

А.Е. Заикин

Авиационные двигатели
Конструкция и расчет деталей

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 030
ББК 92
А11

А11 **А.Е. Заикин**
Авиационные двигатели: Конструкция и расчет деталей / А.Е. Заикин – М.: Книга по Требованию, 2023. – 621 с.

ISBN 978-5-458-29632-8

Курс конструкций авиационных двигателей составлен по программе, принятой на инженерном факультете Военной воздушной академии КА им. проф. Н. Е. Жуковского. Помимо анализа конструктивных форм отдельных деталей авиационных двигателей в книге приведены методы расчета деталей на прочность и изложены вопросы: динамики двигателя, уравнивания и крутильных колебаний. В большинстве глав приведены сведения об особенностях производства той детали двигателя, рассмотрению которой посвящена данная глава. Книга утверждена Комитетом по высшей школе при СНК СССР в качестве учебника по конструкции авиационных двигателей для авиационных, технических Втузов и может также служить пособием для инженерно-технических работников авиационных заводов и институтов.

ISBN 978-5-458-29632-8

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

ГЛАВА I

ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ АВИАЦИОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Динамический расчет заключается в определении сил и моментов, действующих на элементы шатунно-кривошипного механизма.

Первым этапом динамического расчета является построение индикаторной диаграммы. Для вновь проектируемого двигателя индикаторная диаграмма строится на основании теплового расчета. Для поверочного расчета существующего двигателя она может быть построена упрощенным методом по известным уже данным: мощности, числу оборотов, удельному расходу топлива и размерности двигателя. Получается так называемая конструктивная индикаторная диаграмма. Вторым этапом динамического расчета является определение сил от инерции и суммирование их с силами газа для шатунно-кривошипного механизма одного цилиндра. Третий этап заключается в суммировании сил от нескольких цилиндров на одном колене вала и в суммировании крутящих моментов от всех колен в случае рядного двигателя или многорядной звезды. Обычно весь динамический расчет ведется при номинальном режиме на расчетной высоте.

§ 2. КОНСТРУКТИВНАЯ ИНДИКАТОРНАЯ ДИАГРАММА НОРМАЛЬНОГО НЕВЫСОТНОГО И ПЕРЕРАЗМЕРЕННОГО ДВИГАТЕЛЯ

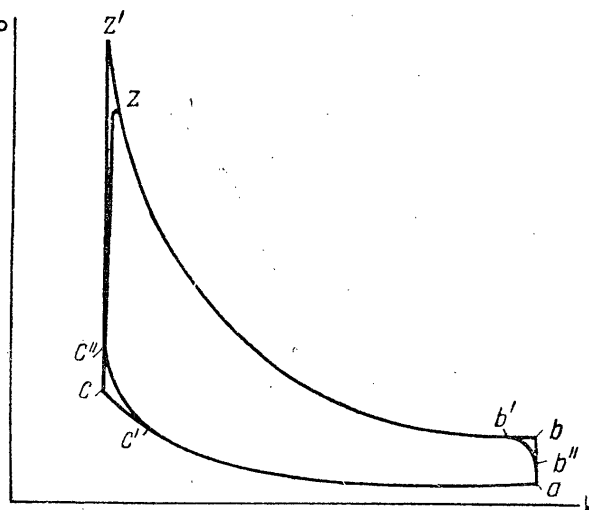
Если номинальная мощность соответствует полному открытию дросселя на земле, то давление в начале сжатия p_a (фиг. 1) принимается равным $0,9 \div 0,95 p_0$. Для переразмеренного двигателя, задресселированного на земле, конструктивная индикаторная диаграмма строится для расчетной высоты и давление p_a принимается равным $0,9 \div 0,95 p_H$, где p_H — давление на расчетной высоте.

Расчетная высота может быть определена по высотной характеристике на максимальном числе оборотов и данному номиналу, т. е. без учета изменения числа оборотов с высотой. При отсутствии высотной характеристики можно воспользоваться графиком изменения по высоте значения

$$A = 1,11 \frac{p_H}{p_0} \sqrt{\frac{T_0}{T_H}} - 0,11, \quad (1)$$

как это показано в задаче 1.

В формуле (1) p_H , T_H — давление и температура на расчетной высоте по стандартной атмосфере;
 p_0 , T_0 — то же на земле.



Фиг. 1. Индикаторная диаграмма.

