

А. М. Ляпунов

**Общая задача об
устойчивости движения**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
А11

А11 **А. М. Ляпунов**
Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов – М.: Книга
по Требованию, 2014. – 388 с.

ISBN 978-5-458-56985-9

ISBN 978-5-458-56985-9

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2014

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2014

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ОБЩАЯ ЗАДАЧА
ОБ УСТОЙЧИВОСТИ
ДВИЖЕНИЯ

(Издание Харьковского математического общества. Харьков, 1892 г.)

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этом сочинении излагаются некоторые способы для решения вопросов о тех свойствах движения и в частности равновесия, которые известны под названием устойчивости и неустойчивости.

Обыкновенные вопросы такого рода, которым и посвящено это сочинение, приводят к исследованию дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

вторые части которых, зависящие от времени t и неизвестных его функций $x_1, x_2, \dots, x_n$, при величинах x_s , численно достаточно малых, разлагаются в ряды по целым положительным степеням последних и уничтожаются, когда все эти величины делаются нулями.

Задача состоит при этом в том, чтобы узнать, можно ли начальные значения функций x_s , не делая их нулями, выбирать настолько численно малыми, чтобы во все время, следующее за начальным моментом, функции эти оставались численно меньшими некоторых заранее данных, отличных от нуля, но сколь угодно малых пределов.

Когда наши дифференциальные уравнения мы умеем интегрировать, задача эта конечно не представляет затруднений. Но важно иметь способы, которые позволяли бы решать ее независимо от выполнения этого интегрирования.

Известно, что существуют случаи, когда рассматриваемая задача допускает приведение к некоторой задаче о *maxima*'х и *minima*'х ¹. Но область вопросов, которые таким путем могут быть разрешаемы, весьма ограничена, и в большинстве случаев необходимо прибегать к каким-либо иным методам.

¹ Мы разумеем здесь те случаи, к которым приложима известная теорема Lagrange'a о *maxima*'х силовой функции, касающаяся вопросов об устойчивости равновесия, или более общая теорема Routh'a о *maxima*'х и *minima*'х известных интегралов дифференциальных уравнений движения (см. The advanced part of a treatise on the Dynamics of a System of rigid bodies, 4 edition, 1884, p. 52, 53).

Прием, которым пользуются обыкновенно, приводится к тому, что в исследуемых дифференциальных уравнениях отбрасывают все члены выше первого измерения относительно величин x , и вместо первоначальных рассматривают получаемые таким путем линейные уравнения.

Так трактуется вопрос в сочинении Thomson'a и Tait'a „Treatise on Natural Philosophy“ (Vol. I, Part I, 1879), в сочинениях Routh'a „A treatise on the Stability of a given State of motion“ (1877) и „A treatise on the Dynamics of a System of rigid bodies“ (Part II, 4 edition, 1884), и наконец — в сочинении Жуковского „О прочности движения“ („Ученые записки Московского университета“; отдел физико-математический, вып. 4, 1882).

Конечно указанный сейчас прием вносит весьма существенное упрощение, в особенности в тех случаях, когда коэффициенты в дифференциальных уравнениях суть постоянные величины. Но законность такого упрощения а priori ничем не оправдывается, ибо дело приводится к замене рассматриваемой задачи другою, с которою она может не находиться ни в какой зависимости. Во всяком случае очевидно, что если решение новой задачи и может давать ответ на первоначальную, то только при известных условиях, а последние обыкновенно не указываются.

Должно впрочем заметить, что, сознавая нестрогость приема, некоторые авторы (как например Routh) не ограничиваются одним первым приближением, к которому приводит интегрирование названных выше линейных уравнений, а рассматривают также второе и некоторые из следующих, получаемых обычными в подобных случаях методами. Но этим дело мало подвигается вперед, ибо вообще таким путем достигается только более точное представление функций x , в пределах известного промежутка времени, что конечно не дает новых оснований для каких-либо заключений об устойчивости.

