Корюн Гарегинович Аракелян
Давид Корюнович Аракелян

МАТЕМАТИКА

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Для учащихся 7–11 классов

УДК 51
ББК 22.1
А79

Аракелян К.Г.
А79 Математика. Занимательные и логические задачи: Для учащихся 7-11 классов / Корюн Гарегинович Аракелян, Давид Корюнович Аракелян – М.: Т8 Издательские Технологии, 2021. – 186 с.

ISBN 978-5-519-71571-3

В пособии включены нестандартные и исследовательские задачи различного уровня трудности. Предназначена главным образом для учащихся 7-11 классов, желающих углубить свои знания по математике, и может служить пособием для подготовки к математическим олимпиадам. Эта книга будет полезна также учителям математики, руководителям математических кружков, студен-там педагогических институтов.

ISBN 978-5-519-71571-3

ПРЕДИСЛОВИЕ

Несмотря на свою необязательность для школьника, внеурочные занятия по математике заслуживают самого пристального внимания каждого учителя, преподающего этот предмет.

В математическом кружке учитель может выбрать ту тематику и такую программу занятий, которые больше всего соответствуют его личным вкусам, знаниям и увлечениям. Учитель может на внеурочных занятиях в максимальной мере учесть возможности, запросы и интересы своих питомцев.

Одна из основных причин сравнительно плохой успеваемости по математике – слабый интерес многих учащихся (а иногда и отсутствие всякого интереса) к этому предмету. Немало школьников считали и считают математику скучной, сухой наукой. Интерес учащихся к предмету зависит прежде всего от качества постановки учебной работы на уроке. В то же время с помощью продуманной системы внеурочных занятий можно значительно повысить интерес школьников к математике.

Наряду с учащимися, безразличными к математике, имеются и другие, увлекающиеся этим предметом. Им мало тех знаний, которые они получают на уроке математики. Они хотели бы больше узнать о своем любимом предмете, узнать, как он применяется в жизни, порешать интересные и более трудные задачи. Разнообразные формы внеурочных занятий представляют большие возможности в этом направлении.

Внеурочные занятия с успехом могут быть использованы для углубления знаний учащихся в области программного материала, развития их логического мышления, пространственного воображения, исследовательских навыков, смекалки, развития правильной математической речи, привития вкуса к чтению математической литературы, для сообщения учащимся полезных сведений из истории математики.

Не менее важной целью обучения математике является формирование у учащихся навыков исследовательской деятельности, умений анализировать, рассуждать и на основания этого делать выводы. Эти навыки необходимы каждому человеку независимо от его будущей профессии, и особенно они нужны тем, кто в дальнейшем станет заниматься научной, исследовательской работой.

Внеурочные занятия с учащимися приносят большую пользу и самому учителю. Чтобы успешно проводить внеклассную работу, учителю приходится постоянно расширять свои познания по математике, следить за новостями математической науки. Это благотворно сказывается и на качестве его уроков.

Каждый ученик, увлекающийся математикой, должен обладать арсеналом методов решения задач. В этот арсенал входят, например, арифметика остатков, «принцип перемножения» в комбинаторике и т.д. При решении многих задач используются сходы между собой приемы рассуждений, получившие название «принципа Дирихле». Целесообразно выделить принцип Дирихле в особую тему и специально учить школьников умению применять его при решении задач. Кроме того, задачи на принцип Дирихле воспитывают у учащихся умение устанавливать соответствие между элементами двух множеств.

Решение задач – это одна из активных форм обучения. В процессе решения задач учащиеся знакомятся с новыми математическими закономерностями, задачи помогают им поиному взглянуть на уже известные факты, учат самостоятельно добывать новые знания.

Настоящая книга состоит из трех частей.

В первой части приведены условия задач. Предлагаются нестандартные и исследовательские задачи различного уровня трудности. Более трудные задачи помечены звездочкой.

Решением нестандартных задач следует заниматься с самого начала изучения математики, что будет способствовать развитию логического мышления, расширению и углублению знаний по математике. Значительная часть задач по своему решению вполне доступна большинству учащихся. Среди них встречаются много довольно простых задач, по сложности мало отличающихся от задач, помещенных в школьных учебниках. Особое внимание уделено классификации задач. Для решения предлагаются не разрозненные задачи, а серии задач, связанных между собой по содержанию и методам решения. Задачи расположены, в основном, в порядке возрастания сложности, так, что решение первых более простых задач помогает находить решения следующих за ними.