Правильный выбор давления p_a значительно влияет на величину площади индикаторной диаграммы.

Задача 1

Определить величину p_a на предельной высоте для двигателя М-17-ф, если на земле

$$N_{e_0 \text{ ном}} = 500 \text{ л. с. при } n = 1445 \text{ об/мин.};$$

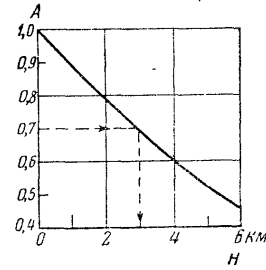
$$N_{e_0 \text{ max}} = 715 \text{ л. с. при } n = 1665 \text{ об/мин.};$$

$$A_z = \frac{N_{eH}}{N_{e_0 \text{ max}}} = \frac{500}{715} = 0,7. \quad (2)$$

По фиг. 1' $H = 3000 \text{ м.}$

По стандартной атмосфере $p_H = 0,715 \text{ кг/см}^2$, следовательно,

$$p_a = 0,9 \cdot 0,715 \approx 0,65 \text{ кг/см}^2.$$



Фиг. 1'.

Давление в любой точке политропы сжатия определяется по формуле:

$$p = p_a \left(\frac{V_a}{V} \right)^{n_1}, \quad (3)$$

где показатель политропы сжатия $n_1 = 1,35$;

p — текущее значение давления, соответствующее объему V ;
 V_a — полный объем, соответствующий давлению p_a .

Давление в конце сжатия p_c будет:

$$p_c = p_a \varepsilon^{n_1}, \quad (4)$$

здесь ε — степень сжатия.

Максимальное давление вспышки p'_z теоретической диаграммы определяют по среднему индикаторному давлению, известному для данного мотора. Из курса теории двигателей известно, что

$$p'_i = \frac{p_c}{\varepsilon - 1} \left(\frac{p'_z}{p_c} \frac{1 - \varepsilon^{1-n_2}}{n_2 - 1} - \frac{1 - \varepsilon^{1-n_1}}{n_1 - 1} \right).$$

Решая это уравнение относительно p'_z , получим:

$$p'_z = \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1} \frac{1 - \varepsilon^{1-n_1}}{1 - \varepsilon^{1-n_2}} p_c + (n_2 - 1) \frac{\varepsilon - 1}{1 - \varepsilon^{1-n_2}} p_i, \quad (5)$$

где

n_2 — средний показатель политропы расширения;

$p'_i = \frac{p_i}{\mu}$ — среднее индикаторное давление теоретического цикла;

μ — коэффициент полноты индикаторной диаграммы.

Обычно принимают $n_2 = 1,24$; $\mu = 0,95$.

Величина p_i находится по формуле:

$$p_i = \frac{N_e 900}{n V_h \eta_m}, \quad (6)$$

где

N_e — номинальная мощность двигателя в л. с.;

V_h — литраж двигателя в л.;

n — число оборотов в минуту на расчетной высоте;

η_m — механический к. п. д. на данном режиме.

Фактическое максимальное давление p_z меньше, чем p'_z ;

$$p_z = p'_z k; \quad (7)$$

здесь $k = 0,85$ и является коэффициентом снижения давления вспышки.

Давление по линии и в конце расширения p_b вычисляется по уравнениям (8), (9):

$$p = p_b \left(\frac{V_a}{V} \right)^{n_2}; \quad (8)$$

$$p_b = p_z' \varepsilon^{n_2}. \quad (9)$$

Для облегчения расчетов приводятся графики на фиг. 2, 3 и табл. 1.

Таблица 1 *

$\frac{V_a}{V}$	$\frac{10}{10}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{10}{6}$	$\frac{10}{5}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{10}{3}$
$\left(\frac{V_a}{V} \right)^{1,35}$	1,0	1,153	1,352	1,619	1,991	2,547	3,443	5,082
$\left(\frac{V_a}{V} \right)^{1,24}$	1,0	1,139	1,319	1,556	1,885	2,362	3,115	4,450

Полученная таким образом теоретическая индикаторная диаграмма скругляется.

При скруглении точку C' (фиг. 1) выбирают в соответствии с углом опережения зажигания, вычитая $10-12^\circ$, соответствующих периоду скрытого горения; точку C'' следует брать на 5 ат выше точки C ; максимальное давление $p_{z \text{ max}}$ следует считать лежащим на $12-15^\circ$ после ВМТ, но если расчет производится с интервалом 20° , то $p_{z \text{ max}}$ следует относить к углу 20° после ВМТ.

