

Е. Пржевальский

**Собрание геометрических
теорем и задач**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Е11

Е11 **Е. Пржевальский**
Собрание геометрических теорем и задач / Е. Пржевальский – М.: Книга
по Требованию, 2019. – 448 с.

ISBN 978-5-458-27234-6

Состоит из восьми отделов и содержит в себе 3100 теоремы и задачи из планиметрии и стереометрии, расположенных по отделам так же, как и в предыдущих изданиях; в нем число задач значительно увеличено, и при этом некоторые из прежних задач исключены или перенесены в другое место.

ISBN 978-5-458-27234-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2019

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2019

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



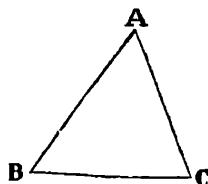
Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ОБОЗНАЧЕНІЯ.

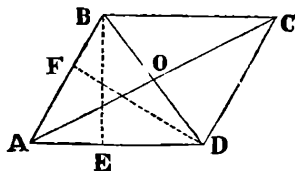
Въ треугольникѣ ABC означаемъ углы буквами A, B и C ; стороны, имъ противолежащія, буквами a, b и c ; высоты, опущенныя изъ вершинъ A, B и C , чрезъ h_a, h_b, h_c ; прямая, соединяющія вершины A, B и C съ серединами противоположныхъ сторонъ, т.-е. *медианы*, чрезъ m_a, m_b и m_c ; отрезки равнодѣлящихъ угловъ A, B и C , заключенныхъ между вершинами угловъ и противоположными сторонами, чрезъ l_a, l_b и l_c ; периметръ треугольника чрезъ $2p$; радиусъ описаннаго круга около треугольника буквою R ; радиусъ вписаннаго круга въ треугольникъ буквою r и радиусы вѣтвписанныхъ въ него круговъ, касающихся сторонъ a, b и c , чрезъ r_a, r_b и r_c .

Фиг. 1.



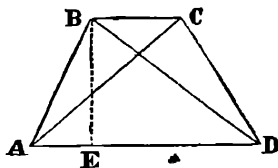
Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC буква A при вершинѣ прямого угла; слѣдовательно a будетъ гипотенузою, а b и c катетами. Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC сторона BC или a будетъ основаніемъ треугольника.

Фиг. 2.



Въ параллелограммѣ $ABCD$ неравныя его стороны AB и AD означаемъ буквами a и b ; высоты, перпендикулярныя къ этимъ сторонамъ, чрезъ h_a и h_b ; діагонали AC и BD — буквами k и l .

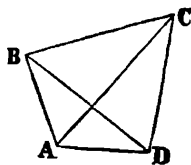
Фиг. 3.



Въ трапеціи $ABCD$, гдѣ сторона $BC \parallel AD$, означаемъ стороны: AB, BC, CD и DA буквами: a, b, c и d ; діагонали AC и BD буквами: k и l , а высоту буквою h .

Въ четырехугольникѣ $ABCD$ (фиг. 4) означаемъ стороны: AB, BC, CD и DA буквами: a, b, c и d ; діагонали AC и BD буквами: k и l .

Фиг. 4.



Уголъ между прямыми AB и CD или между a и b означаемъ чрезъ (AB, CD) или (a, b) .

Въ рѣшеніяхъ задачъ слова: дуга, треугольникъ, прямоугольный треугольникъ, квадратъ, прямоугольникъ, параллелограммъ и четырехугольникъ замѣнены знаками: $\frown$, $\triangle$, $\triangle$, $\square$, $\square$, $\square$ и $\diamond$. Также площадь треугольника и площадь четырехугольника замѣнены знаками: $\triangle$ и $\diamond$.



ОГЛАВЛЕНІЕ.

ПЛАНИМЕТРІЯ.