Во второй части книги приводятся ответы, решения или указания к решениям многих задач. Предполагается, что к этому разделу учащиеся будут обращаться лишь в крайних случаях, ибо ничего не может принести столько пользы, сколько приносит самостоятельная работа по поиску решения. Надо хорошо усвоить, что труд и упорство – основные источники успеха.

Третья часть содержит приложение. В нем приводятся интересные и очень полезные теоремы и задачи, тесно связанные с “замечательными” точками и линиями в треугольнике. Доказательства этих теорем и решения задач не приводятся. Ко всем задачам на вычисление даны ответы, некоторые из них снабжены указаниями. Читателям предлагается решать их самостоятельно.

Данная книга поможет учащимся узнать много нового, полюбить математику.

Предназначена главным образом для учащихся 7-11 классов, желающих углубить свои знания по математике, и может служить пособием для подготовки к математическим олимпиадам. Эта книга будет полезна также учителям математики, руководителям математических кружков, студентам педагогических институтов.

Часть **I**

§1. В мире целых чисел. Делимость неотрицательных целых чисел

Числа не управляют миром, но
показывают, как управляется мир.
И. В. Гете

В математике требуется громадная систематичность: если выпадает хотя бы одно звено, то делается непонятным все остальное.
Н. К. Крупская

Краткие сведения
(основные понятия, свойства)

1. Натуральными *или* ***целыми положительными*** *называют числа, используемые при пересчете предметов:* 1, 2, 3, 4, ...

Числа вида $-n$, *где* n *– натуральное число, называются* ***целыми отрицательными*** *числами.*

Все натуральные, целые отрицательные числа и нуль, взятые вместе, составляют совокупность ***целых чисел.***

Множество натуральных чисел обозначается буквой N, *а целых чисел* $-Z$:

$$N=\{1;2;3;4;\ldots\},\qquad Z=\{0;\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\ldots\}.$$

Выражение «m *является натуральным числом» записывают короче следующим образом:* $m\in N$ *(читается: «*m *принадлежит множеству* N*»). Если число* q *не принадлежит множеству* N, *то пишут:* $q\notin N$.

Пусть a *и* b *– натуральные числа.*

*Говорят, что a **делится** на b, если существует такое натуральное число q, что $a = bq$ (деление без остатка). Тогда число a называется **делимым (или кратным)** числа b, число b – **делителем** числа a. Такое число q называется **частным** от деления a на b и обозначается $a : b$ или $\frac{a}{b}$.*

Вместо «a делится на b» часто говорят «a кратно b», «a – кратное b», «b – делитель a».

Предложение «a делится на b» записывают коротко так: $a \vdots b$.

Отметим основные свойства этого соотношения:

1) ***Для любого натурального числа*** a $a \vdots a$ ***и*** $a \vdots 1$.
2) ***Если*** $a \vdots b$., $b \vdots c$, ***то*** $a \vdots c$ ***(свойства транзитивности).***
3) ***Если*** $a \vdots c$ ***и*** $b \vdots c$, ***то для любых натуральных чисел*** m ***и*** k $(ma + kb) \vdots c$. ***Если, кроме того,*** $ma > kb$, ***то*** $(ma - kb) \vdots c$.
4) ***Если*** $ka \vdots kb$, ***то*** $a \vdots b$ $(k \in N)$.
5) ***Если*** $a \vdots b$ ***и*** $c \vdots d$, ***то*** $ac \vdots bd$.

Для любого натурального числа a полагают, что $0 \vdots a$.

*Для натуральных чисел деление на целое не всегда **выполнимо,** т.е. результат деления двух натуральных чисел не всегда есть целое число. Но тогда возможно деление с остатком. Пусть a и b произвольные натуральные числа.*

***Разделить** число a **(делимое)** на число b **(делитель)** с остатком – значит найти такие два целые числа q **(неполное частное)** и r **(остаток),** чтобы выполнялись соотношения:*

$$a = bq + r, \ \ 0 \le r < b.$$

***Деление с остатком всегда выполнимо,** а **неполное** частное и остаток вполне определяются делимым и делителем, т.е. q и r единственны для заданных a и b.*