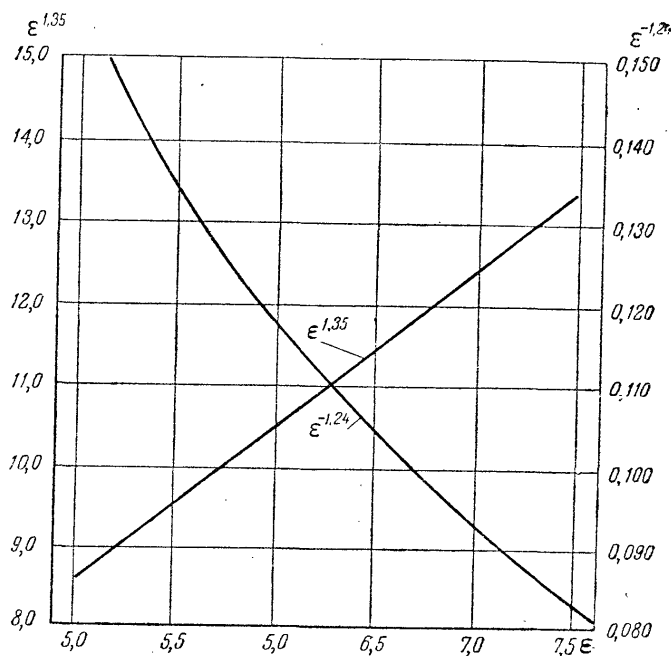
Точку b' выбирают в соответствии с началом выхлопа по диаграмме газораспределения, а точку b'' берут по середине между точками a и b .

Петлю всасывание—выхлоп не строят, так как насосные потери учитываются в значении η_m , а также потому, что силы газов в этом случае очень малы по сравнению с силами от инерции.

При пользовании формулой (6) необходимо задаваться значением η_m . На земле при полном открытии дросселя $\eta_m = 0,85 - 0,9$.

Однако для переразмеренного двигателя величина η_m на расчетной высоте может сильно отличаться от указанного значения. В этом случае, если известен соответствующий расчетной высоте расход топлива $C_e \text{ кг/л.с.ч.}$, величину η_m можно найти по формуле

$$\eta_m \approx \frac{C_i}{C_e}, \quad (9')$$



Фиг. 2. График для определения давления конца расширения и сжатия.

* Табл. 1 заимствована из книги И. Неймана, Динамика авиационных моторов. Справочник, часть I, стр. 193.

значение же C_i (индикаторного удельного расхода) можно вычислить по формуле

$$C_i = \frac{632}{H_u \eta_i}, \quad (10)$$

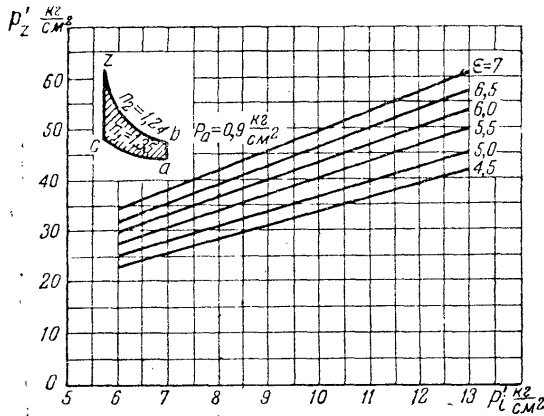
где

H_u — низшая теплотворность топлива;
 η_i — индикаторный к. п. д. при данном составе смеси.

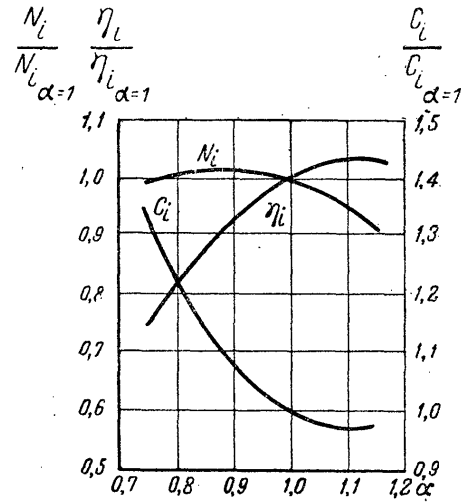
Величина η_i определяется по формуле:

$$\eta_i = \left(1 - \frac{1}{\epsilon^{0,23}}\right) \frac{\eta_{i\alpha=1}}{\eta_{i\alpha=1}}, \quad (11)$$

и графику изменения отношения η_i по α (фиг. 4).