	<i>Стран.</i>
ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ. Теоремы и задачи на прямую, углы, треугольники, перпендикуляры и наклонныя, параллельныя прямыя и многоугольники.	
А. Теоремы (1—144)	1
В. Задачи на построеніе (145—440)	13
С. Задачи на вычисленіе (441—495)	26
ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ. Теоремы и задачи на дуги, хорды, касательныя и сѣкущія; касаніе и пересѣченіе окружностей; на вписанныя и описанныя многоугольники.	
А. Теоремы (1—186)	30
В. Задачи на построеніе (187—510)	50
С. Задачи на вычисленіе (511—540)	70
ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ. Теоремы и задачи на пропорціональность прямыхъ, подобіе треугольниковъ и многоугольниковъ и пропорціональность линій въ кругѣ.	
А. Теоремы (1—241)	72
В. Задачи на построеніе (242—514)	97
С. Задачи на вычисленіе (515—640)	116
ОТДѢЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ. Теоремы и задачи на правильные многоугольники и окружность круга.	
А. Теоремы (1—39)	126
В. Задачи на построеніе (40—71)	130
С. Задачи на вычисленіе (72—170)	131
ОТДѢЛЪ ПЯТЫЙ. Теоремы и задачи на площади прямолинейныхъ фигуръ, круга и частей круга.	
А. Теоремы (1—139)	135
В. Задачи на построеніе (140—308)	149
С. Задачи на вычисленіе (309—524)	159

СТЕРЕОМЕТРІЯ.

ОТДѢЛЪ ШЕСТОЙ. Теоремы и задачи на прямыя и плоскости въ пространствѣ; углы, образуемые прямыми и плоскостями.	
А. Теоремы (1—36)	174
В. Задачи на построеніе (37—98)	178
С. Задачи на вычисленіе (99—105)	182
ОТДѢЛЪ СЕДЬМОЙ. Теоремы и задачи на многогранники.	
А. Теоремы (1—38)	182
В. Задачи на построеніе (39—68)	186
С. Задачи на вычисленіе (69—240)	188
ОТДѢЛЪ ВОСЬМОЙ. Теоремы и задачи на круглыя тѣла и сферическіе треугольники.	
А. Теоремы (1—30)	198
В. Задачи на построеніе (31—153)	200
С. Задачи на вычисленіе (154—385)	207
Отвѣты на предложенныя теоремы и задачи	222



ПЛАНИМЕТРІЯ.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

Теоремы и задачи на прямую, углы, треугольники, перпендикуляры и наклонныя, параллельныя прямая и многоугольники.

А. Теоремы.

1. На прямой AB даны точки: C , D и E такъ, что $AD=BD$ и $AC=BE$. Показать, что $CD=DE$ и $AE=BC$.

2. На прямой AB даны точки: C , D и E такъ, что $AD=BD$ и $AE=BC$. Показать, что $CD=DE$ и $AC=BE$.

3. Дана опредѣленная прямая AB и O , середина ея. Показать: 1) что разстояніе отъ O до какой-нибудь точки M , взятой на AB , равно полуразности разстояній точки M до концовъ A и B этой прямой и 2) что разстояніе отъ O до какой-нибудь точки M , взятой на продолженіи AB , равно полусуммѣ разстояній M до концовъ A и B прямой AB .

4. На прямой AB , середина которой C , взята точка D . Если E середина прямой AD , то $BD=2CE$.

5. Данъ уголъ AOB , его равнодѣлящая OC и еще прямая OM . Показать, что уголъ SOM равенъ полуразности угловъ AOM и BOM , когда прямая OM лежитъ внутри угла AOB , и равенъ полусуммѣ угловъ AOM и BOM , когда прямая OM лежитъ внѣ угла AOB .

6. Если по одну сторону прямой имѣемъ три равныхъ угла, то равнодѣлящая средняго угла будетъ перпендикулярна къ данной прямой.

7. Показать, что равнодѣлящія двухъ смежныхъ угловъ по одну сторону прямой перпендикулярны.

8. Даны четыре прямая: OA , OB , OC и OD , исходящая из точки O . Если углы AOD и BOC равны между собою, а углы AOB и COD —между собою, то OA и OC составляют одну прямую, равно какъ OB и OD .

Доказать равенство треугольниковъ, когда въ нихъ даны соответственно равными (9—15):

9. Высота и два угла, образуемые ею съ прилежащими сторонами.

10. Два угла и высота, проведенная изъ вершины одного изъ нихъ.

11. Сторона, прямая, соединяющая середину этой стороны съ противоположною вершиною, и уголъ между этими прямыми.

12. Сторона, высота, къ ней перпендикулярная, и прямая, соединяющая середину этой стороны съ противоположною вершиною.

13. Сторона и двѣ высоты, опущенныя на остальные стороны.

