Е.С. Федоров

Симметрия и структура кристаллов

Основные работы

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
Е11

Е.С. Федоров
Е11 Симметрия и структура кристаллов: Основные работы / Е.С. Федоров – М.: Книга по Требованию, 2014. – 642 с.

ISBN 978-5-458-32399-4

В издание вошли классические работы Евграфа Степановича Фёдорова по кристаллографии. Крупнейшее достижение Е. С. Фёдорова — строгий вывод всех возможных пространственных групп (1891 год). Тем самым Федоров описал симметрии всего разнообразия кристаллических структур. В то же время он фактически решил известную с древности задачу о возможных симметричных фигурах. В некотором смысле Федоров завершил построение здания классической кристаллографии. Работы по структуре и симметрии кристаллов завершились классическим трудом «Симметрия правильных систем фигур». В нём приведён первый вывод 230 пространственных групп симметрии (т. н. федоровских групп; почти одновременно они были также выведены нем. математиком А. Шёнфлисом. Переписка Ф. и Шёнфлиса содержала взаимные консультации по выводу пространственных групп симметрии (впоследствии Шёнфлис опубликовал письмо, в котором подтверждал приоритет Федорова).

ISBN 978-5-458-32399-4

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В УЛУЧШЕННОМ ВИДЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ [1]

Научные знания в настоящее время никоим образом не представляют отдельных независимых учений, лишенных связи одно с другим. Напротив того, различные отделы знаний связаны друг с другом весьма многочисленными и запутанными нитями, и почти всегда успех одной области знаний существенно зависит от успехов в некоторых других. Ближе всего в различиях отдельных отраслей знания или так называемых наук бросается в глаза большая или меньшая степень их отвлеченности. Менее отвлеченные науки пользуются результатами, достигнутыми науками более отвлеченными, и в этом отношении находятся в зависимости от последних, а представители этих наук всегда нуждаются в более или менее обширных сведениях, почерпнутых из наук более отвлеченных (но не обратно). В истории науки самым обыденным фактом является тот, что представители наук менее отвлеченных по необходимости берутся за исследования в области наук более отвлеченных, чтобы обеспечить дальнейший успех разрабатываемой ими самими области знаний. Достаточно вспомнить громадные услуги, оказанные физике и химии физиологами и минералогами. Но особенно часты обращения специалистов по наукам менее отвлеченным к наиболее отвлеченной из наук — математике. Математикою в большей или меньшей степени пользуются все науки, и чем совершеннее и выработаннее какая-нибудь отрасль знаний, тем больше в ней математики.

Та роль, которую в последнее время математика начала играть в области минералогии, ясно свидетельствует о значительных успехах последней. Но если минералоги черпали из клада, внесенного в науку чистыми математиками, то в свою очередь и их деятельность не оставалась бесследною в области математики: чистые математики, оставаясь на своей, в высокой степени отвлеченной, точке зрения, не могут предугадать тех направлений математической мысли, которые по необходимости вырабатываются у представителей менее отвлеченных наук. В первых попытках (немецкого минералога Наумана) более обширных приложений математики к минералогии выводы и формулы чистых математиков почти без изменения переносились в новую научную область. Но в скором времени минералоги почувствовали недостаточность того, что было дано математиками; появился ряд чисто математических работ, направленных для ответа на задачи, ставимые минералогией, и в результате получилась выработка математической системы, до сих пор почти не знакомой чистым математикам. Кто знаком с современным состоянием кристаллографии (одной области минералогии), тот знает, что целые отделы элементарной математики в том виде, как они выработаны чистыми математиками и как по сие время преподаются в средних учебных заведениях, можно считать устаревшими: сюда относятся как одна область элементарной геометрии (учение о фигурах), так и сферическая тригонометрия и отчасти геометрия аналитическая. Вот почему и теперь мне, обращающемуся к публике с кратким изложением начал аналитической геометрии и с поправкою в них, сущность которой объяснена ниже, по необходимости ради простоты, краткости и точности изложения приходится ссылаться на результаты, изложенные в минералогической литературе. Не имея права предполагать их известными ни чистым математикам, ни образованной публике вообще, я должен был предпослать к настоящему предмету изложения еще и краткое изложение формул сферической тригонометрии в том виде, как они излагаются теперь в научных сочинениях по кристаллографии. Кристаллографы вообще не имеют ни достаточного времени, ни достаточной в глазах публики компетентности выступать пред нею с популяризацией новых направлений математической мысли, выработанных ими самими и их коллегами по специальности, и если я решаюсь на это, то, не рассчитывая на успех в ближайшее время,— так как такой успех находился бы в противоречии с косностью, свойственной общественной организации вообще,— решаюсь из чувства безусловной необходимости: я не потому предлагаю внести в изложение современной аналитической геометрии поправку, что такую поправку можно сделать, но потому, что без этой поправки нельзя приступать к решению вопросов, поставленных современною кристаллографией на очередь,— я имею в виду аналитическое изучение симметрии как конечных фигур, так и бесконечных систем.