Фиг. 3. Зависимость между p'_z и p'_i .



Фиг. 4. Влияние коэффициента избытка воздуха на мощность и экономичность.

§ 3. КОНСТРУКТИВНАЯ ИНДИКАТОРНАЯ ДИАГРАММА ВЫСОТНОГО ДВИГАТЕЛЯ С ПРИВОДНЫМ ЦЕНТРОБЕЖНЫМ НАГНЕТАТЕЛЕМ (П. Ц. Н.)

Основная особенность построения индикаторной диаграммы высотного двигателя заключается в определении индикаторной мощности на расчетной высоте N_{iH} , которой должна быть эквивалентна площадь искомой индикаторной диаграммы, т. е.

$$N_{iH} = N_{eH} + N_c + N_r - \Delta N, \quad (12)$$

где

N_{eH} — эффективная мощность на расчетной высоте;
 N_c — мощность, потребляемая нагнетателем;
 N_r — мощность трения;
 ΔN — приращение мощности за счет насосной работы нагнетателя.

В формуле (12) величина N_{eH} известна из конструктивных данных.

Мощность, затрачиваемая на нагнетатель,

$$N_c = \frac{L_{ад} N_{eH} C_{eH} L_0 \alpha}{\eta_c 3600 \cdot 75}, \quad (13)$$

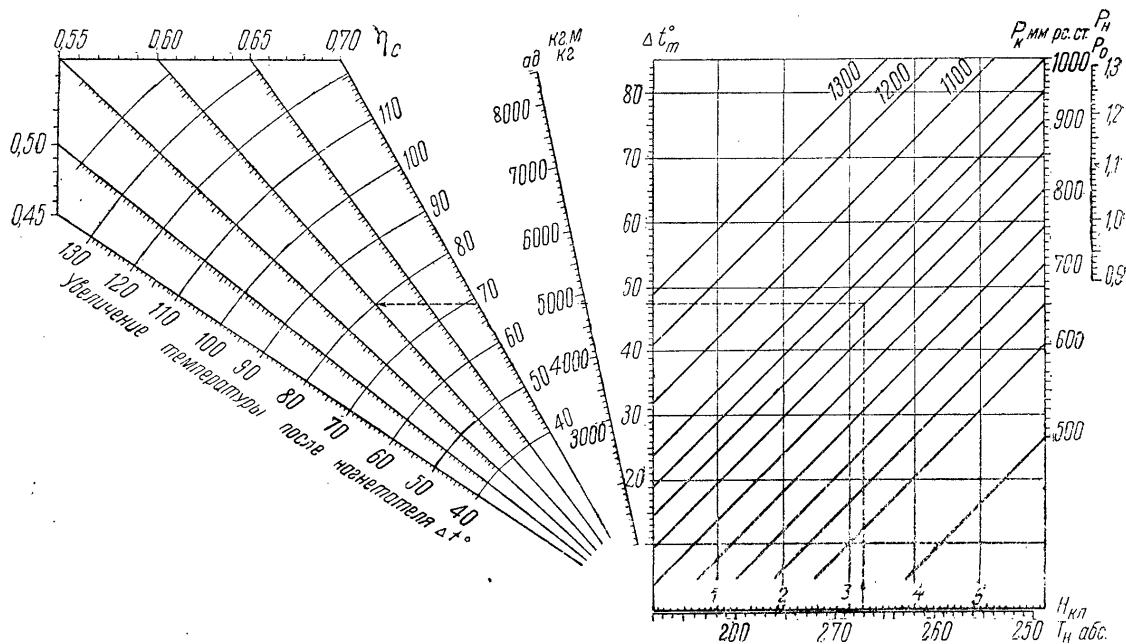
где

L_0 — теоретически необходимое количество воздуха;
 η_c — адиабатический к. п. д. нагнетателя;

$$L_{ад} = 102,5 T_H \left[\left(\frac{p_k}{p_H} \right)^{0,286} - 1 \right] \frac{кгМ}{кг}, \quad (14)$$

$L_{ад}$ — адиабатическая компрессорная работа для 1 кг воздуха;

p_H и T_H — давление и температура на расчетной высоте в стандартной атмосфере;
 p_k — давление во всасывающих трубопроводах на расчетной высоте.