14. Двѣ стороны и прямая, соединяющая середину одной изъ нихъ съ противоположною вершиною.

15. Двѣ стороны и прямая, соединяющая середину третьей стороны съ противоположною вершиною.

Показать (16—18):

16. Каждая изъ сторонъ треугольника менѣе полупериметра.

17. Высота треугольника менѣе полусуммы сторонъ прилежащихъ къ ней.

18. Сумма высотъ треугольника менѣе его периметра.

19. Показать, что разстоянія концовъ основанія равнобедреннаго треугольника до противоположныхъ сторонъ равны.

20. Показать, что высоты равносторонняго треугольника равны.

21. Если равнодѣлящая угла треугольника раздѣляетъ пополамъ противоположную ему сторону, то этотъ треугольникъ будетъ равнобедренный.

22. Дана точка O внутри треугольника ABC . Показать, что уголъ BOC болѣе угла BAC .

23. Если точка D лежитъ на основаніи BC равнобедреннаго треугольника ABC , то AD менѣе каждой изъ равныхъ сторонъ.

24. Если точка D лежитъ на продолженіи основанія BC равнобедреннаго треугольника ABC , то AD болѣе каждой изъ равныхъ сторонъ.

25. Если точка D на сторонѣ BC треугольника ABC , то большая изъ сторонъ AB и AC болѣе AD .

26. Если два треугольника имѣютъ общее основаніе и равные углы при вершинѣ, то вершина каждаго изъ треугольниковъ лежитъ внѣ другого.

27. Пусть D означаетъ середину основанія BC равнобедреннаго треугольника ABC и M какую-нибудь точку на AC . Доказать, что разность между DB и DM менѣе разности между AB и AM .

28. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC , гдѣ уголъ A прямой, возьмемъ на AB какую-нибудь точку D и соединимъ ее съ C ; потомъ на DC отложимъ $DE=AC$ и CE раздѣлимъ пополамъ въ точкѣ F . Показать, что $DF+BF>AC+BC$.

29. Если на сторонахъ AB и AC треугольника ABC , въ которомъ $AC>AB$, возьмемъ точки D и E такъ, чтобы $BD=CE$, то $CD>BE$.

30. Если на продолженіяхъ сторонъ AB и AC треугольника ABC , въ которомъ $AC>AB$, возьмемъ точки D и E такъ, чтобы $BD=CE$, то $CD<BE$.

31. Если на сторонѣ AB и продолженіи стороны AC треугольника ABC , въ которомъ $AC>AB$, возьмемъ точки D и E такъ, чтобы $BD=CE$, то $CD<BE$.

32. Въ равностороннемъ треугольникѣ, прямая, соединяющія вершины треугольника съ серединами противоположныхъ сторонъ, равны между собою и равны также высотѣ этого треугольника.

33. Если чрезъ концы основанія равнобедреннаго треугольника проведемъ, по одну его сторону, двѣ прямыя подъ равными углами къ основанію, то точка пересѣченія этихъ прямыхъ равно отстоитъ отъ двухъ другихъ боковъ треугольника.

34. Если изъ концовъ основанія равнобедреннаго треугольника возставимъ перпендикуляры къ равнымъ сторонамъ его, то прямая, соединяющая точку пересѣченія перпендикуляровъ съ вершиною треугольника, будетъ равнодѣлящею угла при вершинѣ.

35. Если въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC уголъ при основаніи BC вдвое болѣе угла при вершинѣ, то равнодѣлящая угла B пересѣкаетъ сторону AC въ точкѣ D такъ, что $AD=BC$.

36. Если проведемъ равнодѣлящую внѣшняго угла A въ треугольникѣ ABC , то она пересѣчетъ продолженіе BC въ сторону B или въ сторону C , смотря потому AC болѣе или менѣе AB .

37. Если уголъ C въ треугольникѣ ABC равенъ суммѣ двухъ другихъ его угловъ, то сторона AB равна удвоенной прямой, соединяющей середину AB съ C .

38. Дана точка O внутри треугольника ABC . Показать, что $AB + AC > OB + OC$.

39. Середина прямой, заключенной между параллельными прямыми, будет серединою прямых, проходящих через эту точку и заключенных между теми же параллельными линиями.

