

Смилга В.

В погоне за красотой

**Занимательное введение в
неевклидову геометрию**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
С50

С50 **Смилга В.**
В погоне за красотой: Занимательное введение в неевклидову геометрию /
Смилга В. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 238 с.

ISBN 978-5-458-36364-8

Истинное начало этой истории теряется во мгле времен апокрифических. Где, как и когда начиналась геометрия... Где, как и когда обрела она законченную форму и заслужила право называться наукой... Кто был тот неведомый, первый, предложивший аксиоматическое ее построение, мы не знаем и, вероятно, не узнаем. Принято думать, что это сделали греки. Но, быть может, прославленные египетские жрецы, а может быть, и не менее прославленные халдейские маги и есть истинные отцы науки. Как бы то ни было, геометрия в VII веке до н. э. приходит в Грецию...

ISBN 978-5-458-36364-8

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

та — распространял, популяризировал, холил и лелеял идею, что его любимый папа — светоносный и лучезарный Аполлон. Он же оказался истинным отцом популярного и ныне обычая — присваивать себе научные результаты своих учеников. Причем дело было поставлено вполне официально. Существовал некий декрет, по которому авторство всех математических работ школы приписывалось Пифагору.

Хотя можно повторить, что подобные вещи не такая уж редкость и в наши дни, но все же 25 столетий несколько смягчили и цивилизовали нравы. Суть осталась неизменной, но форма значительно облагородилась.

Впрочем, наш Пифагор вообще вне конкуренции на этой стезе, ибо он исхитрился устроить так, что верные ученики объявляли его автором работ, выполненных намного позже его кончины. Понятно, что при подобных нравах в пифагорейской школе наиболее безусловным и безоговорочным научным доводом считались ссылки на «самого».

Так и говорили на хорошем греческом языке — «сам сказал». После чего дискуссия была неуместна и несколько опасна.

«Он» же со своими милыми последователями засекречивал методы решения математических задач, а также составил для членов ордена подробный список табу, слегка напоминающий творчество сумасшедшего руководителя детского сада.

Опасаясь предстать голословным, я процитирую часть правил хорошего тона для джентльменов из Пифагорейского клуба.

- «1. Воздерживайся от употребления в пищу бобов.
2. Не поднимай то, что упало.
3. Не прикасайся к белому петуху.
4. Не откусывай от целой булки.
5. Не ходи по большой дороге.
6. Вынимая горшок из огня, не оставляя следа его на золе, не помешай золу».

И далее... в том же духе.

И это-то сборище время от времени захватывало власть то в одном, то в другом греческом городе, устанавливая там культ Пифагора и соответственно требуя выполнения своего устава. Впрочем, как меланхолично замечает Бертран Рассел, «те, которые не были возрождены новой верой, жаждали бобов и рано или поздно восставали».

И наконец, говорят, он читал проповеди скотам, поскольку мало различал их и людей.

Впрочем, как геометрию, так и вообще математику пифагорейская школа весьма и весьма продвинула вперед. Все это вместе взятое — неплохая иллюстрация опасности идеализации представителей точных наук и интеллекта.

Впрочем, это нам Пифагор представляется в основном математиком.

Он же сам, как и его современники, впрочем, полагали, что истинная его профессия — пророк.

Им, пожалуй, было видней, а, как известно, каждый пророк обязан отчасти быть фокусником, отчасти демагогом, отчасти шарлатаном.

Всем этим Пифагор, видимо, владел в полном ассортименте. А ученики старались по мере сил. Рассказывали, что у него было золотое бедро; рассказывали, что достойные доверия люди видели его одновременно в двух разных местах; рассказывали также, что когда он однажды переходил вброд реку, последняя от восторга вышла из берегов, с радостью восклицая: «Да здравствует Пифагор!»

На мой взгляд, речной бог выбрал не лучший способ прославления, ибо в первую очередь Пифагор должен был изрядно вымокнуть, но так рассказывали ученики.

Впрочем, среди греков было достаточное количество разумных людей.

Много бродивший по свету, довольно реалистичный, свободомыслящий и порядком ехидный философ и писатель Ксенофан писал о Пифагоре в несколько другом стиле. Одна из его эпиграмм такова.

Однажды, когда Пифагор увидел, как бьют собаку, он закричал: «Перестань, я по ее голосу узнал душу моего друга!»

Учение о переселении душ — один из основных элементов всей концепции Пифагора, и Ксенофан, как видите, не без яда прошелся по этому поводу.

Гераклит же определил Пифагора совсем сурово — «многознание без разума».

Расстанемся с Пифагором, процитировав на прощание забавнейшее место из его жизнеописания, составленного почтительным поклонником.