Фиг. 5. Диаграмма для определения $L_{ад}$ и T_k .

Пример: $H = 3,2$ км; $p_k = 900$ мм рт. ст.; $\eta_c = 0,60$. Ответ: $L_{ад} = 4850$ кгм; $\Delta t = 80^\circ$; $T_k = 347^\circ$

Величину $L_{ад}$ можно также определять, пользуясь графиком (фиг. 5). Прирост мощности ΔN определяется либо по формуле:

$$\Delta N = \frac{0,9(p_k - p_H) V_{hH}^n}{900}, \quad (15)$$

либо по формуле:

$$\Delta N = 0,9 \frac{p_k - p_H}{p_{iH}} N_{iH} = CN_{iH}. \quad (16)$$

Если, как обычно принято, выражать p_k и p_H в мм рт. ст., а p_i — в кг/см², то

$$C = \frac{0,9(p_k - p_H)}{p_{iH} 735}. \quad (17)$$

Значения величины C даны на фиг. 6 при $p_{iH} = 15$ кг/см².

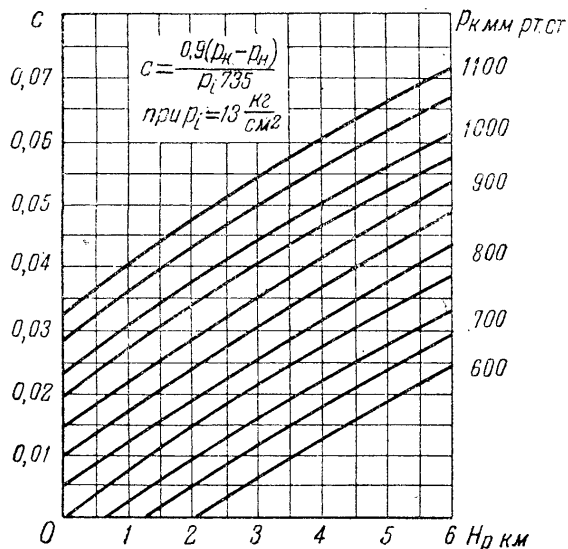
Мощность трения на высоте N_{rH} равна, примерно, мощности трения двигателя тех же размеров без нагнетателя у земли:

$$N_{rH} \approx N_{r_0} = N_{i_0} (1 - \eta_{m_0}),$$

здесь N_{i_0} — индикаторная мощность двигателя без нагнетателя на земле.

Из курса теории авиадвигателей известна следующая формула, связывающая величины N_{iH} с N_{i_0} :

$$N_{iH} = N_{i_0} \frac{p_k}{p_0} \sqrt{\frac{T_0}{T_k}} \cdot \frac{\epsilon - \sqrt[1,3]{\frac{p_H}{p_k}}}{\epsilon - 1} = N_{i_0} \Delta, \quad (18)$$

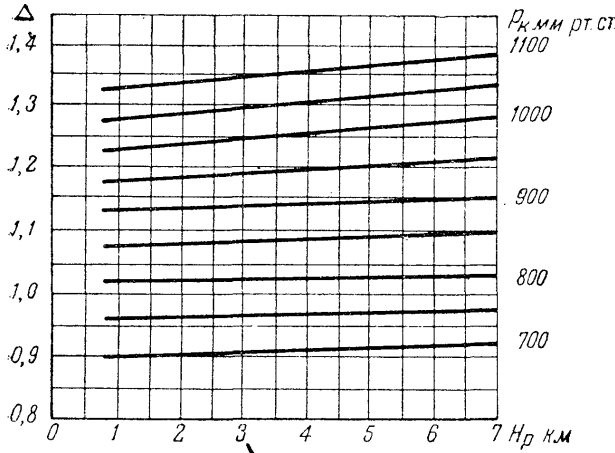


Фиг. 6. Диаграмма для определения поправки мощности на противодавление.

где

$$\Delta = \frac{p_k}{p_0} \sqrt{\frac{T_0}{T_k}} \varepsilon - \sqrt[1,3]{\frac{p_H}{p_k}} \quad (19)$$

На фиг. 7 даны значения Δ для $\varepsilon = 6$ и $\eta_c = 0,55$ (величина η_c влияет на T_k).



