, как решить «невозможную» задачу с помощью добавочных инструментов, как решать некоторые задачи, и какие именно, с помощью какого-либо определенного инструмента, например только циркуля. Кроме того, мы знаем, каким приемом легче всего решить теоретически данную геометрическую задачу.

Пока математики не расчленили приемы или методы решений на характерные, типовые, самое решение шло ощупью, догадкою. Нужно много остроумия, чтобы догадаться, как решить некоторые задачи. Например, как построить треугольник, зная три его высоты? Обозначим эти высоты через h_a, h_b, h_c соответственно сторонам a, b и c. Легче всего решить эту задачу методом подобия, а именно построить сначала треугольник, подобный данному. В самом деле, так как

$$\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2},$$

то имеем:

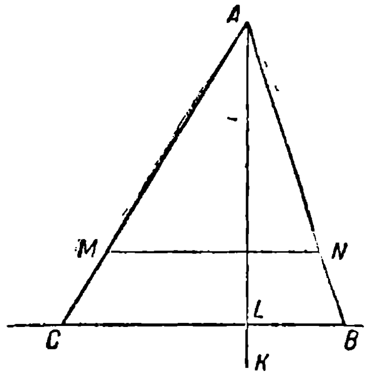
$$a:b:c=h_b:h_a:\frac{h_a h_b}{h_c};$$

следовательно, стороны a, b и c искомого треугольника пропорциональны отрезкам h_b, h_a и $\frac{h_a h_b}{h_c}$, причем последний

$x = \frac{h_a h_b}{h_c}$ есть отрезок четвертый, пропорциональный отрезкам h_c, h_a и h_b:

$$h_c : h_a = h_b : x.$$

Поэтому, построив треугольник MAN (черт. 1) со сторонами $MN = h_b$, $MA = h_a$ и $AN = \frac{h_a h_b}{h_c}$, мы получим треугольник, подобный искомому. Проведя AK перпендикулярно к NM, отложив $AL = h_a$ и проведя через L прямую, параллельную MN, получим искомый треугольник ABC. Читателю нетрудно будет убедиться в геометрической правильности сделанного построения и в том, что построение выполняется с помощью циркуля и линейки. Заметим, что алгебраическое решение рассмотренной задачи содержит только уравнения первой степени.



Черт. 1.

Среди методов решения геометрических задач на построение есть метод алгебраический. Он заключается в том, что из условий задачи составляется уравнение, связывающее величину неизвестного отрезка искомой фигуры с данными величинами. Решив составленное уравнение, мы найдем, что неизвестная величина равна алгебраическому выражению, содержащему величины данных отрезков и постоянные числа. Остается построить полученное выражение.

Например, решим алгебраическим методом следующую задачу: вписать в круг радиуса R прямоугольник данного периметра $2p$.

Обозначим через x одну из сторон искомого прямоугольника; тогда соседняя сторона равна $p - x$. Эти стороны и диаметр круга образуют прямоугольный треугольник, поэтому

$$x^2 + (p - x)^2 = 4R^2$$

или

$$2x^2 - 2px + (p^2 - 4R^2) = 0,$$

отсюда

$$x_1=\frac{p+\sqrt{8R^2-p^2}}{2} \text{ и } x_2=\frac{p-\sqrt{8R^2-p^2}}{2}.$$

Из этих формул видно, что, зная отрезки p и R, можно построить отрезки x_1 и x_2, так как

$$x=\frac{p\pm t}{2},$$

где

$$t=\sqrt{8R^2-p^2},$$

причем очевидно, что t есть катет треугольника, гипотенуза которого равна $2R\sqrt{2}$, а другой катет есть p.

Из тех же формул видно, что между отрезками R и p должно существовать соотношение:

$$8R^2-p^2\geqslant 0,$$

или

$$2R\sqrt{2}\geqslant p,$$

иначе отрезки x_1 и x_2 получатся мнимые. Кроме того, отрезок x_2 не может быть отрицательным или равным нулю. Поэтому необходимо, чтобы было

$$p-\sqrt{8R^2-p^2}>0$$

или

$$2p^2>8R^2,$$

или

$$p>2R.$$

Итак, между отрезками p и R должна быть следующая зависимость:

$$2R\sqrt{2}\geqslant p>2R.$$

Таким образом при соблюдении этого условия задача имеет единственное решение и притом прямоугольник превращается в квадрат, если $2R\sqrt{2}=p$, так как тогда $x_1=x_2$. Легко видеть, что

$$x_1+x_2=p,$$

т. е. соседние стороны искомого прямоугольника равны соответственно x_1 и x_2.

Надлежащий выбор отрезка p при свободном выборе отрезка R и построение отрезков x_1 и x_2 видны из черт. 2.