40. Если в треугольник ABC , где D середина бока AB , проведем прямую, параллельно BC , то эта прямая пройдет через E , середину AC , и хорда DE будет равна половине BC .

41. Прямая, соединяющая середины двух каких-либо сторон треугольника, будет параллельна третьему боку и равна половине его.

42. В треугольник ABC соединим B с E серединою стороны AC и прямую BE разделим пополам в точке G ; проведем прямую AG , кот. пересечет сторону BC в точке D . Показать, что $BD = \frac{1}{2}BC$.

43. Равные прямые AB и CD , заключенные между параллельными прямыми AC и DB , пересекаются в точке O . Показать, что $AO = CO$ и $BO = DO$.

44. Показать, что периметр треугольника больше суммы прямых, соединяющих какую-либо точку внутри треугольника с его вершинами, и меньше удвоенной этой суммы.

45. Показать, что прямая, соединяющая вершину треугольника с серединою противоположной стороны, меньше полусуммы сторон треугольника, исходящих с нею из одной вершины, и больше полуразности между суммою этих сторон и третьей стороной.

46. Показать, что периметр треугольника всегда больше суммы прямых, соединяющих вершины треугольника с серединами противоположных сторон, и меньше удвоенной этой суммы.

47. Если из вершин треугольника ABC проведем прямые AOD , BOE и COF чрез точку O , находящуюся внутри треугольника, до пересечения с противоположными сторонами в D , E и F , то периметр треугольника больше $\frac{2}{3}(AD + BE + CF)$.

48. Через вершину A треугольника ABC проведем прямую XU , перпендикулярно к равнодѣлящей угла A . Показать, что если на прямой XU возьмем какую-либо точку M и соединим ее с точками B и C , то периметр треугольника BMC будет больше периметра треугольника ABC .

49. В треугольник ABC отложим на стороне AB (которую

продолжимъ, если будетъ нужно) часть AC' , равную AC , а на сторонѣ AC часть AB' , равную AB ; проведемъ прямую $B'C'$, которая пересѣчетъ BC въ точкѣ D . Показать, что AD будетъ равнодѣлящею угла A .

50. Даны двѣ произвольныя прямыя MN и KL ; если на одной изъ нихъ отложимъ послѣдовательно нѣсколько равныхъ частей и чрезъ точки дѣленій проведемъ параллельныя прямыя, пересѣкающія другую данную прямую, то онѣ отсѣкутъ на ней столько же равныхъ частей.

51. Уголъ, составленный равнодѣлящими внутренняго угла и внѣшняго угла, съ нимъ не смежнаго, при какой-либо изъ сторонъ треугольника, равенъ половинѣ угла, противолежащаго этой сторонѣ.

52. Уголъ, составленный равнодѣлящими внѣшнихъ угловъ при какой-либо изъ сторонъ треугольника, равенъ полусуммѣ угловъ треугольника, прилежащихъ къ этой сторонѣ.

53. Въ треугольникѣ ABC изъ точки D , взятой на AB , проведемъ прямую, пересѣкающую BC въ E и продолженіе AC въ F . Показать, что уголъ между равнодѣлящими угловъ ABE и ADE равенъ углу между равнодѣлящими угловъ ACE и AFE .

54. Равнодѣлящая угла треугольника, въ которомъ стороны не равны, раздѣляетъ противоположную сторону на двѣ неравныя части. Показать, что большая изъ нихъ прилежитъ къ большей сторонѣ.

55. Равнодѣлящія угловъ треугольника встрѣчаются въ одной точкѣ, и точка встрѣчи ихъ отстоитъ одинаково отъ сторонъ треугольника.

56. Равнодѣлящая угла даннаго треугольника и равнодѣлящія внѣшнихъ угловъ, соответствующихъ другимъ угламъ треугольника, встрѣчаются въ одной точкѣ и точка встрѣчи равно отстоитъ отъ сторонъ треугольника.

57. Перпендикуляры, возставленные изъ серединъ сторонъ треугольника, встрѣчаются въ одной точкѣ.

58. Изъ точки A , взятой внѣ прямой XY , опустимъ перпендикуляръ AB на XY и изъ той же точки проведемъ, по одну сторону AB , наклонныя: AC , AD и AE такъ, чтобы углы: BAC , CAD и DAE были равны. Показать, что $BC < CD < DE$.