Единственная, сколько мне известно, попытка строгого решения вопроса принадлежит Н. Poincaré, который в своем во многих отношениях замечательном мемуаре „Sur les courbes définies par les équations différentielles“ (Journal de mathématiques; 3 série, tomes 7 et 8; 4 série, tomes 1 et 2) и именно в двух последних его частях рассматривает вопросы об устойчивости для случая систем дифференциальных уравнений второго порядка, а также останавливается на некоторых близких к ним вопросах, касающихся систем третьего порядка.

Хотя Poincaré и ограничивается очень частными случаями, но методы, которыми он пользуется, допускают значительно более общие приложения и способны привести еще ко многим новым результатам. Идеями, заключающимися в названном мемуаре, я руководствовался при большей части моих изысканий.

Задача, которую я себе поставил, предпринимая настоящее исследование, может быть формулирована так: указать те случаи, в которых первое приближение действительно решает вопрос об устойчивости, и дать какие-либо способы, которые позволяли бы решать его по крайней мере в некоторых из тех случаев, когда по первому приближению нельзя судить об устойчивости.

Конечно, чтобы придти к каким-либо результатам, необходимо было сделать относительно рассматриваемых дифференциальных уравнений известные предположения.

Простейшее из них и вместе с тем соответствующее наиболее важным и интересным приложениям состояло бы в том, что коэффициенты в разложениях вторых частей этих уравнений суть постоянные величины. Весьма многим интересным вопросам соответствовало бы также более общее предположение, что коэффициенты эти суть периодические функции времени.

В этих двух предположениях вопрос и трактуется мною преимущественно.

Впрочем я касаюсь отчасти и более общего случая, когда названные коэффициенты суть какие-либо функции времени, числовые значения которых никогда не превосходят известных пределов.

В этом общем предположении трактуется вопрос в первой главе моего сочинения, где доказывается одно предположение, касающееся интегрирования рассматриваемых дифференциальных уравнений при помощи рядов известного типа¹ и указываются некоторые вытекающие из него заключения об устойчивости. В том же предположении доказываются здесь и некоторые другие предложения, лежащие в основании дальнейших выводов.

Первая глава представляет только вступительную часть моего сочинения, в которой излагаются некоторые предложения принципиального характера. Главную же часть составляют вторая и третья, где и рассматриваются последовательно случаи постоянных и периодических коэффициентов.

Каждую из этих двух глав я начинаю некоторыми замечаниями, касающимися линейных дифференциальных уравнений, соответствующих первому приближению, причем в третьей главе, где трактуется случай периодических коэффициентов, вхожу в некоторые подробности относительно так называемого характеристического уравнения.

Переходя затем к главному вопросу и указав условия, при

¹ Ряды, о которых идет здесь речь, рассматривались мною в более частных предположениях в статье „О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости“ („Сообщ. Харьк. мат. общ.“ 2 серия, том I, 1888). Впоследствии я узнал, что в таких же предположениях ряды эти рассматривались Н. Poincaré в его диссертации „Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles“ (Thèse, 1879).

которых он разрешается в первом приближении, я обращаюсь к тем особенным случаям, когда для этой цели в дифференциальных уравнениях необходимо принимать в расчет члены выше первого измерения.

Но случаи этого рода весьма разнообразны, и в каждом из них задача получает свой особый характер, так что не может быть и речи о каких-либо общих способах ее решения, которые относились бы ко всем таким случаям.

Поэтому различные возможные случаи приходится рассматривать отдельно, и я ограничиваюсь только простейшими из них, которые представляют затруднения, наименее серьезные. Исследование их и изложение соответствующих им способов решения вопросов об устойчивости занимает большую часть двух последних глав.