Если $OA = R$ и $CE = AB$, то $AE = 2R\sqrt{2}$. Выбираем $p = AH$.

$$KH = \sqrt{AK^2 - AH^2} = \sqrt{AE^2 - AH^2} = \sqrt{(2R\sqrt{2})^2 - p^2};$$

$$AM = AH - MH = p - \sqrt{(2R\sqrt{2})^2 - p^2};$$

$$AD = AH + HD = p + \sqrt{(2R\sqrt{2})^2 - p^2};$$

$$AF = FM = x_2, \quad AN = ND = x_1.$$

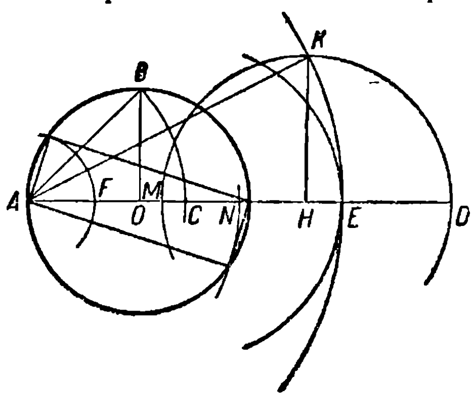
Доказательство может ограничиться тем, что

$$x_1 + x_2 = p$$

и

$$x_1^2 + x_2^2 = 4R^2.$$

Решение задачи свелось, как видно, к решению квадратного уравнения. Если геометрическая задача на построение решается с помощью уравнения первой или второй степени, то построение всегда возможно с помощью циркуля и линейки. В самом деле, если неизвестный отрезок определяется из уравнения первой степени, то получается выражение, не содержащее радикалов. Оно всегда может быть сведено к многочлену, члены которого в самых сложных случаях приводятся к виду $\frac{ab}{c}$, где a, b и c суть заданные отрезки. Если $x = \frac{ab}{c}$, то $c : a = b : x$, откуда видно, что x есть отрезок, четвертый пропорциональный отрезкам a, b и c. Если же, например,



Черт. 2.

$$x = \frac{a^3 b^2 c}{d^3 e^2},$$

то

$$x = \frac{ab}{d} \cdot \frac{a}{d} \cdot \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{e} \cdot \frac{c}{e},$$

следовательно:

$$x=\frac{ya}{d}\cdot\frac{a}{d}\cdot\frac{b}{e}\cdot\frac{c}{e}=\frac{za}{d}\cdot\frac{b}{e}\cdot\frac{c}{e}=\frac{tb}{e}\cdot\frac{c}{e}=\frac{uc}{e},$$

где

$$y=\frac{ab}{d};\quad z=\frac{ya}{d};\quad t=\frac{za}{d};\quad u=\frac{tb}{e}.$$

Следовательно, в самом сложном случае дробного одночлена первого измерения дело сводится к повторному построению отрезка, четвертого пропорционального трем известным.

Если неизвестный отрезок определяется из квадратного уравнения, то получается алгебраическое выражение, содержащее квадратный радикал из однородного многочлена второй степени. Такого рода радикал, например $\sqrt{5a^2-3b^2+c^2}$, может быть построен повторным применением теоремы Пифагора и теоремы об отрезке, среднем пропорциональном двум данным. В самом деле,

$$x=\sqrt{5a^2-3b^2+c^2}=\sqrt{y^2-z^2+c^2}=\sqrt{t^2+c^2},$$

где

$$y=5a\cdot a;\quad z=3b\cdot b;\quad t^2=y^2-z^2.$$

При этом все необходимые построения выполняются проведением прямых линий и окружностей, т. е. задача решается с помощью линейки и циркуля.

Задачи на построение, решаемые с помощью уравнений первой и второй степени, называются задачами первой и второй степени. Аналогично задачи на построение, решаемые уравнениями третьей, четвертой и т. д. степени, называются задачами третьей, четвертой и т. д. степени; в этих задачах построение вообще не может быть выполнено с помощью линейки и циркуля; оно возможно только в некоторых частных случаях.

Рассмотрим, например, одну из знаменитых задач древности: разделить произвольный угол на три равные части.

Обозначив данный угол через 3α и искомый через α, воспользуемся выводимою в курсах тригонометрии формулою:

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

или

$$2\cos 3\alpha=8\cos^3\alpha-3\cdot 2\cos\alpha.$$

Далее, обозначив известную величину $2\cos 3\alpha$ через m, а неизвестную $2\cos\alpha$ через x, получим уравнение:

$$m = x^3 - 3x$$

или

$$x^3 - 3x - m = 0.$$

Это неполное уравнение третьей степени. В курсах высшей алгебры доказывается, что уравнение

$$y^3 + py + q = 0$$

имеет три корня:

$$y_1 = M + N, \quad y_2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}M + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}N$$

и

$$y_3 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}M + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}N,$$

где

$$M = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

и

$$N = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Эти выражения y_1, y_2 и y_3, содержащие кубические корни, не могут быть построены с помощью циркуля и линейки, так как в элементарной геометрии нет ни одной теоремы, в которой метрические соотношения между отрезками выражались бы через кубические корни.

