

И.К. Кикоин

Журнал Квант

1975 №8

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 50
ББК 22
К38

К38 **Кикоин И.К.**
Журнал Квант: 1975 №8 / И.К. Кикоин – М.: Книга по Требованию, 2023. – 68 с.

ISBN 978-5-458-29920-6

ISBN 978-5-458-29920-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

можно. Тогда наступает пора революционных преобразований — подвергаются критике основные понятия, меняются взгляды на ценность различных научных результатов, на самые цели и задачи научного творчества в данной области науки. И только появление совершенно новых идей выводит науку из создавшегося тупика.

Таким переломным моментом в истории развития математики оказалась вторая половина XIX века. В течение почти двухсот лет математический анализ развивал идеи Ньютона и Лейбница, создавших исчисление бесконечно малых, математику переменных величин. Разумеется, вводились новые понятия, неизвестные основоположникам анализа, но эти понятия естественно вытекали из уже имевшихся идей. И если бы каким-то чудом Ньютону или Лейбницу попал в руки математический журнал середины XIX века, то они довольно быстро поняли бы постановки большинства задач и методы их решения. Даже обозначения не очень изменились за протекшие годы. А самое главное, неизменной оставалась основная установка: ценность научного результата зависит в первую очередь от того, насколько успешным оказывается новый метод в решении практических задач.

Но характерной чертой математики является то, что, наряду с созданием новых методов решения практических задач, она интересуется самим создаваемым ею инструментом, для каждого возникающего понятия ищет наиболее широкую и естественную область его применимости, для каждой доказанной теоремы — наиболее общие условия, при которых она справедлива. И это — не пустые занятия математических снобов, а необходимость. Только установив понятия и теоремы в наибольшей общности, освободив их от ненужных ограничений, связанных с той конкретной задачей, из которой они возникли, можно увидеть связи между далекими друг от друга областями науки,

научиться применять созданные методы в ситуациях, на первый взгляд, не имеющих ничего общего с тем вопросом, где они возникли.

В течение двух столетий математики без особых размышлений пользовались понятиями числа, геометрической фигуры, функции, длины, площади, объема и т. п. Рассказывают, что когда один французский генерал принес в Академию наук свое «решение» проблемы квадратуры круга, его спросили, что именно он понимает под площадью круга. «Площади не определяют, их вычисляют!», — воскликнул бравый генерал. И такая точка зрения была распространена среди большинства математиков. Они считали, что площадь — это свойство геометрической фигуры, выражаемое числом и обладающее очевидными свойствами (площадь целого равна сумме площадей частей, конгруэнтные фигуры имеют равные площади и т. д.). Ни на одну минуту не сомневались они в том, что любая плоская геометрическая фигура имеет площадь (быть может, равную нулю или бесконечности). Впрочем, и по другим вопросам взгляды математиков XVII—XVIII веков отличались такой же нескритичностью — они были убеждены, что ко всем линиям в любой точке, за исключением, быть может, нескольких особых точек, можно провести касательную, что все поверхности гладки, а функцию они отождествляли с выражением, которым она задана. Но такая расплывчатость основных определений стала приводить к ошибочным результатам, и уже с начала XIX века начался процесс уточнения математических понятий, длившийся несколько десятилетий.

В ходе этого процесса были даны определения таким понятиям, как функция, предел, линия, длина линии, площадь области, интеграл и т. д. Но, как это часто бывает, после уточнения понятий оказалось, что они охватывают гораздо более широкий класс объектов, чем это казалось первоначально, что свойства уточненных

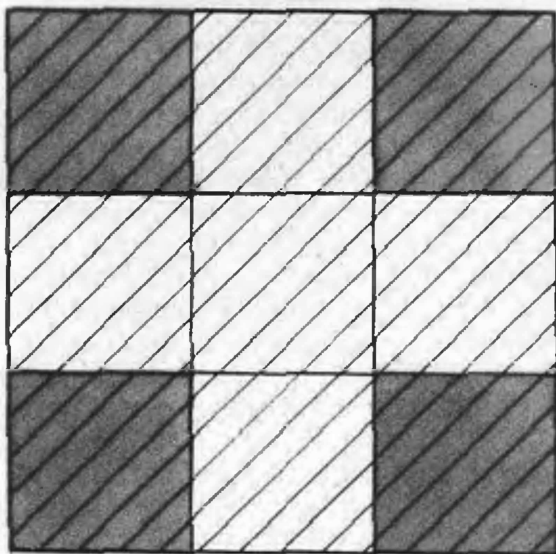


Рис. 1.