Не входя в дальнейшие подробности относительно содержания этого сочинения, с которым читатель может до известной степени ознакомиться из прилагаемого оглавления, замечу еще, что во второй главе я касаюсь вопроса о периодических решениях нелинейных дифференциальных уравнений. Вопрос этот находится в тесной связи с методами, прилагаемыми мною для одного из особенных случаев. Притом рассмотрение его приводит к некоторым заключениям об условной устойчивости для тех наиболее интересных случаев, когда дифференциальные уравнения имеют каноническую форму. А этими заключениями исчерпывается почти все, что пока можно сказать общего о таких случаях.

В предлагаемом сочинении читатель не найдет решения каких либо определенных механических задач. По первоначальному плану приложения такого рода должны были составить четвертую главу. Но потом я отказался от намерения прибавлять ее, имея в виду следующие соображения.

Все наиболее интересные и важные вопросы механики (как например те, которые приводят к каноническим уравнениям) таковы, что в особенных случаях, когда первое приближение недостаточно, задача делается для них в высшей степени трудною, и пока невозможно указать каких-либо приемов для ее решения. Поэтому, при рассмотрении таких вопросов, мне пришлось бы ограничиться только примерами двоякого рода: или теми, в которых вопрос решался бы приведением к задаче о *taхіта'х* и *тапіта'х* (т. е. на основании теоремы Routh'a), или теми, в которых он решался бы в первом приближении. Но подобные примеры, хотя и представляли бы известный интерес, не относились бы к главной части моего исследования, которая, как уже было сказано, посвящена изложению методов, соответствующих особенным случаям известных категорий. Что же касается примеров, относящихся к этим методам, то их пришлось бы выбирать из области

тех вопросов механики, в которых принимаются в расчет различного рода сопротивления среды. Таких примеров конечно можно было бы привести сколько угодно; но они сами по себе не представляли бы большого интереса и могли бы иметь значение только как поясняющие названные методы. Если же иметь в виду исключительно эту последнюю цель, то совершенно достаточно и тех примеров аналитического характера, которые приведены мною в надлежащих местах двух последних глав.

В заключение замечу, что сочинение мое не есть трактат об устойчивости, где было бы обязательно рассмотрение механических задач всякого рода. Подобный трактат должен был бы заключать в себе многие вопросы, которых я здесь вовсе не касаюсь.

В этом сочинении я имел лишь в виду изложить то, что пока удалось мне сделать для решения поставленной мною задачи и что, может быть, может послужить точкою отправления для дальнейших изысканий такого же характера.

Во время печатания этого сочинения появились два весьма интересных произведения Н. Роисагэ, в которых затрагиваются вопросы, стоящие весьма близко к рассматриваемым мною. Я разумею его мемуар „Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique“, появившийся в XIII томе Acta mathematica вскоре после того, как я начал печатать свое исследование, и вышедший в самое недавнее время первый том его большого сочинения „Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste“ (Paris, Gauthier-Villars 1892).

В первом находятся некоторые результаты, сходные с полученными мною, на что я и указываю в надлежащих местах своего сочинения в подстрочных примечаниях. Что же касается второго, то ознакомиться с ним подробно я еще не успел; но по отношению к вопросам, рассматриваемым мною, в нем повидимому нет каких-либо существенных прибавлений к названному мемуару.

Считаю нужным сказать здесь об одном термине, встречающемся в этом сочинении.

Рассматривая ряды, расположенные по степеням величин, которые по характеру вопроса можно предполагать сколь угодно малыми, я весьма часто говорю о членах различных *порядков*. При этом под порядком каждого члена я разумею его измерение, и термину „порядок“ не приписываю никакого иного значения.

Я должен упомянуть еще об одном выражении, которым по примеру многих французских и немецких ученых нередко поль-

зуюсь для сокращения речи. Я разумею выражение: „ряды *формально* удовлетворяющие“ таким-то уравнениям.

Выражение это имеет весьма условный смысл. Но я счел излишним входить в какие-либо разъяснения его, так как в тех случаях, где мне приходится им пользоваться, относительно значения его не может возникнуть никаких сомнений.

Это сочинение издано Харьковским математическим обществом, благодаря особым средствам, которые нашел возможным доставить ему Харьковский университет, за что и считаю долгом выразить последнему свою признательность.

