Барсуков А.Н.

Алгебра

Учебник для 6 - 8 классов

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Б26

Барсуков А.Н.

Б26 Алгебра: Учебник для 6 - 8 классов / Барсуков А.Н. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 296 с.

ISBN 978-5-458-29984-8

Шестое издание "Алгебры" А.Н. Барсукова переработано и приведено в соответствие с новой программой. Переработка учебника и изложение вопросов, вновь включённых в программу восьмилетней школы, выполнены С. И. Новосёловым.Главу "Счётная (логарифмическая) линейка" и о возвышении в квадрат и куб, извлечении квадратного и кубического корней при помощи счётной линейки написал учитель математики школы № 315 Москва И.Б. Вейцман. Одиннадцатое издание печатается с десятого без изменений.

ISBN 978-5-458-29984-8

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

§ 2. Алгебраические выражения.

Решим задачу.

Ученик купил n тетрадей по 2 коп. за тетрадь и учебник за 8 коп. Сколько заплатил он за всю покупку?

Чтобы узнать стоимость всех тетрадей, надо цену одной тетради умножить на число тетрадей. Значит, стоимость тетрадей будет равна $2 \cdot n$ копейкам.

Стоимость же всей покупки будет равна

$$(2 \cdot n + 8) \text{ копейкам.}$$

Заметим, что перед множителем, выраженным буквой, знак умножения принято опускать, он просто подразумевается. Поэтому предыдущую запись можно представить в таком виде:

$$2n + 8.$$

Получили формулу решения задачи. Она показывает, что для решения задачи надо цену тетради умножить на число купленных тетрадей и к произведению прибавить стоимость учебника.

Вместо слова «формула» для подобных записей употребляют также название «алгебраическое выражение».

Алгебраическим выражением называется запись, состоящая из чисел, обозначенных цифрами или буквами и соединённых знаками действий.

Для краткости вместо «алгебраическое выражение» говорят иногда просто «выражение».

Приведём ещё примеры алгебраических выражений:

$$\frac{a+3}{b-1};\quad 3mn;\quad 9(p+q);\quad a;\quad (3+8)\cdot 7;\quad 4{,}5.$$

Из этих примеров видим, что алгебраическое выражение может состоять только из одной буквы, а может совсем не содержать чисел, обозначенных буквами (два последних примера). В этом последнем случае выражение называется также арифметическим выражением.

Дадим в полученном нами алгебраическом выражении $2n+8$ букве n значение 5 (значит, ученик купил 5 тетрадей). Подставив вместо n число 5, получим:

$$2 \cdot 5+8,$$

что равно 18 (то есть 18 коп.).

Число 18 является значением данного алгебраического выражения при $n=5$.

Значением алгебраического выражения называется число, которое получится, если в это выражение подставить вместо букв данные их значения и произвести над числами указанные действия.

Например, мы можем сказать: значение выражения $2n+8$ при $n=2$ равно 12 (12 коп.).

Значение этого же выражения при $n=3$ равно 14 (14 коп.) и т. д.

Мы видим, что значение алгебраического выражения зависит от того, какие значения мы дадим входящим в него буквам. Правда, иногда бывает, что значение выражения не зависит от значений входящих в него букв. Например, выражение $2(a+3)-2a$ равно 6 при любых значениях a.

Найдём в виде примера числовые значения выражения $3a+2b$ при различных значениях букв a и b.

Пусть $a=4$ и $b=2$.

Подставим в данное выражение вместо a число 4, а вместо b число 2 и вычислим полученное выражение:

$$3a+2b=3 \cdot 4+2 \cdot 2=12+4=16.$$

Итак, при $a=4$ и $b=2$ значение выражения $3a+2b$ равно 16.

Таким же образом найдём, что при $a=5$ и $b=7$ значение выражения равно 29, при $a=0$ и $b=1$ оно равно 2 и т. д.

Результаты вычислений можно записать в виде таблицы, которая наглядно покажет, как изменяется значение выражения в зависимости от изменения значений входящих в него букв.