понятий не слишком похожи на привычные.

Оказалось, например, что существуют непрерывные линии, проходящие через любую точку квадрата, кривые, к которым ни в одной точке нельзя провести касательную, области, которым нельзя приписать никакого значения площади. Дело было в том, что понятие геометрической фигуры стало применяться в ином смысле, чем это делали математики предыдущих поколений. После того как Кантор создал теорию бесконечных множеств, математики стали считать фигурами любые точечные множества, в том числе определяемые с помощью бесконечных процессов. Вот несколько примеров таких фигур.

Возьмем квадрат со стороной 1 и разделим его на 9 квадратов. После этого выбросим «крест», образованный пятью квадратами, сохранив границы оставшихся квадратов. Получится фигура, состоящая из четырех квадратиков (рис. 1). С каждым из них проделаем ту же операцию и будем продолжать этот процесс до бесконечности. У нас будут получаться фигуры, состоящие из все большего и большего числа квадратиков, размеры которых все время уменьшаются. Фигуры, получаемые на каждом шагу этого про-

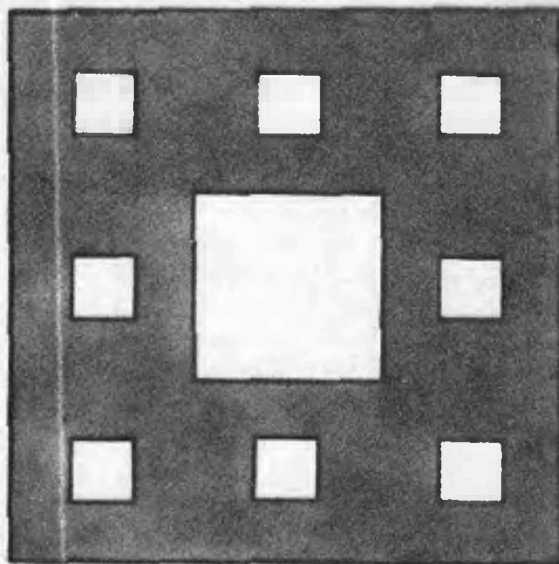


Рис. 2.

цесса, обычно, но если взять пересечение всех получившихся фигур, то перед нами окажется весьма странное множество.

Другое множество получается, если выбрасывать не кресты, а лишь центральные квадраты, оставляя их границы (рис. 2).

Исследования таких множеств, а также функций, имеющих весьма странные свойства (например, всюду разрывных, или непрерывных во всех иррациональных точках и разрывных во всех рациональных точках, функций, графики которых не имеют ни в одной точке определенного направления), стали все чаще и чаще появляться во второй половине XIX века. Эти исследования приветствовались далеко не всеми учеными! Математики классического направления считали, что наука должна иметь дело лишь с объектами, непосредственно отражающими свойства реального мира. Их мнение о таких исследованиях ярко выразил один из крупнейших ученых того времени Анри Пуанкаре. Он сказал: «Раньше, когда изобретали новую функцию, то имели в виду какую-нибудь практическую цель; теперь их изобретают, не извлекая из них никакой пользы, а только для того, чтобы обнаружить недос-

татки в рассуждениях наших отцов». Еще резче выразился на эту тему руководитель французской математической школы Шарль Эрмит. В своем письме видному голландскому математику Т. Стильтесу он писал: «Я с ужасом и отвращением отворачиваюсь от этой разрастающейся язвы функций, не имеющих производной». Новую математику классики называли «тератологией» (наукой об уродствах) функций.