Вот, оказывается, какими извилистыми путями распространяется иногда наука.

Естественно, геометрия, как и остальные науки, тщательно скрывалась пифагорейцами от прочего народа. И кто знает, может быть, до наших дней геометрия осталась бы неизвестной всему человечеству (кроме пифагорейцев), если бы... Обратимся к легенде.

Вот как пифагорейцы объясняют, почему геометрия стала открыто распространяться. Это произошло по вине одного из них, который потерял деньги общины. После этого несчастья община позволила зарабатывать ему деньги, преподавая геометрию, и геометрия получила название «предание Пифагора».

Любопытно то, что, судя по всему, существовал учебник геометрии с таким названием.

Что же касается самой истории, то, если в ней есть зерно истины, я, хотя и не считаю себя злорадным человеком, был бы счастлив узнать, что растяпа пифагореец отнюдь не потерял деньги, а успешно прокутил их в ближайшем портовом кабачке, потягивая вино, наслаждаясь похлебкой из белого петуха с бобовой приправой, с удовольствием кусая от целой булки и распевая затем негармоничные песни на большой дороге.

Следующим великие заслуги перед геометрией имеет еще один малопрятный на мой вкус человек.

Это Платон (428—348 годы до н. э.).

Надо сказать, что и по своим взглядам, и по методам организации школы, и по любви к саморекламе Платон очень напоминает Пифагора. Но прежде чем объяснить свою нелюбовь к нему, я хочу сказать, в чем действительно заключался его существеннейший вклад в геометрию.

Он считается, и, возможно, справедливо, — я не специалист — одним из величайших философов Греции. Он действительно очень много сделал для развития математики и весьма ценил ее. На входе в его академию был даже высечен весьма категорический лозунг: «Да не войдет сюда тот, кто не знает геометрии!» Дело в том, что Платон полагал: «Изучение математики приближает к бессмертным богам» — и воспитывал в этом духе своих учеников, приплетая математику к месту и не к месту. Некоторые из них выросли в блестящих геометров. Учеников у Платона было множество, и они,

естественно, распространили множество рассказов, восхвалявших учителя.

По-видимому, Платон первым четко потребовал: математика вообще, и геометрия в частности, должна быть построена дедуктивным образом. Иначе говоря, все утверждения (теоремы) должны строго логически выводиться из небольшого числа основных положений — аксиом.

Такая постановка — крупнейший шаг вперед.

Ко времени Платона геометрия уже была очень развита.

Было решено много весьма и весьма сложных задач, доказаны сложнейшие теоремы. Но ясной позиции в смысле общей схемы построения как будто не было. Как это очень часто бывает в науке, развитие геометрии очень стимулировалось тремя задачами, решение которых никак не удавалось отыскать.

Поскольку мы уж несколько углубились в историю, я приведу эти задачи.

Требовалось: при помощи циркуля и линейки, не привлекая никаких других геометрических инструментов...

1. Разделить данный угол на три равные части (трисекция угла).

2. Построить квадрат с площадью, равной площади данного круга (квадратура круга).

3. Построить куб с объемом, в два раза большим объема данного куба («Дельфийская задача»).

Только на исходе XIX века было доказано, что в такой постановке ни одна из задач не может быть решена, хотя все три задачи легко решаются, если использовать другие геометрические инструменты. Или, иначе, использовать при построении геометрические места точек, отличные от прямой, либо дуги окружности.

Однако правила игры у греков не позволяли при решении пользоваться чем-либо еще, кроме циркуля и линейки.

Платон даже обосновал это требование некоей ссылкой на авторитет богов.

Потому ни одна из проблем решена не была, но попутно, по ходу дела геометрия была весьма разработана. Я с великим сожалением опускаю все анекдоты, связанные с этими задачами. Историй много, и они прелестны, но нельзя слишком отвлекаться.

Вспомним лишь одно из преданий, чтобы продемонстри-

ровать объективность в отношении Платона. В одном из вариантов этой истории он выступает довольно разумным человеком.

Однажды, рассказывает Эратосфен, на острове Делосе вспыхнула эпидемия чумы. Жители острова, естественно, обратились к Дельфийскому оракулу, который повелел удвоить объем золотого кубического жертвенника Аполлону, не изменяя его формы. За советом обратились тогда к Платону.

Платон задачи не решил, но зато истолковал оракула в том смысле, что боги гnevаются на греков за нескончаемые междоусобные войны и желают, чтобы они, греки, вместо кровавых побоищ занимались бы науками и особенно геометрией.

Тогда чума исчезнет.

Но предания преданиями, а как философ и человек Платон крайне несимпатичен. Мало того, что он был защитник самого отчаянного идеализма и по всякому поводу апеллировал к богам.