Составим таблицу из трёх строк. В первой строке будем записывать значения a, во второй — значения b и в третьей — значения выражения $3a+2b$. Получим такую таблицу:

a	4	5	0	3	3
b	2	7	1	5	1
$3a+2b$	16	29	2	19	11

В § 1, говоря о переместительном законе сложения, мы записали, что два выражения $a+b$ и $b+a$ равны:

$$a+b=b+a.$$

Такая запись называется равенством.

Два алгебраических выражения, соединённые знаком «равно», образуют равенство.

Как известно из арифметики, кроме знака равенства, употребляются ещё знаки неравенства:

$>$ — этот знак означает больше,

$<$ — этот знак означает меньше.

Например:

$5>2$ — читается: пять больше двух;

$3<7$ — читается: три меньше семи.

Следует запомнить, что знак неравенства всегда обращён остриём к меньшему числу.

Два выражения, соединённые знаком «больше» или «меньше», образуют неравенство.

Пример. Измерив отрезок, получили, что его длина d больше 5 *см*, но меньше 6 *см*. Результат измерения можно записать в виде двойного неравенства:

$$5 \text{ см} < d < 6 \text{ см}.$$

§ 3. Допустимые значения букв.

Из примеров, приведённых в § 1, заключаем, что буквы, входящие в какое-либо алгебраическое выражение, могут принимать иногда любые значения (первый пример), иногда лишь некоторые, но не любые значения (второй пример).

Определение. **Значения, которые могут принимать буквы в данном алгебраическом выражении, называются допустимыми значениями для этих букв.**

Если выражение получилось в результате решения задачи, то совокупность, или, как принято говорить, множество, допустимых значений для букв определяется по смыслу самой задачи.

Так, в выражении $2n+8$, полученном в § 2, множеством допустимых значений для n является только множество натуральных чисел, так как количество тетрадей может выражаться лишь натуральным числом.

Если о значениях букв в данном выражении ничего не сказано, то для такого выражения допустимыми считаются все те значения букв, при которых выражение имеет смысл.

Пусть дано выражение:

$$\frac{2x-15}{2}.$$

Найдём его значение при $x=2$. Подставив в него вместо x число 2, получим:

$$\frac{2\cdot 2-15}{2}=\frac{4-15}{2}.$$

Получили в числителе уменьшаемое, которое меньше вычитаемого. Выражение при $x=2$ потеряло смысл. Значит, число 2 не является допустимым значением для x. Легко видеть, что x в этом выражении может принимать значения только бóльшие или равные $\frac{15}{2}$. При всех значениях x, меньших $\frac{15}{2}$, выражение теряет смысл. Коротко эти допустимые значения для x можно записать так: $x\geqslant\frac{15}{2}$.

Знак $\geqslant$ означает «больше или равно».

В выражении $\frac{2}{a-3}$ допустимыми значениями для a будут только числа, бóльшие 3, так как при $a=3$ в знаменателе получается нуль, а (как известно из арифметики) на нуль делить нельзя; если же a меньше, чем 3, то нельзя из a вычесть 3. Множество допустимых значений для a можно записать так: $a > 3$.

§ 4. Порядок действий.

Когда в арифметике над числами нужно было произвести различные действия, то мы производили их в порядке, установленном особыми правилами. Эти же правила остаются и в алгебре.

Напомним, что

сложение и вычитание называются действиями первой ступени;

умножение и деление называются действиями второй ступени.

Напомним теперь правила о порядке действий.

Правило 1. ***Действия одной и той же ступени производятся в том порядке, в каком они записаны.***

Примеры.

$$17 - 11 + 8 = 6 + 8 = 14;$$
$$8 : 2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12.$$

Правило 2. ***Если выражение содержит действия различных ступеней, то сначала производят действия высшей ступени, затем низшей ступени.***

Поясним это правило на примерах.

Пример 1.

$$3 + 5 \cdot 7 = 3 + 35 = 38.$$

Первым произведено умножение (действие второй ступени), затем — сложение.