Но молодежь тянулась к новым областям науки, не обращая внимания на ворчанье математиков предшествующего поколения. Во Франции их вдохновляли лекции Жюлья Таннери и Камилла Жордана, в которых курс математического анализа строился на твердой основе точных определений, безупречных доказательств, железной логики. Они усваивали на этих лекциях, что хотя разрывные функции и не встречались в существовавших тогда приложениях, их надо изучать наравне с непрерывными, так как этого требуют правильно понимаемые интересы математики; они узнавали, что определения длин, площадей и объемов, годные лишь для гладких линий и поверхностей, слишком узки, что надо искать более общие определения. Эти идеи накапливались, переходили в убеждения, становились стимулом к научной работе. В 1898 году молодой французский ученый Р. Бэр защитил диссертацию, в которой дал глубокую классификацию разрывных функций. В том же году появилась книга одного из самых ярких лидеров молодежи, двадцатисемилетнего математика Эмиля Бореля, посвященная новой теории функций. К этой научной школе и примкнул начинавший в ту пору свою научную деятельность Анри Лебег.

Одной из первых работ Лебега была заметка «О нелинейчатых развертывающихся поверхностях». Эта работа разгневала математиков классического направления. Особенно возмущался один из ведущих геометров того времени Гастон Дарбу. Само

название работы казалось ему противосущественным. Дело в том, что *развертывающимися* называют поверхности, достаточно малые части которых можно получить, изгибая кусок плоскости. Но все известные к тому времени развертывающиеся поверхности — цилиндры, конусы и другие — состояли из прямолинейных образующих. Они были, как говорят, *линейчатыми*. Поэтому говорить о нелинейчатых развертывающихся поверхностях казалось полной нелепостью. Но все дело было в том, что молодой автор по-иному, чем геометры-классики, понимал развертывающиеся поверхности. Он считал такими не только поверхности, получаемые аккуратным изгибанием листа бумаги, но и поверхности, которые получаются, если этот лист скомкать (объясняя эту работу своим друзьям, он так и сказал: «Представьте себе скомканный носовой платок»). Оказалось, что можно так «скомкать» кусок плоскости, что после этого на нем не останется ни одного прямолинейного отрезка. Разумеется, получившаяся развертывающаяся поверхность нигде не имела касательной плоскости, она вся состояла из складок и изломов. И понятно, почему ее пропустили геометры, классифицируя развертывающиеся поверхности — они-то занимались лишь гладкими поверхностями.

Интерес Лебега к развертывающимся поверхностям не был случайным. Его интересовал общий вопрос, поставленный еще Камиллом Жорданом: как определить площадь поверхности, не предполагая ее гладкости. Найти площадь скомканной развертывающейся поверхности легко — достаточно развернуть ее на плоскость. Но сосчитать площадь такой поверхности по формулам, предлагаемым классической математикой, невозможно — в них входят производные, а они существуют лишь для гладких поверхностей.

Конечно, вместо касательных плоскостей можно было попробовать вы-

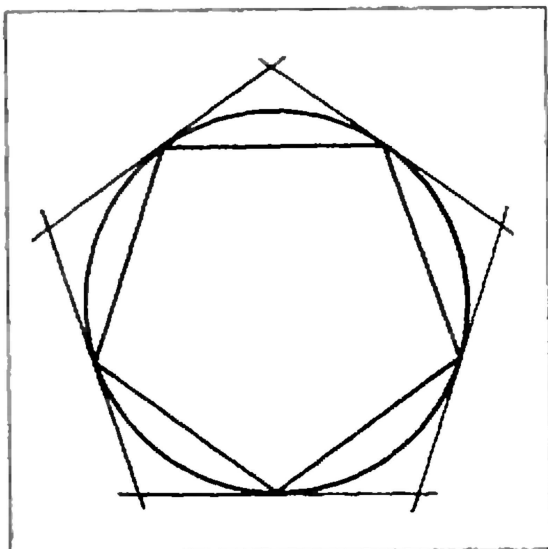


Рис 3

числить площадь поверхности по-другому, вписывая в нее многогранники и переходя к пределу при уменьшении всех размеров граней. Но немецкий математик Г. Шварц доказал, что таким путем невозможно найти площадь самого обыкновенного цилиндра — в него можно вписать многогранник со сколь угодно малыми гранями, имеющий сколь угодно большую площадь. Такой многогранник весь состоит из мелких складочек.