Он еще создал некую теорию государства, взяв за образец имевшуюся под боком вполне фашистскую страну — Спарту. И основные положения его утопии вполне удовлетворяют требованиям нацистов.

Всю свою жизнь он яростно боролся против демократии в политической жизни и против материализма в духовной.

Философов-материалистов он не только абстрактно поносил в своих философских сочинениях, но, демонстрируя неплохую практическую хватку, нередко дискутировал в проверенном веками жанре политического доноса.

Кроме того, он, как рассказывают, скупал сочинения своего самого ярого врага Демокрита, с тем чтобы уничтожить их.

О Демокрите необходимо сказать особо.

Если считать, что истоки нашей современной физики надо искать у греков (а вероятно, так оно и есть), то срок набирается довольно основательный — без малого два тысячелетия. От Аристотеля до Ньютона. Четыре первичные стихии Аристотеля: воздух, вода, земля и огонь — одна из первых попыток определить понятие «элементарные частицы» в физике.

Правда, у греков физика еще не физика в четком смысле слова.

В основе не эксперимент, а умозрительные рассуждения, но сейчас это не очень существенно для нас.

Пожалуй, именно почти полное отсутствие эксперимента оттеняет совершенно поразительную догадку лукавого философа Демокрита из Абдеры.

Примерно за полстолетия до Аристотеля он предположил, что все вещества состоят из мельчайших неделимых частиц — атомов и различные их свойства определяются различным качеством этих самых атомов.

В данном же веществе все атомы тождественны и лишены индивидуальности.

Эти воззрения по духу своему столь близки к современным, что один из основателей квантовой механики, Эрвин Шредингер, в своих лекциях с удовольствием поражал слушателей изящным парадоксом: «Первым квантовым физиком был не Макс Планк, а Демокрит из Абдеры».

Сам Демокрит, вероятно, был бы изумлен более всех, услышав столь лестную характеристику, но, впрочем, надо согласиться, что и Шредингер имеет некоторые права рассуждать о квантовой теории.

Судьба воззрений Демокрита замечательна еще по меньшей мере двумя фактами. Во-первых, ни одной его работы не дошло до нас. То ли действительно преуспел Платон со своими милыми методами научной дискуссии, то ли просто растерялись его книги в веках, но, к сожалению, об идеях одного из первых материалистов мира мы можем судить лишь по отрывкам и по позднейшим пересказам.

Во-вторых (а популяризаторы науки, безусловно, не могут забыть об этом), первый известный нам научно-популярный трактат посвящен пропаганде его идей.

Мало того, в этой книге установлен непревзойденный до сих пор мировой рекорд, ибо это длиннейшая поэма. Я разумею, конечно, поэму «О природе вещей» Тита Лукреция Кара, написанную лет через триста с лишним после смерти Демокрита, две тысячи лет тому назад.

Впрочем, Демокриту еще сравнительно повезло, ибо следы многих других ученых (особенно материалистов) вообще бесследно затеряны. Например, до сих пор есть некоторые сомнения: существовал ли учитель Демокрита Левкипп. А уж в какой мере Левкипп соавтор (или автор) идей атомизма — совершенная загадка.

А по некоей версии вообще оказывается, что свое учение Демокрит заимствовал у неких халдейских магов, подаренных с барского плеча его отцу персидским царем Ксерксом.

И если позволены философские моралите, стоит заметить, что в науке всегда идеи несравненно долговечней, чем память об их авторах. Впрочем, подавляющее большинство ученых любого профиля в состоянии усвоить все, что угодно, кроме этой не слишком уж неожиданной мысли.

Однако кто бы ни был основателем атомистического течения — следует ли истоки квантовой механики искать у Демокрита или же у халдеев, — взгляды этой школы были примерно таковы.

Мир состоит из атомов и пустоты. Атомы едины и неделимы. Они просты и качественно неизменны. Атомы не поддаются никаким воздействиям, не возникают и не уничтожаются. Между атомами существуют первоначальные отличия, которые и определяют различные свойства всех вещей.

То, что мы сегодня понимаем под элементарными частицами, — объекты, мало похожие по своим свойствам на атомы Демокрита.

Они возникают и гибнут, они превращаются одна в другую, на них легко воздействовать — короче, надо признать, что в понятии элементарной частицы греки были несравненно логичней, чем физики XX века.

Есть авторитетное свидетельство самого Архимеда, позволяющее думать, что Демокрит был великолепным геометром. Как будто именно он вычислил объем конуса и пирамиды. Это блестящий результат, но подробности, увы, почти неизвестны. Тем не менее среди предтеч интегрального исчисления первым, видимо, надо считать Демокрита.