Пример 2.

$$2{,}5 \cdot 3{,}7 + 5{,}9 \cdot 6{,}1 - 2{,}4 \cdot 3{,}2 =$$
$$= 9{,}25 + 35{,}99 - 7{,}68 = 37{,}56.$$

И в этом примере мы сначала выполнили все умножения (действия второй ступени), а затем (в порядке записи произвели сложение и вычитание (действия первой ступени).

Но иногда приходится отступать от порядка, указанного в правиле 2. Покажем это на задаче.

Задача. *Из двух пунктов одновременно выехали навстречу друг другу два велосипедиста. Скорость одного a км в час, другого b км в час. Каково расстояние между пунктами, если велосипедисты встретились через t часов?*

Решим задачу по вопросам.

1) Какое расстояние проходили за час оба велосипедиста вместе?

$$a+b \ (\textit{км}).$$

2) Чему равно расстояние между двумя пунктами?

Чтобы ответить на этот вопрос, надо полученное расстояние $a+b$ умножить на t. Если мы запишем это действие в виде

$$a+bt \ (\textit{км}),$$

то ответ будет неверен, так как по правилу 2 мы должны в этом выражении b умножить на t и результат прибавить к a. Нам надо показать, что здесь сначала следует произвести сложение (действие первой ступени), а затем умножение (действие второй ступени). Показывается это при помощи скобок, и выражение записывается так:

$$(a+b)t \ (\textit{км}).$$

Правило 3. ***Если нужно произвести раньше действия низшей ступени, то применяются скобки. Действия над числами, заключёнными в скобки, производятся первыми.***

Приведём примеры.

1) $11-2\cdot 4=11-8=3$, но $(11-2)\cdot 4=9\cdot 4=36$.

2) $(5+3)\cdot(8-2)=8\cdot 6=48$, но $5+3\cdot 8-2=$
$=5+24-2=27$.

Если дано дробное выражение, записанное с помощью черты, то черта заменяет скобки и означает, что надо вычислить отдельно выражение, стоящее в числителе, и отдельно выражение, стоящее в знаменателе, и первый результат разделить на второй.

Пример.

$$\frac{a+b}{c-d}=(a+b):(c-d).$$

При $a=20$, $b=16$, $c=8$, $d=2$ получим:

$$\frac{a+b}{c-d}=\frac{20+16}{8-2}=\frac{36}{6}=6.$$

§ 5. Основные законы сложения и умножения.

В дальнейшем, когда будем изучать действия над числами, изображёнными цифрами или буквами (безразлично), нам придётся во многих выводах опираться на те законы действий, которые изучались в арифметике. В силу важности этих законов они называются основными законами действий.

Напомним их.

1. Переместительный закон сложения.

Сумма не изменяется от перемены порядка слагаемых.

Этот закон уже был записан в § 1 в виде равенства:

$$a+b=b+a,$$

где a и b — любые числа.

Из арифметики известно, что переместительный закон верен для суммы любого числа слагаемых.

2. Сочетательный закон сложения.

Сумма нескольких слагаемых не изменится, если какую-нибудь группу рядом стоящих слагаемых заменить их суммой.

Для суммы трёх слагаемых имеем:

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

Например, сумму $5+7+11$ можно вычислить двумя способами так:

$$(5+7)+11=12+11=23,$$
$$5+(7+11)=5+18=23.$$

Сочетательный закон справедлив для любого числа слагаемых.

Так, в сумме $a+b+c+d$ четырёх слагаемых рядом стоящие слагаемые можно как угодно объединять в группы и заменять эти слагаемые их суммой:

$$a+b+c+d=(a+b+c)+d=(a+b)+(c+d)=$$
$$=a+(b+c)+d=a+b+(c+d)=(a+b)+c+d.$$

Например, $1+3+5+7=16$; мы получим то же число 16, каким бы способом ни группировали рядом стоящие слагаемые:

$$1+(3+5)+7=1+8+7=16,$$
$$1+3+(5+7)=1+3+12=16,$$
$$(1+3)+(5+7)=4+12=16.$$

Переместительным и сочетательным законами часто пользуются при устных вычислениях, располагая числа так, чтобы легче было их сложить в уме.