Лебегу удалось после длительных размышлений придумать определение площади поверхности, которое не требовало проведения касательных плоскостей, но в то же время обходило все трудности, связанные с примером Шварца. Решая эту частную задачу, Лебег пришел к общим идеям о том, что такое мера множества, как измерять длины, площади и объемы самых причудливых фигур. Этим вопросом интересовались до него многие математики. Наиболее удачным оказалось определение Жордана.

Основная идея Жордана заключалась в следующем. Существуют фигуры, заведомо имеющие площадь, например, многоугольники. Предположим теперь, что фигура Φ обладает следующим свойством: какое бы малое положительное число ϵ мы ни взяли,

найдутся две многоугольные области*) Φ_ϵ и Φ_ϵ^* , такие, что Φ_ϵ целиком содержится в фигуре Φ , а Φ_ϵ^* целиком ее содержит, причем разность площадей Φ_ϵ^* и Φ_ϵ меньше ϵ . Тогда за площадь фигуры Φ надо принять число, которое заключено между площадями Φ_ϵ и Φ_ϵ^* для всех Φ_ϵ и Φ_ϵ^* . По другому это же определение можно сформулировать так: фигура Φ измерима по Жордану, если для любого $\epsilon > 0$ ее можно представить в виде объединения многоугольной области Φ_ϵ и остатка, который покрывается многоугольной областью, имеющей площадь меньшую, чем ϵ . Мера же $m(\Phi)$ такой фигуры заключена между числами вида $m(\Phi_\epsilon)$ и числами вида $m(\Phi_\epsilon^*) + \epsilon$, где $m(\Phi_\epsilon)$ — площадь Φ_ϵ .

Это определение соответствует обычному процессу измерения площадей фигур. К нему мы прибегаем в школе, измеряя площадь круга — в роли внутренних многоугольников выступают правильные вписанные многоугольники, а остаток состоит из сегментов круга, отрезанных сторонами этого многоугольника. Эти сегменты можно заключить в треугольники, образованные хордами и касательными (рис. 3) и показать, что при достаточно большом числе сторон многоугольника суммарная площадь этих треугольников сколь угодно мала.

Мера Жордана обладает многими хорошими свойствами, в частности, как тому и положено быть, объединение конечного числа попарно непересекающихся измеримых по Жордану множеств измеримо, и его мера равняется сумме мер частей. С помощью этой меры удалось приписать площадь множеств, которые математики-классики не считали настоящими фигурами. Например, вспом-

*) Многоугольной называется область, которую можно разбить на несколько многоугольников, не имеющих общих внутренних точек.

ним фигуру, которую мы получали путем выбрасывания крестов из квадрата со стороной 1. После n выбрасываний остается 4^n квадратов, каждый из которых имеет площадь $1/9^n$. Поэтому все оставшееся множество можно покрыть квадратами с общей площадью $\left(\frac{4}{9}\right)^n$. Но $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$, а это значит, что при достаточно большом n общая площадь покрывающих квадратов сколь угодно мала, а потому мера всего оставшегося множества равна нулю.

То, что описанное выше множество имеет нулевую меру по Жордану, не удивительно, ведь оно насквозь продырявлено выбрасываемыми крестами и не имеет «жилого места». Удивительно то, что другие столь же дырявые множества оказались невозможно измерить по Жордану. Такое множество можно построить, более экономно выбрасывая кресты, а именно выбрав первый крест с площадью $1/4$, потом четыре креста общей площади $1/8$ и т. д. Остаточные квадраты имеют последовательно общие площади в $3/4$, $3/8$, $9/16$ и т. д. Все эти числа больше, чем $1/2$, и потому любой многоугольник, содержащий оставшееся после бесконечного числа выбрасываний множество, имеет площадь не меньшую, чем $1/2$. В то же время это множество не содержит ни одного целого квадрата, и потому его площадь не может быть больше нуля. Получившееся противоречие показывает, что это множество не имеет меры по Жордану. Таким образом, определение меры по Жордану не охватывает многие интересные фигуры.