Дело еще в том, что едва ли не основной наш источник — книга Прокла Диадоха. А поскольку Прокл был последователь Платона, всех его научных противников он либо вообще не упоминает, либо очень скупое цедит отрывочные сведения.

Естественно, Демокрит, как враг № 1, был изгнан из истории в первую очередь.

Точно так же мы почти ничего не узнали о геометрических работах замечательного философа, одного из первых материалистов, Анаксагора. Известно лишь, что в темнице, где ему пришлось-таки сидеть за свои взгляды, он исследо-

вал проблему квадратуры круга. А философские идеи его стоит помянуть добрым словом.

Впрочем, лучше всех это сделает Платон. В одном из его сочинений в диалоге жителя Афин (рупор самого Платона) и спартанца так расправляется он с Анаксагором.

Афинянин: «Когда мы, стремясь получить доказательств существования богов, ссылаемся на Солнце, Луну, звезды и Землю как на божественные существа, то ученики этих новых мудрецов возражают нам, что все это ведь только земля и камни и они (то есть камни) совершенно не в состоянии заботиться о людских делах».

Как видите, Анаксагор и его ученики просто порождение мрачного Тартара.

Спартанец молниеносно распознает ересь и возмущенно восклицает: «Какой же вред для семьи и государства происходит от таких настроений у молодежи!»

Вот так и дискутировал Платон.

Я бы очень хотел, чтобы открылось, что его заслуги в развитии геометрии сильно раздуты.

Но на сей день надо признать: школа его дала ряд блестящих математиков, а первое упоминание об аксиоматическом методе мы находим у него.

В общем уже в IV—III веках до н. э. геометрия — вполне оформившаяся наука.

Есть традиции, есть детально разработанные методы решения задач, есть крупные достижения, есть уже несколько учебников, есть научные школы.

Рассказывать обо всех геометрах доевклидового периода и об их работах, естественно, невозможно.

Для солидности я приведу список крупнейших математиков доевклидовых времен с единственной целью — продемонстрировать, сколь внушителен этот реестр.

Фалес Милетский, Анаксимандр, Америкс, Мандриат, Эонипид, Анаксимед, Демокрит, Анаксагор, Пифагор, Гипсий, Архит, Гиппократ Хиосский (не путать с врачом), Антифон, Платон, Теэтет, Евдокс Книдский (оба последних — крупнейшие фигуры. Пожалуй, особенно Евдокс (400—337 г. до н. э.). По совместительству он был еще астроном, врач, оратор, философ, географ).

Менехт, Леодат, Дейнострат, Аристай, Евдем, Теофраст, Леон, Тевдий... и еще десятка два имен.

А также Аристотель.

Аристотель, бесспорно, один из величайших ученых в истории человечества.

Правда, существуют некие подозрения, что в итоге вред, принесенный его трудами, чуть ли не перевешивает пользу. Сам Аристотель тут ни при чем, но в средние века, выхолощенные, очищенные от всего, что могло пробуждать научную мысль, работы его были, пожалуй, основным оружием реакции.

Но это, как и вообще какая-либо оценка его трудов, — история особая. Единственно, что нужно здесь сказать, — геометрией он интересовался очень. Причем особое внимание уделял теории параллельных.

Более того, в этой области ему принадлежат два весьма важных утверждения. Правда, в его работах, дошедших до нас, их нет, но зато все позднейшие математики в один голос приписывают эти утверждения Аристотелю.

Забегая вперед, заметим, что самые остроумные доказательства пятого постулата Евклида основаны как раз на «принципе» Аристотеля. Что именно говорил Аристотель о свойствах параллельных, мы скажем позже.

А сейчас...



ГЛАВА 2

ЕВКЛИД

Забудем о предтечах и начнем счет с Евклида.

Жил и работал он во время весьма любопытное.

В 323 году до н. э. то ли вследствие острой лихорадки, в результате ли неумеренного пьянства, или просто от доброй порции яда отправился на свидание к отцу своему Зевсу царь царей земных, изрядно уже потрепанный, хотя сравнительно молодой, тридцатитрехлетний мужчина — Александр Македонский.

Полубога не успели даже подобающим образом проводить, как перешли к очередным делам.

Надо было делить империю. А она была невероятна. Всего лишь за десять лет были завоеваны страны, в сотни раз превосходящие маленькую полунищую Македонию.

Как и почему могло все случиться, нас сейчас не очень волнует. Причин на то было много. Одна из них, как известно, та, что Александр Македонский был герой.

Так или иначе, но мир за десять лет стал другим. Видимые границы его расширились в четыре раза, а теперь предстояло переварить то, что было проглочено. Было ясно, что для одного — наследство непомерно. И отдавать все