А. Ляпунов.

Харьков,
5 апреля 1892 г.

Глава I

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

ПОСТАНОВКА ВОПРОСА

1. Рассмотрим какую-либо материальную систему с k степенями свободы.

Пусть

$$q_1, q_2, \dots, q_k$$

суть k независимых переменных, которыми мы условились определять ее положение.

Мы будем предполагать, что за переменные эти взяты такие величины, которые остаются вещественными для всяких действительных положений системы.

Рассматривая названные переменные как функции времени t , первые производные их по t будем обозначать через

$$q'_1, q'_2, \dots, q'_k$$

Во всякой динамической задаче, в которой силы определенным образом заданы, эти функции будут удовлетворять некоторым k дифференциальным уравнениям второго порядка.

Пусть для уравнений этих найдено какое-либо частное решение

$$q_1 = f_1(t), \quad q_2 = f_2(t), \quad \dots, \quad q_k = f_k(t),$$

в котором величины q_j выражаются вещественными функциями t , дающими при всяком t только возможные для них значения ¹.

Этому частному решению будет соответствовать некоторое определенное движение нашей системы. Сравнивая его в известном отношении с другими, возможными для нее при тех же силах, движение это будем называть *невозмущенным*, а все остальные, с которыми оно сравнивается, *возмущенными*.

¹ Может случиться, что для величин q_j по самому их выбору возможны не всякие вещественные значения, а только небольшие или меньшие известных пределов.

Разумея под t_0 некоторый данный момент времени, назовем соответствующие ему значения величин q_j, q'_j в каком-либо движении через q_{j0}, q'_{j0} .

Пусть

$$q_{10} = f_1(t_0) + \varepsilon_1, \quad q_{20} = f_2(t_0) + \varepsilon_2, \quad \dots, \quad q_{k0} = f_k(t_0) + \varepsilon_k, \\ q'_{10} = f'_1(t_0) + \varepsilon'_1, \quad q'_{20} = f'_2(t_0) + \varepsilon'_2, \quad \dots, \quad q'_{k0} = f'_k(t_0) + \varepsilon'_k,$$

где $\varepsilon_j, \varepsilon'_j$ суть некоторые вещественные постоянные.

Заданием этих постоянных, которые будем называть *возмущениями*, определится возмущенное движение. Мы будем предполагать, что им можно приписывать всякие численно достаточно малые значения.

Говоря о возмущенных движениях, *близких* к невозмущенному, будем разумеать движения, для которых возмущения численно достаточно малы.

Пусть $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ суть какие-либо данные непрерывные вещественные функции величин

$$q_1, q_2, \dots, q_k, \quad q'_1, q'_2, \dots, q'_k.$$

Для невозмущенного движения они обратятся в некоторые известные функции t , которые обозначим соответственно через $F_1, F_2, \dots, F_n$. Для возмущенного движения они будут некоторыми функциями величин

$$t, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \quad \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_k.$$

Когда все $\varepsilon_j, \varepsilon'_j$ равны нулю, величины

$$Q_1 - F_1, \quad Q_2 - F_2, \quad \dots, \quad Q_n - F_n$$

будут равными нулю для всякого t . Но если постоянные $\varepsilon_j, \varepsilon'_j$, не будучи нулями, предполагаются все бесконечно малыми, то является вопрос, можно ли назначить такие бесконечно малые пределы для величин $Q_s - F_s$, которых последние никогда не превзошли бы по числовым значениям?

Решение этого вопроса, который составит предмет наших изысканий, зависит как от характера рассматриваемого невозмущенного движения, так и от выбора функций $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ и момента времени t_0 . При определенном выборе последних, ответ на этот вопрос будет следовательно характеризовать в известном отношении невозмущенное движение, определяя собою то свойство последнего, которое будем называть *устойчивостью*, или противоположное ему, которое будем называть *неустойчивостью*.