Выход из создавшегося положения нашел Борель. Сложив площади всех выбрасываемых крестов, он получил бесконечную убывающую геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots,$$

сумма которой равна $1/2$. Это число Борель принял за площадь выбро-

шенной части, а за площадь остатка — разность $1 - 1/2 = 1/2$. Конечно, такой ответ оказался весьма непривычным — в множестве не было ни одной целой части, а его площадь положительна. Но Борель пошел еще дальше, измеряя самые различные множества с помощью двух принципов:

а) Если множество Φ состоит из счетной *) совокупности измеримых подмножеств $\{\Phi_n\}$, никакие два из которых не имеют общей точки, то

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(\Phi_n).$$

б) Мера дополнения к измеримому множеству Φ получается вычитанием из меры целого U меры подмножества,

$$m(\Phi') = m(U) - m(\Phi).$$

Первый из этих принципов — далеко идущее обобщение древнего положения: мера целого равна сумме мер его частей; второй следует из того же положения. Пользуясь своими принципами, Борель нашел меры всех множеств, с которыми имели дело математики его времени. Например, из его принципов следовало, что любое счетное множество точек имеет нулевую меру: ведь каждая из точек имеет меру нуль, а тогда и объединение этих точек имеет нулевую меру.

Но в построениях Бореля был один недостаток — одно и то же плоское множество Φ можно сконструировать из многоугольников различными способами. И ниоткуда не следует, что при этом получится один и тот же результат для меры. Надо было дать определение меры, не зависящее от выбора того или иного способа построения множества.

Эту-то проблему и решил в своих работах Лебег. Взяв от Бореля идею суммирования рядов, он следующим образом видоизменил определение

*) Бесконечное множество называется счетным, если его элементы можно перенумеровать.

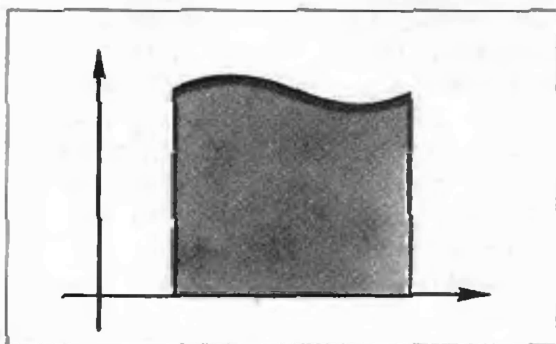


Рис. 4

Жордана. Во-первых, он разрешил, покрывать остаток множества любой счетной системой многоугольников, лишь бы их суммарная площадь не превосходила ε . А во-вторых, он предложил не только добавлять к многоугольнику малые остатки, но и удалять из него малые множества.

В более строгом виде определение меры Лебега можно сформулировать следующим образом *). Назовем множество E ε -покрываемым по Лебегу, если его можно покрыть объединением счетной системы многоугольников, суммарная площадь которых меньше, чем ε . Множество Φ измеримо по Лебегу, если для любого $\varepsilon > 0$ его можно представить в виде многоугольной области Φ_ε , к которой присоединено ε -покрываемое множество D_ε , и из которой удалено ε -покрываемое множество E_ε . За меру Лебега множества Φ примем число $m(\Phi)$, которое больше всех чисел $m(\Phi_\varepsilon) - \varepsilon$, но меньше всех чисел $m(\Phi_\varepsilon) + \varepsilon$. Разумеется, определение Лебега после соответствующего видоизменения годилось для длин, объемов и т. д.

Идея Лебега оказалась очень удачной — все измеримые по Жордану множества оказались измеримы и по Лебегу, равно как и все множества, измеримые по Борелю. Лишь позднее удалось указать пример множества,

не измеримого по Лебегу, однако, средства, которые для этого были использованы, признаются далеко не всеми математиками. Во всяком случае, никому не удалось дать эффективную конструкцию, приводящую к такому множеству. Мера Лебега удовлетворяла и принципу а) Бореля, она была, как говорят, *счетно-аддитивной*.

Однако своим основным достижением Лебег считал не создание нового понятия меры, а применение этого понятия для нового определения интеграла. Если функция $y = f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке

$[a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx$ не что иное,

как площадь криволинейной трапеции (рис. 4). Поэтому, умея находить площадь этой трапеции, можно найти и значение интеграла. Но если функция имеет бесконечно много точек разрыва, например, разрывна в каждой точке, то соответствующая ей криволинейная трапеция не является фигурой в классическом смысле слова и может не иметь обычной площади. Вычисляя же эту площадь методом Лебега, получим значение интеграла от такой функции.