При делении любого натурального числа на данное натуральное число n могут быть получены остатки $0, 1; 2;...; n-1$. Это означает, что каждое натуральное число можно представить в одном из следующих видов:

$$nq,\ nq+1,\ nq+2,...,\ nq+(n-1),\ \text{где}\ q \ge 0,\ q \in Z:$$

Например, любое натуральное число можно представить в одном из следующих видов:

$$3q\ ,\ 3q+1,\ 3q+2\ \ (q \ge 0, q \in Z)\,.$$

Аналогично, каждое натуральное число можно представить в одном из следующих видов:

$$5k,\ 5k+1,\ 5k+2,\ 5k+3,\ 5k+4\ (k=0, 1, 2,...).$$

Числа вида $2k$ $(k=0, 1, 2,...)$ называют ***четными****, а числа вида $2k-1$ $(k \in N)$ –* ***нечетными.*** *Объединение всех четных и нечетных чисел является множество целых неотрицательных чисел.*

2. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

Пусть a и b – натуральные числа. ***Общим делителем*** *этих чисел называют такое натуральное число d, что a и b делятся на d. Среди общих делителей наибольшее называют* ***наибольшим общим делителем*** *чисел a и b и обозначают $D(a;b)$.*

Если ***наибольший общий делитель*** *чисел a и b равен единице, то эти числа называются* ***взаимно*** *простыми. Иначе говоря, числа a и b называются взаимно простыми, если они одновременно не делятся ни на какое натуральное число, кроме единицы.*

Аналогично определяется наибольший общий делитель трех и большего количества чисел.

Для нахождений наибольшего общего делителя двух натуральных чисел удобно пользоваться так называемым ***алгоритмом Евклида****, в основе которого лежит следующее утверждение:*

Пусть a и b натуральные числа. Если при делении a на b получается остаток r, то $D(a;b)=D(b;r)$. Если a делится на b без остатка, то, очевидно, $D(a;b)=b$.

Рассмотрим тот случай, когда при делении a на b получается отличный от нуля остаток r. Далее разделим a на r и обозначим через r_1 получившийся остаток, и так далее, каждый раз предыдущий делитель, разделив на получившийся остаток. Этот процесс продолжается до получения остатка, равного нулю; последний из остатков, отличный от нуля и будет наибольшим общим делителем чисел a и b.

***Общим кратным натуральных** чисел a и b называют натуральное число, кратное и a и b. Среди всех общих кратных чисел a и b есть наименьшее. Его называют **наименьшим общим кратным** чисел a и b и обозначают $K(a;b)$.*

Аналогично, определяется наименьшее общее кратное трех или большего количества чисел.

При решении задач часто применяются следующие утверждения:

*1) **Наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно их произведению, т.е., если***

$$D(a;b)=1, \text{ то } K(a;b)=ab.$$

*2) **Для любых натуральных чисел a и b верно следующее равенство**:*

$$D(a;b)\cdot K(a;b)=ab.$$

*3) **Если числа a и b взаимно простые, то любое натуральное число, делящееся на a и b, делится на ab, т.е. если** $D(a;b)=1$, **и** $n \vdots a$, $n \vdots b \,(n \in N)$, то $n \vdots ab$.*

*4) **Если числа a и b взаимно простые,** а **произведение an делится на b, то n делится на b, т.е. если***

$$D(a;b)=1 \text{ и } an \vdots b, \text{ то } n \vdots b.$$

3. Простые и составные числа

*Натуральное число p называется **простым**, если оно имеет ровно два натуральных делителя (1 и p).*

*Число, имеющее более двух натуральных делителей, называется **составным.***

Число 1, имеющее только один натуральный делитель, не относится ни к простым, ни к составным числам.

*Можно доказать, что простых чисел бесконечно много (**теорема Евклида о простых числах**).*

Среди простых чисел имеется лишь одно четное число -2.

При решении задач полезным будут следующие утверждения:

*1) **Основная теорема арифметики:***

***Всякое натуральное число, отличное от единицы, может быть представлено в виде произведения простых чисел и притом единственным способом** (произведения, отличающееся только порядком сомножителей, не считаются различным).*

***Примечание.** Если число n простое, то «произведение» состоит из единственного множителя n.*

Основная теорема арифметики имеет ряд важных следствий. Приведем два из них:

*a) **Наименьший из делителей числа, отличный от 1, является простым числом.***

*b) **Всякое натуральное число, кроме 1, имеет по крайней мере один простой делитель.***

Пусть натуральное число n представлено в произведении простых сомножителей. Объединяя равные сомножители, число n можно представить в таком виде:

$$n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k},$$

*где p_1, $p_2, \ldots, p_k$ – различные простые числа, а $m_1, m_2, \ldots, m_k$ – натуральные числа. Такое выражение называется **каноническим разложением** числа n. В этом случае говорят также, что n задано в канонической форме.*