Фиг. 7. Диаграмма для определения поправки мощности на атмосферные условия.

Подставляя в формулу (12) значения N_r из формулы (20) и ΔN из формулы (16), получим:

$$N_{iH} = \frac{N_{eH} + N_c}{1 + C - \frac{1}{\Delta}(1 - \eta_{m_0})} = \frac{N_{eH} + N_c}{K} \quad (21)$$

где

$$K = 1 + C - \frac{1}{\Delta}(1 - \eta_{m_0}) \quad (22)$$

Формула (21) дает окончательное выражение для определения индикаторной мощности двигателя на расчетной высоте.

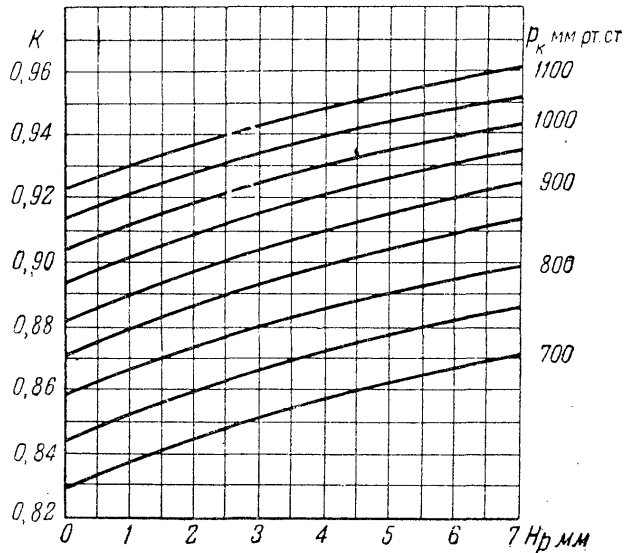
Величина K на фиг. 8 построена для тех же условий, что Δ и C , и при $\eta_{m_0} = 0,85$.

Изменение η_{m_0} в пределах $0,8 \div 0,9$ дает колебание величины K до 5%.

Дальнейший ход построения индикаторной диаграммы высотного двигателя проводится в описанном выше порядке с той лишь разницей, что для начальной точки принимается $p_a = 0,9 \div 0,95 p_k$.

Нахождение N_{iH} можно значительно упростить, относя мощность нагнетателя к механическим потерям и вычисляя суммарный механический к. п. д. двигателя по формуле:

$$\eta'_m = \frac{N_{eH}}{N_{eH} + N_c + N_r - \Delta N} \quad (23)$$



Фиг. 8. Диаграмма для определения индикаторной мощности двигателя с П.Ц.Н.

Заменяя здесь по формулам (13), (20) и (15) величины N_e , N_r и ΔN , можно заранее

вычислить величину η'_{m_0} , так что дальнейшее нахождение N_{iH} сведется к вычислению по формуле

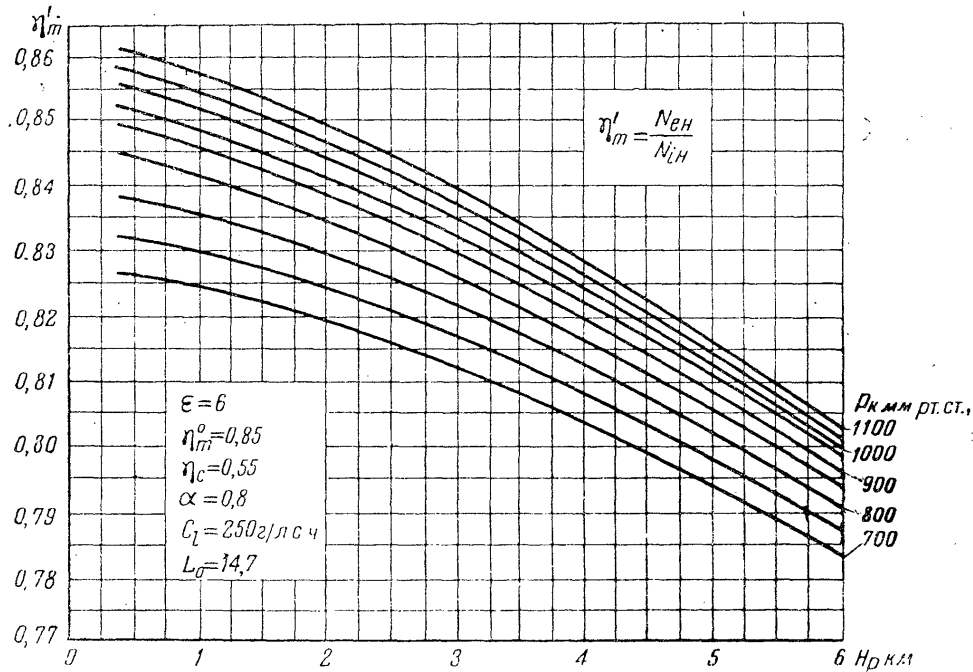
$$N_{iH} = N_{eH} \frac{1}{\eta'_{m_0}}. \quad (24)$$