Определение интеграла как меры криволинейной трапеции, казалось не слишком убедительным самому Лебегу — еще со времен Коши, т. е. с начала XIX века, математики были приучены определять интеграл чисто аналитически, не прибегая к таким понятием, как площадь или объем. Лебег придумал аналитическое определение для своего интеграла. Объясняя это определение, он использовал однажды следующий образ: если имеется некоторая сумма денег, то неопытный человек будет ее пересчитывать подряд, беря друг за другом монеты и банковские билеты различного достоинства. Опытный же кассир разложит десятки к десяткам, пятерки к пятеркам, рубли к рублям и т. д., а потом умножит число десятков на 10, число пятерок на 5 и т. д. и сложит все получившиеся произведения.

*) Излагаемое здесь определение внешне отличается от того, которое в свое время предложил Лебег, но эквивалентно ему.

Точно так же, чтобы сосчитать значение интеграла от счень разрывной функции, Лебег предложил делить не область изменения аргумента, а область значений функции. Если заданы числа y_k и y_{k+1} , то через E_k обозначим совокупность тех значений x , для которых выполняется неравенство $y_k \leq f(x) < y_{k+1}$. Интегральной суммой Лебега называют сумму $\sum_k y_k m(E_k)$.

Переходя к пределу при безграничном измельчении отрезков разбиения, получаем число, которое и равно ин-

тегралу Лебега $\int_a^b f(x) dx$. Наглядно

говоря, суть идеи Лебега состояла в том, что для разрывных функций «криволинейную трапецию» надо было резать не параллельно оси ординат, а параллельно оси абсцисс.

В настоящее время лебеговский процесс вычисления интеграла кажется математикам чем-то само собой разумеющимся. Но в начале века он казался потрясающим самые основы математики. И тогда Лебег придумал новое обоснование того, что его метод вычисления интегралов естествен. Возможно, на него оказал влияние пример Гильберта, давшего несколько ранее аксиоматику геометрии. Подобно этому Лебег сформулировал систему требований, которым должен удовлетворять интеграл, и доказал, что единственным определением интеграла, которое удовлетворяет всем этим требованиям, является предложенное им.

В 1902 году, благодаря поддержке К. Жордана и Э. Пикара, удалось преодолеть предубеждение противников новой математической школы, и Лебег успешно защитил докторскую диссертацию.

Создание меры и интеграла Лебега позволило преодолеть многие трудности, накопившиеся к тому времени в математическом анализе. Особенно полезной оказалась идея Лебега, что не надо требовать, чтобы как-то свойство функции выполнялось для

всех значений аргумента, а достаточно изучать свойства, выполняющиеся почти всюду, т. е. всюду, кроме множества точек нулевой меры. Оказалось, например, что если функция $y = f(x)$ ограничена и интегрируема по Лебегу, то функция $F(x) =$

$\int_a^x f(t) dt$ почти для всех значений x имеет производную, совпадающую с $f(x)$. Чрезвычайно полезен был интеграл Лебега в теории тригонометрических рядов, т. е. рядов вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Сам Лебег много и с увлечением занимался этой теорией.

На первый взгляд казалось, что интеграл Лебега — слишком сложный и тонкий инструмент для того, чтобы им можно было пользоваться в приложениях; на практике такие «дикие» функции и множества не встречаются, и все практические проблемы обслуживаются обычными интегралами. Но в те годы стала развиваться теория бесконечномерных пространств, необходимая для изучения и решения интегральных уравнений (уравнений, содержащих искомую функцию под знаком интеграла). К таким уравнениям сводились многие задачи математической физики, и были придуманы способы их решения, основанные на построении последовательности функций, в известном смысле приближающейся к искомому решению. Доказать, оставаясь в рамках классической математики, что такая последовательность к чему-то приближается, не удавалось. Положение дел напоминало здесь попытку решить уравнение $x^2 = 2$, пользуясь лишь рациональными числами. Конечно, можно составить последовательность рациональных чисел, приближающуюся к искомому корню, но сам корень иррационален, и последовательность не имеет предела внутри множества рациональных чисел. Как известно, что-

бы выйти из этого положения, надо пополнить множество рациональных чисел, присоединив к нему иррациональные числа.