59. Дана прямая XY и точка A внѣ ея; опустимъ перпендикуляръ AB на XY и проведемъ наклонныя: AC , AD , AE , ..., увеличивая ихъ на одну и ту же длину. Показать, что $BC > CD > DE > \dots$

60. Показать, что равнодѣлящія двухъ угловъ въ равностороннемъ треугольникѣ составляютъ уголъ, вдвое большій угла при вершинѣ.

61. Двойной внѣшній уголъ при основаніи равнобедреннаго треугольника болѣе на два прямыхъ угла при вершинѣ.

62. Если черезъ вершины треугольника проведемъ прямыя, параллельно противоположнымъ его сторонамъ, то въ пересѣченіи этихъ прямыхъ получимъ такой, треугольникъ, котораго стороны будутъ вдвое болѣе сторонъ даннаго; вершины же даннаго треугольника будутъ серединами сторонъ построеннаго.

63. Высоты треугольника встрѣчаются въ одной точкѣ.

64. Если изъ точки, взятой на гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, опустимъ перпендикуляры на катеты, то отъ даннаго треугольника отдѣлимъ два новые прямоугольные треугольника, у которыхъ сумма периметровъ равна периметру даннаго треугольника. Что будетъ, если точку возьмемъ на продолженіи гипотенузы?

65. Сумма разстояній отъ какой-нибудь точки M , взятой на основаніи BC равнобедреннаго треугольника ABC , до другихъ его сторонъ постоянна и равна перпендикуляру, опущенному изъ конца основанія на противоположную сторону. Что будетъ, когда возьмемъ точку на продолженіи основанія?

66. Сумма разстояній отъ какой-нибудь точки M , взятой внутри равносторонняго треугольника ABC , до его сторонъ постоянна. Что будетъ, когда возьмемъ точку внѣ треугольника?

67. Изъ концовъ A и B прямой AB и C середины ея проведемъ параллельныя прямыя до пересѣченія съ другою прямою XU въ точкахъ D , E , F . Показать, что прямая CF равна полусуммѣ или полуразности AD и BE , смотря по тому, точки A и B лежатъ по одну сторону или по разнымъ сторонамъ прямой XU .

68. Если въ двухъ равноугольныхъ треугольникахъ одна изъ сторонъ перваго треугольника въ n разъ болѣе соотвѣтствующей (лежащей противъ равнаго угла) стороны втораго, то и остальные стороны перваго треугольника также въ n разъ болѣе соотвѣтствующихъ сторонъ втораго.

69. Черезъ вершину A треугольника ABC проведемъ прямую XU и опустимъ на нее перпендикуляры BD и CE . Показать, что середина стороны BC равно отстоитъ отъ точекъ D и E .

70. Равнодѣлящія внѣшнихъ угловъ треугольника образуютъ

въ пересѣченіи три треугольника, прилегающихъ къ данному, и одинъ, описанный около него. Показать, что эти треугольники имѣютъ углы соотвѣтственно равные, и каждый уголъ даннаго треугольника будетъ дополнительнымъ до двухъ прямыхъ удвоенному противолежащему углу описаннаго треугольника.

71. Въ треугольникѣ ABC точки D и E взяты на AC такъ, что $AD=AB$ и $CE=CB$, и точка F на BA такъ, что $BF=BC$. Показать, что $\angle EBD=\angle BCF$.

72. Если въ двухъ треугольникахъ ABC и $A'B'C'$: $\angle A+\angle A'=d$ и $\angle B+\angle B'=d$, то $\angle C=\angle A'+\angle B'$ и $\angle C'=\angle A+\angle B$.

73. Если въ двухъ треугольникахъ ABC и $A'B'C'$: $\angle A=\angle A'$ и $\angle B+\angle B'=2d$, то $\angle C=\angle B'-\angle A'$ и $\angle C'=\angle B-\angle A$.

74. Если въ двухъ треугольникахъ ABC и $A'B'C'$: $\angle A=A'$ и $\angle B+\angle B'=d$, то $\angle C=d-(\angle A'-\angle B')$ и $\angle C'=d-(\angle A-\angle B)$.