Несмотря на то, что вопросы симметрии как чисто геометрические входят в область математики вообще и аналитической геометрии в частности, чистые математики почти не коснулись этой области, и громадный успех ее почти целиком есть результат труда минералогов и физиков. Но и последние до сего времени не пытались пользоваться для решения вопросов симметрии аналитическим методом, а мне, решившемуся на это, пришлось натолкнуться на ошибку в самых основах современной аналитической геометрии, состоящую в том, что геометрическое построение, определяющее величину одной из *независимых* косоугольных координат, производится в *зависимости* от положения двух других осей этой системы координат. Для решения задач, которыми до сих пор занимается общая теория аналитической геометрии, ошибка эта имеет не столько практический, сколько философский характер; она состоит в сущности лишь в усложнении понятия о независимой координате, так как независимая переменная заменяется функцией от нее же самой и двух других независимых переменных. Ниже в моем изложении выведен и вид этой функции. Таким образом существовавшая до сих пор в изложении начал аналитической геометрии ошибка (ошибка только по отношению к самым началам; для специальных целей зависимое построение координат может быть даже полезным, как это указано ниже) не могла быть причиною каких-либо ошибочных выводов, но является задержкою при решении вопросов, не предвиденных чистыми математиками. Наглядным доказательством может служить работа о „симметрии конечных фигур", которую я публикую вслед за настоящею. Впоследствии возникнут, может быть, и другие вопросы, кроме симметрии, решение которых несовместимо с оставлением этой ошибки.

I. КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ФОРМУЛ СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ, НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ПОНИМАНИЯ ДАЛЬНЕЙШЕГО [1]

§ 1. Если x_0 и x_1 две прямоугольные оси координат на плоскости, а 1 и 2 две какие-нибудь прямые, то:

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{sn}\,(12)=\mathrm{sn}\,(1x_1-2x_1)=\mathrm{sn}\,(1x_1)\,\mathrm{cs}\,(2x_1)- \\ -\mathrm{cs}\,(1x_1)\,\mathrm{sn}\,(2x_1)=\mathrm{cs}\,(1x_0)\,\mathrm{cs}\,(2x_1)- \\ -\mathrm{cs}\,(1x_1)\,\mathrm{cs}\,(2x_0)=\begin{vmatrix} \mathrm{cs}\,(1x_0) & \mathrm{cs}\,(1x_1) \\ \mathrm{cs}\,(2x_0) & \mathrm{cs}\,(2x_1) \end{vmatrix} \end{array}\right\} \quad (1)$$

Но по известному свойству детерминантов:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{cs}\,(1x_0) & \mathrm{cs}\,(1x_1) \\ \mathrm{cs}\,(2x_0) & \mathrm{cs}\,(2x_1) \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} \mathrm{cs}\,(1x_1) & \mathrm{cs}\,(1x_0) \\ \mathrm{cs}\,(2x_1) & \mathrm{cs}\,(2x_0) \end{vmatrix}$$

Так как второй детерминант равен, согласно формуле (1), $\mathrm{sn}\,(21)$, то отсюда заключаем, что $\mathrm{sn}\,(12)=-\mathrm{sn}\,(21)$; поэтому при измерении угловых величин необходимо наперед условиться в направлении положительных углов, т. е. принять за положительное направление углов или соответствующее направлению часовой стрелки, или обратное.

---

[1]) Извлечение из этюда второго по аналитической кристаллографии, помещенного в „Горном журнале“ (1886, № 3).