Точно так же последовательность функций, получаемых при приближенном решении интегрального уравнения, не всегда сходится к какой-нибудь «хорошей» функции. Чтобы быть уверенным в существовании решения, надо пополнить множество функций, присоединив к нему разрывные функции. Но если присоединить к множеству непрерывных функций какие-нибудь разрывные функции, то хорошей теории построить не удастся. Оказалось, что присоединять надо функции, квадрат которых интегрируем по Лебегу. Тогда получается пространство, очень похожее по своим свойствам на наше евклидово пространство, только бесконечномерное. Это пространство называют гильбертовым.

Триумф идей Лебега, Бэра и Бореля привел к тому, что даже Дарбу изменил свое мнение о новой математике, и, выступая в 1908 году на Математическом конгрессе в Риме, говорил о пламенном и пылливом духе математики XX века, о науке, ведущей свои изыскания в абсолютно новой области с неизведанными перспективами. Он подчеркнул, что наука XX века не боится атаковать основы построений, которые столь долго казались непоколебимыми.

Позже идеи, приведшие к созданию меры и интеграла Лебега, позволили А. Н. Колмогорову построить аксиоматику теории вероятностей, Н. Винеру определить понятие меры для функциональных пространств. Всюду, куда проникали идеи меры, использовались конструкции и понятия, восходящие к Лебегу. Весьма полезны они оказались в статистической физике, дав возможность А. Я. Хинчину и Дж. фон Нейману обосновать некоторые идеи американского физика Гиббса.

Замечательные работы, лежащие в области теории функций действительного

переменного (так стали называть область математики, изучавшую общую теорию функций, меры и интеграла) сделали московские математики Д. Ф. Егоров и Н. Н. Лузин, а также их многочисленные ученики.

Сам же Лебег в эти годы интересовался возникавшей тогда теоретико-множественной топологией, предвосхитив в одной из работ позднейшие исследования П. С. Урысона по теории размерности топологических пространств, теорией потенциала и другими вопросами математики. И хотя ничего равного достижениям своей математической молодости он уже не создал, их оказалось вполне достаточно, чтобы обессмертить его имя.

Последние двадцать лет жизни Лебег посвятил проблемам истории и преподавания математики. Естественно, что основное внимание он уделял теории измерения величин в средней школе. В серии статей, позднее собранных в книгу «Об измерении величин» (она переведена и на русский язык), он остроумно подверг критике распространенные заблуждения в преподавании этих вопросов. Он показал в своей книге несостоятельность распространенных определений длины, площади и объема, критиковал учебники за стремление к строгости в одних местах при грубых логических промахах в других.

Прошло 75 лет с тех пор, как Лебег создал свою теорию меры и интегрирования. Эти понятия навсегда вошли в математику — без них нельзя мыслить ни теорию вероятностей, ни функциональный анализ, ни статистическую физику, ни топологическую алгебру.

А. А. Михайлов

Что такое долгота и широта?



Положение точки на поверхности Земли определяется двумя координатами: географической широтой и географической долготой. Знаете ли вы, откуда произошли эти названия? Во втором веке н. э. греческий астроном и географ Клавдий Птолемей ввел понятия длины и ширины применительно к измерению стран, прилегающих к Средиземному морю, вытянутому с запада на восток. Результаты измерения вдоль моря он назвал длиной, а поперек — шириной. При переводе на русский язык вместо этих слов, которые можно относить к любым объектам, для характеристики положения тела на земной поверхности были введены специальные термины — долгота и широта. Хотя эти понятия, наглядно иллюстрируемые на глобусе, широко известны, далеко не все знают их точное определение.