Пример 1.

$$89+67+11.$$

Поменяем местами два последних слагаемых, получим:

$$89+11+67.$$

Сложить числа в этом порядке оказалось гораздо легче.

Обычно слагаемые в новом порядке не переписывают, а производят их перемещение в уме: переставив мысленно 67 и 11, сразу складывают 89 и 11 и затем прибавляют 67.

Пример 2.

$$2\frac{2}{23}+7\frac{1}{2}+3+2\frac{1}{2}.$$

Чтобы легче было сложить эти числа в уме, изменим порядок слагаемых так:

$$2\frac{2}{23}+3+7\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}.$$

Пользуясь сочетательным законом, заключим два последних слагаемых в скобки:

$$2\frac{2}{23}+3+\left(7\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}\right).$$

Сложение чисел в скобках произвести легко, получим:

$$2\frac{2}{23}+3+10=2\frac{2}{23}+13=15\frac{2}{23}.$$

3. Переместительный закон умножения.

Произведение не изменяется от перемены порядка сомножителей:

$$ab=ba,$$

где a и b — любые числа.

Из арифметики известно, что переместительный закон верен для произведения любого числа сомножителей.

4. Сочетательный закон умножения.

Произведение нескольких сомножителей не изменится, если какую-нибудь группу рядом стоящих сомножителей заменить их произведением.

Для произведения трёх сомножителей имеем:

$$(ab)c=a(bc).$$

Например, произведение трёх сомножителей $5\cdot3\cdot4$ можно вычислить так:

$$(5\cdot3)\cdot4=15\cdot4=60$$

или так:

$$5\cdot(3\cdot4)=5\cdot12=60.$$

Для произведения четырёх сомножителей имеем:

$$abcd=(abc)d=(ab)cd=a(bc)d=(ab)(cd)=$$
$$=a(bcd)=ab(cd).$$

Например, $2\cdot6\cdot\frac{1}{3}\cdot5=20$; то же число 20 получится при любой группировке рядом стоящих сомножителей:

$$2\left(6\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot5=2\cdot2\cdot5=20; \qquad (2\cdot6)\left(\frac{1}{3}\cdot5\right)=12\cdot\frac{5}{3}=20;$$
$$2\left(6\cdot\frac{1}{3}\cdot5\right)=2\cdot10=20.$$

Применение переместительного и сочетательного законов умножения часто значительно облегчает вычисления.

Пример 1.

$$25 \cdot 37 \cdot 4.$$

Умножить 25 на 37 не очень легко. Переместим два последних сомножителя:

$$25 \cdot 4 \cdot 37.$$

Теперь умножение легко выполнится в уме.

Пример 2.

$$75 \cdot 35 \cdot 4 \cdot 2.$$

Применим переместительный и сочетательный законы, запишем это выражение так:

$$75 \cdot 4 \cdot (35 \cdot 2).$$

Все эти действия легко выполняются в уме.

5. Распределительный закон умножения по отношению к сложению.

Чтобы умножить сумму двух (или нескольких) чисел на какое-либо число, можно каждое слагаемое умножить на это число и результаты сложить:

$$(a+b)c = ac + bc.$$

Пример 1. Распределительный закон мы применяем, например, при умножении двузначных (и многозначных) чисел. Так, чтобы умножить 26 на 7, мы представляем 26 в виде суммы $20+6$, умножаем 20 на 7, 6 на 7 и результаты складываем:

$$26 \cdot 7 = (20+6) \cdot 7 = 20 \cdot 7 + 6 \cdot 7 = 140 + 42 = 182.$$

Но иногда бывает выгоднее поступать наоборот: вместо того чтобы умножить каждое слагаемое на одно и то же число, сначала находят сумму этих слагаемых и умножают ее на данное число.

Пример 2.

$$87 \cdot 28 + 13 \cdot 28.$$

Представим выражение в другом виде:

$$(87+13) \cdot 28.$$