На фиг. 9 даны значения величины η'_{m_0} , вычисленные для $\eta_{m_0} = 0,85$; $C_e = 250$ г/л. с. ч.; $\alpha = 0,8$ и всех остальных данных, принятых при построении графиков для C , Δ и K .

Для другого значения η_{m_0} , данные фиг. 9 могут быть достаточно точно пересчитаны на основании формулы

$$\eta''_{m_0} = \eta'_{m_0} \frac{\eta_{m_0}}{0,85}; \quad (25)$$

здесь η''_{m_0} — полный механический к. п. д. двигателя при данном η_{m_0} .



Фиг. 9. Диаграмма для определения суммарного механического к. п. д.

Необходимо помнить, что фиг. 9 показывает изменение механического к. п. д. всего двигателя в зависимости от его расчетной высоты H_p и давления наддува p_k , т. е. по существу изменение η'_{m_0} двигателя с разными нагнетателями, а не с одним и тем же на разных высотах.

Задача 2

Построить конструктивную индикаторную диаграмму двигателя Даймлер-Бенц DB-600 С, имеющего следующие данные („Flugsport“ № 20, 1937 г.):

$$N_{eH} = 910 \text{ л. с.}; \quad n = 2400 \text{ об/мин.}; \quad C_e = 240 \text{ г/л. с. ч.};$$

$$p_k = 1,15 \text{ кг/см}^2; \quad p_k = 845 \text{ мм рт. ст.}; \quad H_p = 4000 \text{ м.}$$

Число цилиндров $i = 12$; $S = 160$ мм; $D = 150$ мм; $\epsilon = 6,5$; $V_h = 34$ л; $p_e = 10,05$ кг/см²; $G = 0,545$ кг/л. с.

Принимаем: $L_0 = 14,7$; $\alpha = 0,85$; $\eta_c = 0,55$.

$T_H = 262^\circ$ абс.; $p_H = 462,26$ мм; $L_{ад} = 5060$ кгм/кг;

$$N_c = \frac{5060 \cdot 910 \cdot 0,240 \cdot 14,7 \cdot 0,85}{0,55 \cdot 3600 \cdot 75} = 93,0 \text{ л. с.}$$

По формуле (17), задавая $p_{iH} = 12$ кг/см², находим:

$$C = \frac{0,9(845 - 462,26)}{12 \cdot 735} = 0,039$$

при

$$\Delta t = \frac{5060}{102,5 \cdot 0,55} = 90^\circ$$

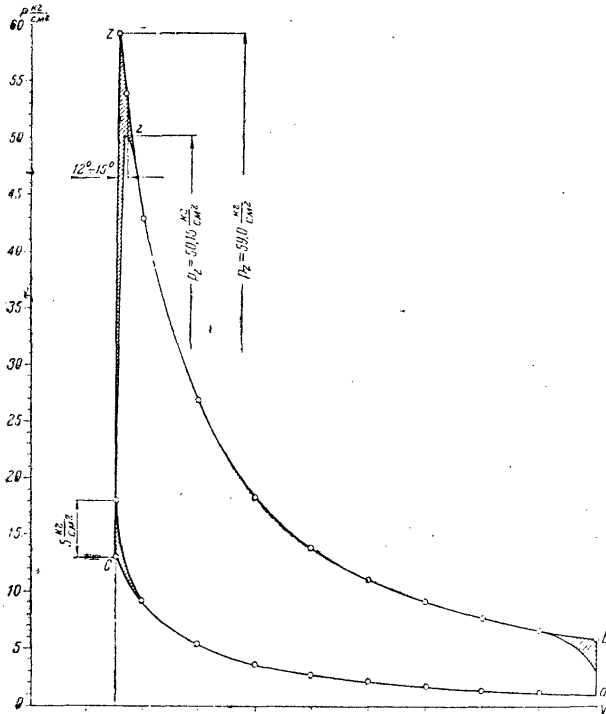
и

$$T_k = 262 + 90 = 352^\circ.$$

По формуле (20)

$$\Delta = \frac{845}{760} \cdot \sqrt{\frac{288}{352}} \cdot \frac{6,5 - \sqrt[1,3]{\frac{462,26}{845}}}{6,5 - 1} = 1,08.$$