75. Если въ треугольникѣ ABC раздѣлимъ пополамъ одинъ изъ угловъ при основаніи BC , напр. уголъ B , и изъ точки D пересѣченія равнодѣлящей съ противоположнымъ бокомъ проведемъ прямую, параллельно AB , до пересѣченія съ основаніемъ въ точкѣ E , то въ полученномъ треугольникѣ CDE сумма сторонъ DE и CE равна основанію даннаго треугольника.

76. Въ треугольникѣ ABC раздѣлимъ пополамъ углы при основаніи BC и черезъ точку O пересѣченія равнодѣлящихъ проведемъ прямую, параллельно AB и AC , до встрѣчи съ основаніемъ въ точкахъ D и E . Показать, что периметръ полученнаго треугольника DOE равенъ основанію даннаго треугольника.

77. Если въ треугольникѣ ABC черезъ точку O , пересѣченія равнодѣлящихъ угловъ B и C , проведемъ прямую DOE между боками угла A , параллельно BC , то DE будетъ равна суммѣ BD и CE . Если же черезъ точку O' , пересѣченія равнодѣлящей угла B съ равнодѣлящей дополнительнаго угла къ углу C , проведемъ прямую $O'E'D'$, параллельно BC , между боками угла A или боками угла, противоположнаго ему, то $D'E'$ будетъ равна разности прямыхъ BD' и CE' .

78. Прямая, соединяющія вершины треугольника съ серединами противоположныхъ сторонъ, встрѣчаются въ одной точкѣ; точка ихъ встрѣчи лежитъ на одной трети каждой изъ этихъ прямыхъ, считая отъ середины соотвѣтствующаго бока треугольника.

79. Во всякомъ треугольникѣ. большому боку соотвѣтствуетъ

меньшая изъ прямыхъ, соединяющихъ вершины треугольника съ серединами противоположныхъ сторонъ.

80. Въ прямоугольномъ треугольникѣ, въ которомъ одинъ изъ острыхъ угловъ вдвое болѣе другого, гипотенуза вдвое болѣе меньшаго изъ катетовъ, и обратно.

81. Въ прямоугольномъ треугольникѣ прямая, соединяющая середину гипотенузы съ вершиною прямого угла, равна половинѣ гипотенузы.

82. Уголъ треугольника будетъ прямой, острый или тупой, смотря по тому, будетъ ли прямая, соединяющая его вершину съ серединою противоположной стороны, равна, болѣе или менѣе половины этой стороны.

83. Пусть A вершина равнобедреннаго треугольника ABC . Отложивъ на продолженіи BA часть $AD=AB$, показать, что DC перпендикулярна къ BC .

84. Раздѣлимъ въ треугольникѣ ABC стороны AB и AC пополамъ въ точкахъ E и F и опустимъ перпендикуляръ AD на BC . Показать, что $\angle FDE = \angle A$.

85. Проведемъ равнодѣлящія двухъ угловъ при основаніи треугольника и опустимъ на нихъ перпендикуляры изъ вершины. Показать, что прямая, проходящая чрезъ основанія перпендикуляровъ, параллельна основанію и дѣлитъ другія стороны пополамъ.

86. D , E и F — середины боковъ AB , BC и AC треугольника ABC ; проведемъ прямую изъ точки D , параллельно BF , до пересѣченія съ прямою EF въ точкѣ G . Показать, что стороны треугольника CDG равны медианамъ даннаго треугольника.

87. Даны двѣ параллельныя прямыя MN и PQ . Изъ какой-нибудь точки A прямой MN проведемъ наклонную AB и перпендикуляръ AC къ PQ ; между параллельными прямыми проведемъ такъ еще прямую BED , пересѣкающую AC въ точкѣ E , чтобы $ED=2AB$. Доказать, что уголъ DBC равенъ трети угла ABC .

88. На основаніи BC равнобедреннаго треугольника ABC возьмемъ какую-нибудь точку D ; отложивъ на сторонѣ AC часть $CE=CD$, проведемъ прямую ED , которая пересѣчетъ продолженіе бока AB въ точкѣ F . Показать, что утроенный уголъ AEF болѣе четырехъ прямыхъ угловъ на уголъ AFE .

89. Если въ треугольникѣ ABC опустимъ изъ вершины A перпендикуляръ AD на сторону BC , то $\angle BAD = \frac{1}{2}(\angle A - \angle B + \angle C)$ и $\angle CAD = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B - \angle C)$.