Чтобы получить выражение, независимо от прямоугольных координат, мы можем поступить двояким образом:

1) если желаем за оси координат принять произвольные прямые 3 и 4, то, согласно (1), получим:

$$\operatorname{sn}(34)=\begin{vmatrix} \operatorname{cs}(3x_0) & \operatorname{cs}(3x_1) \\ \operatorname{cs}(4x_0) & \operatorname{cs}(4x_1) \end{vmatrix}$$

а потому, приняв во внимание равенства

$$\operatorname{cs}(ab)=\operatorname{cs}(ax_1-bx_1)=\operatorname{cs}(ax_1)\operatorname{cs}(bx_1)+\operatorname{sn}(ax_1)\operatorname{sn}(bx_1)=$$
$$=\operatorname{cs}(ax_1)\operatorname{cs}(bx_1)+\operatorname{cs}(ax_0)\operatorname{cs}(bx_0)$$

и

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 \\ a_2b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1'b_1' \\ a_2'b_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1a_1'+b_1b_1' & a_1a_2'+b_1b_2' \\ a_2a_1'+b_2b_1' & a_2a_2'+b_2b_2' \end{vmatrix}$$

найдем:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn}(12)\operatorname{sn}(34)&=\begin{vmatrix} \operatorname{cs}(1x_0) & \operatorname{cs}(1x_1) \\ \operatorname{cs}(2x_0) & \operatorname{cs}(2x_1) \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \operatorname{cs}(3x_0) & \operatorname{cs}(3x_1) \\ \operatorname{cs}(4x_0) & \operatorname{cs}(4x_1) \end{vmatrix}= \\ &=\begin{vmatrix} \operatorname{cs}(13) & \operatorname{cs}(14) \\ \operatorname{cs}(23) & \operatorname{cs}(24) \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

или же (2) возвысим $\operatorname{sn}(12)$ в квадрат, т. е.

$$\operatorname{sn}^2(12)=\begin{vmatrix} \operatorname{cs}(1x_0) & \operatorname{cs}(1x_1) \\ \operatorname{cs}(2x_0) & \operatorname{cs}(2x_1) \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \operatorname{cs}(1x_0) & \operatorname{cs}(1x_1) \\ \operatorname{cs}(2x_0) & \operatorname{cs}(2x_1) \end{vmatrix}=$$
$$=\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{cs}(12) \\ \operatorname{cs}(21) & 1 \end{vmatrix}=1-\operatorname{cs}^2(12)$$

и значит

$$\operatorname{sn}(12)=\pm\sqrt{1-\operatorname{cs}^2(12)} \qquad (3)$$

Смысл знака перед корнем теперь ясен из замечаний, сделанных выше.

§ 2. Сказанное относится к углам на плоскости. Совершенно аналогичные формулы мы можем составить и для телесных углов в пространстве.

Подобно тому как $\begin{vmatrix} \mathrm{cs}\,(1x_0) & \mathrm{cs}\,(1x_1) \\ \mathrm{cs}\,(2x_0) & \mathrm{cs}\,(2x_1) \end{vmatrix}$ есть простая функция плоского угла между двумя прямыми 1 и 2, мы можем принять функцию

$$\begin{vmatrix} \mathrm{cs}\,(1x_0) & \mathrm{cs}\,(1x_1) & \mathrm{cs}\,(1x_2) \\ \mathrm{cs}\,(2x_0) & \mathrm{cs}\,(2x_1) & \mathrm{cs}\,(2x_2) \\ \mathrm{cs}\,(3x_0) & \mathrm{cs}\,(3x_1) & \mathrm{cs}\,(3x_2) \end{vmatrix}$$

в которой x_0, x_1 и x_2 — прямоугольные оси координат, за функцию телесного угла между тремя прямыми 1, 2 и 3, т. е. тригоноэдра.[1]) Ради аналогии мы будем называть ее синусовой функцией[2]) и означать буквами Sn, т. е.

$$\mathrm{Sn}\,(123) = \begin{vmatrix} \mathrm{cs}\,(1x_0) & \mathrm{cs}\,(1x_1) & \mathrm{cs}\,(1x_2) \\ \mathrm{cs}\,(2x_0) & \mathrm{cs}\,(2x_1) & \mathrm{cs}\,(2x_2) \\ \mathrm{cs}\,(3x_0) & \mathrm{cs}\,(3x_1) & \mathrm{cs}\,(3x_2) \end{vmatrix} \tag{4}$$

Из этого определения мы выводим, что синусовая функ-

---

[1]) Трехгранного угла. Термин „гоноэдр" предложен мною в „Началах учения о фигурах" (Зап. Мин. общ., т. XXI, стр. 9) вместо термина „многогранный угол".