Часто говорят, что широта φ есть угловое расстояние данного пункта от земного экватора, а долгота λ — это двугранный угол между плоскостью данного меридиана и плоскостью условно выбранного начального меридиана. Следовательно, на-

несенная на глобус сеть параллелей и меридианов позволяет нам указать географические координаты любой точки земного шара. Естественно, что знание координат необходимо для ориентации. Но, находясь в какой-то точке на Земле, мы должны сами уметь определить свои географические координаты. Как известно, это делают с помощью астрономических наблюдений. Предположим, мы вычислили широту и долготу пункта, в котором мы находимся. Можем ли мы теперь, найдя на глобусе точку с такими координатами, быть уверенными, что мы находимся именно в этой точке Земли? Нет! Даже если точка на глобусе указана с предельной точностью.

Дело в том, что Земля не является шаром, и глобус — лишь упрощенная наглядная модель Земли. Именно неправильность (нешарообразность) формы Земли приводит к расхождению географических координат, полученных из астрономических наблюдений, и координат, определенных для данной точки по глобусу, по карте.

Если Землю считать шаром, то отвесная линия в любом месте на зем-

ной поверхности проходит через центр Земли, а меридианы и экватор — окружности, радиусы которых равны радиусу Земли. Тогда географическую широту можно измерять дугой меридиана от плоскости экватора до данной точки, а долготу — дугой экватора от условно выбранного начального меридиана до данного.

Истинная форма Земли, называемая геоидом, весьма сложна, хотя и близка к эллипсоиду вращения, сплюснутому в направлении полюсов. Сложность формы вызвана неравномерностью распределения массы внутри и на поверхности Земли, в частности, наличием материков с высокими горами и глубоких впадин в океанах.

Вследствие эллипсоидальности Земли отвесная линия не в любой точке проходит через центр Земли, а неправильности геоида приводят еще и к боковым отклонениям отвесной линии, так что она вообще может даже не пересечь земную ось. Отсюда возникают так называемые отклонения отвеса, выражающиеся в неправильных изменениях направлений отвеса при переходе от точки к точке. А поскольку при практическом нахождении широт и долгот одним из основных направлений, по которому ориентируются астрономические инструменты, является отвесная линия, расхождение между истинными географическими координатами точки Земли и ее координатами на глобусе становятся вполне понятными.

Сформулируем четкое определение широты и долготы. Широта есть угол между отвесной линией в данном месте и плоскостью экватора. Понятно, почему мы не сказали «плоскостью земного экватора». Из-за отклонений отвеса и земной экватор — линия, во всех точках которой географическая широта равна нулю, — отклоняется от плоского сечения Земли на величину отклонений отвеса, которые могут достигать и даже превосходить, особенно в гористых местностях, $10''$, что в линейной мере соответствует примерно 300 м. Все

сказанное о земном экваторе относится и к параллелям — линиям равной широты, которые по той же причине не являются плоскими кривыми.

Строгое определение географической долготы должно быть таким: долгота — это есть двугранный угол между двумя плоскостями, параллельными оси вращения Земли, одна из которых содержит отвесную линию в условно выбранной исходной точке, а другая — отвесную линию в определяемой точке. От градусной меры долготы можно перейти к временным координатам. Переход этот производится с помощью несложных расчетов: оборот Земли вокруг собственной оси на 360° соответствует 24 часам, следовательно, $1 \text{ час} = 15^\circ$, $1 \text{ минута времени} = 15' \text{ дуги}$, $1 \text{ секунда времени} = 15'' \text{ дуги}$. Очевидно, что в пунктах, которым соответствуют разные долготы, полдень (и соответственно полночь) наступает в разные моменты. Легко понять, что разность (по времени) между моментами полудня в данном месте и в пункте, долгота которого принята за нуль, и есть долгота данного места.

За исходный пункт в определении долгот в 1884 году по международному соглашению была принята Гринвичская обсерватория, основанная в 1675 году в предместье Лондона. До этого в разных странах за исходные пункты принимались различные главнейшие обсерватории: в России — Пулковская близ Петербурга, во Франции — Парижская обсерватория и т. д. В старину долготы отсчитывались от одного из Канарских островов — Ферро, который был наиболее западной точкой Старого света, т. е. материков Европы с Азией и Африки. Поэтому все долготы считались в одном направлении и одного знака — к востоку от Ферро.

Вследствие отклонений отвеса и все меридианы — линии, все точки которых имеют одинаковую долготу, — тоже не плоские кривые, получаемые в сечении Земли плоскостями, содержащими земную ось, а слегка