Но в некоторых частных случаях уравнение

$$x^3 - 3x - m = 0$$

может быть решено без помощи кубических корней. Например, когда $m = 0$ и $m = \sqrt{2}$, оно решается очень просто.

В самом деле, если $m = 0$, то

$$x^3 - 3x = 0$$

или

$$x(x^2 - 3) = 0,$$

откуда

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{3}, \quad x_3 = -\sqrt{3}.$$

Следовательно, если $m = 0$, то

$$2\cos 3\alpha = 0,$$

откуда

$$\cos 3\alpha = 0$$

и

$$3\alpha = 90^\circ.$$

Итак

$$(2\cos\alpha)_1 = 0, \quad (2\cos\alpha)_2 = \sqrt{3}, \quad (2\cos\alpha)_3 = -\sqrt{3};$$

$$\alpha_1 = 90^\circ, \quad \boxed{\alpha_2 = 30^\circ}, \quad \alpha_3 = 150^\circ.$$

Точно так же, если $m = \sqrt{2}$, то

$$2\cos 3\alpha = \sqrt{2}, \quad \cos 3\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 3\alpha = 45^\circ.$$

Тогда уравнение

$$x^3 - 3x - \sqrt{2} = 0$$

имеет очевидный корень $-\sqrt{2}$ и может быть представлен в виде

$$(x + \sqrt{2})(x^2 - \sqrt{2}x - 1) = 0,$$

откуда

$$x_1 = -\sqrt{2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2};$$

$$(2\cos\alpha)_1 = -\sqrt{2}, \quad (2\cos\alpha)_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$(2\cos\alpha)_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\alpha_1 = 135^\circ, \quad \boxed{\alpha_2 = 15^\circ}, \quad \alpha_3 = 75^\circ.$$

Здесь и выше обведены рамками пригодные ответы; остальные должны быть отброшены.

Таким образом в частных случаях, когда решение уравнения приводит к квадратным радикалам, деление угла на три равные части возможно с помощью циркуля и линейки. К таким случаям относятся еще углы, равные $\frac{180^\circ}{2^n}$, где n есть целое положительное число, и некоторые другие.

Другая знаменитая задача древности: построить ребро куба, объем которого вдвое больше объема заданного куба.

Обозначив через x искомое ребро и через a данное, находим:

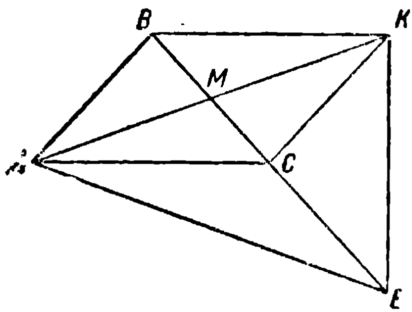
$$x^3 = 2a^3,$$

откуда

$$x = a \cdot \sqrt[3]{2}.$$

Этот отрезок по указанной выше причине не может быть построен с помощью циркуля и линейки. Ясно, что здесь не может быть благоприятных частных случаев.

Третья знаменитая задача древности: построить квадрат, равновеликий данному кругу.



Черт. 3.

Обозначим через x сторону искомого квадрата и через R радиус круга. Получим:

$$x^2 = \pi R^2$$

или

$$x = R\sqrt{\pi}.$$

Число π не выражается ни в каких радикалах, оно не может быть корнем какого-либо алгебраического уравнения. Эта теорема доказана математиками лишь во второй половине прошлого века. Читатель может найти доказательство в книге проф. Ф. Рудио «О квадратуре круга» (Одесса 1911, изд. Матезис). Эта книга будет скоро выпущена новым изданием.

Таким образом задача не может быть решена с помощью линейки и циркуля.

Рассмотрим еще две задачи на построение.

1. Построить треугольник, зная его медианы m_a, m_b и m_c.

Пусть треугольник ABC (черт. 3) искомый. Обозначим стороны его через a, b и c. Проведя $CK \parallel AB$, отложив $CK = AB$ и соединив точки B и K, получим параллелограм $ABKC$.

Тогда

$$AK^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2$$

или

$$(2m_a)^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2,$$

откуда

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}. \qquad (1)$$

Аналогично найдем:

$$m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}, \qquad (2)$$

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}. \qquad (3)$$

Из уравнений (1), (2) и (3) легко определить a, b и c через m_a, m_b и m_c. В самом деле, складывая эти уравнения почленно, получим:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4},$$

или

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2),$$

отсюда

$$\frac{4}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = a^2 + b^2 + c^2,$$

или

$$\frac{2}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2}. \qquad (4)$$

Вычитая почленно равенства (1) из (4), найдем:

$$\frac{2}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) - m_a^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4},$$

откуда легко получить

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}.$$

Аналогично найдем:

$$b = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2},$$

$$c = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2}.$$

Таким образом стороны треугольника выражаются через квадратные корни из алгебраических сумм, в которые данные медианы входят в квадратах, следовательно, мы имеем задачу второй степени, т. е. задачу, решаемую циркулем и линейкою. Построив отрезки a, b и c, мы легко построим