[2]) Штаудт (Staudt) (Crelle J., t. 24, S. 255) назвал эту функцию „Sinus, dreiseitiger Raumecke"; его примеру последовали математики и кристаллографы-аналитики. Однако я не могу согласиться с таким термином. Так как всякий гоноэдр имеет определенную величину, которую можно выразить в градусах (см., например: „Начала учения о фигурах", §§ 8 и 10), и так как синус есть совершенно определенная функция, так что каждой данной величине гоноэдра соответствует его определенный синус, то условно подразумевать под тем же выражением другую функцию, по моему мнению, неправильно, и это ведет к двусмыслию. Нетрудно даже вывести простое соотношение между „синусом" Штаудта и действительным синусом тригоноэдра, дополнительного данному. Далее (формула 12) доказывается, что $\mathrm{Sn}^2(abc) = 4\,\mathrm{sn}\,\frac{a+b+c}{2} \cdot \mathrm{sn}\,\frac{a+b-c}{2} \cdot \mathrm{sn}\,\frac{a-b+c}{2} \cdot \mathrm{sn}\,\frac{-a+b+c}{2}$; величины же тригоноэдра, дополнительного данному,

ция также имеет двоякий знак, а именно, сообразуясь с известными свойствами детерминантов, можем написать

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Sn}\,(123)=\mathrm{Sn}\,(231)=\mathrm{Sn}\,(312)=-\,\mathrm{Sn}\,(213)=\\ =-\,\mathrm{Sn}\,(321)=-\,\mathrm{Sn}\,(132)\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Эти равенства показывают, что знак синусовой функции обусловливается последовательностью ребер (123), а именно если, представив себя поместившимися внутри тригоноэдра (123) так, чтобы ноги находились на его вершине, мы увидим, что последовательность ребер соответствует движению часовой стрелки, и примем синусовую функцию за положительную, то при обратной последовательности она будет отрицательною.

Подобно предыдущему мы можем выразить синусовую функцию независимо от прямоугольных осей координат двояким образом, а именно:

1) приняв за оси координат произвольные прямые (456), мы можем написать:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Sn}\,(123)\,\mathrm{Sn}\,(456)=\begin{vmatrix}\mathrm{cs}\,(1x_0)\,\mathrm{cs}\,(1x_1)\,\mathrm{cs}\,(1x_2)\\ \mathrm{cs}\,(2x_0)\,\mathrm{cs}\,(2x_1)\,\mathrm{cs}\,(2x_2)\\ \mathrm{cs}\,(3x_0)\,\mathrm{cs}\,(3x_1)\,\mathrm{cs}\,(3x_2)\end{vmatrix}\times\\ \times\begin{vmatrix}\mathrm{cs}\,(4x_0)\,\mathrm{cs}\,(4x_1)\,\mathrm{cs}\,(4x_2)\\ \mathrm{cs}\,(5x_0)\,\mathrm{cs}\,(5x_1)\,\mathrm{cs}\,(5x_3)\\ \mathrm{cs}\,(6x_0)\,\mathrm{cs}\,(6x_1)\,\mathrm{cs}\,(6x_2)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathrm{cs}\,(14)\,\mathrm{cs}\,(15)\,\mathrm{cs}\,(16)\\ \mathrm{cs}\,(24)\,\mathrm{cs}\,(25)\,\mathrm{cs}\,(26)\\ \mathrm{cs}\,(34)\,\mathrm{cs}\,(35)\,\mathrm{cs}\,(36)\end{vmatrix}\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

или же (2), возвысив синусовую функцию в квадрат, написать

и трех других смежных с последним по грани (см.: Нач. уч. о фиг. § 10, теор. 18 и § 6, опр. 8) будут $180^\circ-\frac{a+b+c}{2}$, $\frac{a+b-c}{2}$, $\frac{a-b+c}{2}$ и $-\frac{a+b+c}{2}$, а потому, если означим эти четыре тригоноэдра чрез O, A, B и C, то $\mathrm{Sn}^2(abc)=4\,\mathrm{sn}\,O\,\mathrm{sn}\,A\,\mathrm{sn}\,B\,\mathrm{sn}\,C$.

Таким образом, хотя и неправильно называть эту функцию синусом, но едва ли можно отрицать, что название „синусовая функция“ для нее весьма характерно.