По формуле (22), приняв $\eta_{m_0} = 0,85$, получим:



Фиг. 10. Индикаторная диаграмма.

$$p_z = 0,85 \cdot 59,0 = 50,15 \text{ кг/см}^2;$$

$$p_b = 59,0 \frac{1^3}{6,5^{1,24}} = 5,81 \text{ кг/см}^2.$$

Для построения индикаторной диаграммы (фиг. 10) составляем табл. 2.

Масштабы целесообразно выбирать такими, чтобы размер диаграммы был примерно $200 \times 200 \text{ мм}$. В частности, независимо от величины S , удобно принимать $V_a = 200 \text{ мм}$.

Т а б л и ц а 2

$\frac{10}{10}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{10}{6}$	$\frac{10}{5}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{10}{3}$	5	6	6,5
200	180	160	140	120	100	80	60	40	33,3	30,8
1,035	1,195	1,40	1,67	2,06	2,64	3,56	5,26	9,10	11,38	12,95
5,81	6,60	7,65	9,05	10,95	—	—	—	—	53,65	59,00

Построенная диаграмма должна быть после скругления обязательно подвергнута проверке планиметрированием, так как ошибка в диаграмме скажется на правильности всего динамического расчета.

Разница в исходной и найденной величинах p_i не должна быть больше 2%.

§ 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИВЕДЕННЫХ МАСС ШАТУННО-КРИВОШИПНОГО МЕХАНИЗМА. ТОЧНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ПОРШНЯ

Шатун имеет сложное движение: поступательное — вдоль оси цилиндра с ускорением j и вращательное — около центра A с переменной угловой скоростью β' и ускорением β'' .

Соответственно этому на шатун массы M действуют (фиг. 11): сила инерции Mj , центробежная сила $Ma(\beta')^2$, приложенные в центре тяжести, и тангенциальная сила инерции P_t .

Величину ее можно получить суммированием сил инерции отдельных точек шатуна, имеющих элементарную массу Δm .

Если обозначить через x расстояние такой точки от центра A , то получим:

$$P_t = \sum \Delta m x \beta'' = Ma \beta'' \quad (26)$$

Момент этой силы относительно точки A будет:

$$M_A = \sum \Delta m x \beta'' x = \sum \Delta m x^2 \beta'' = J_A \beta'' \quad (27)$$

Расстояние силы P_t от точки A будет:

$$l = \frac{M_A}{P_t} = \frac{J_A}{Ma} \quad (28)$$

Однако определение нагрузки точек A и B по этим силам практически не удобно, и потому для упрощения обычно масса шатуна условно заменяется двумя массами (фиг. 11, б)

$$M_1 = M_n = M \frac{a-L}{L} \quad \text{и} \quad M_2 = M_{вр} = M \frac{a}{L}, \quad (29)$$

из которых первая имеет только поступательное, а вторая только вращательное движение около центра O .

Системы (фиг. 11, а и 11, б) эквивалентны, если суммы проекций сил на оси координат и моменты относительно какой-либо точки (например A) одинаковы, т. е. при следующих условиях:

$$P_x = Ma(\beta')^2 \sin \beta - P_t \cos \beta = M_{вр} R \omega^2 \sin \alpha; \quad (30)$$

$$P_y = Mj - Ma(\beta')^2 \cos \beta - P_t \sin \beta = M_{вр} R \omega^2 \cos \alpha + M_n j; \quad (31)$$

$$M_A = Mja \sin \beta - J_A \beta'' = M_{вр} R \omega^2 L \sin(\alpha + \beta). \quad (32)$$

Как будет показано далее, соотношения (29) удовлетворяют лишь уравнениям (30) и (31).

Для доказательства определим вначале значения β' , β'' и j .

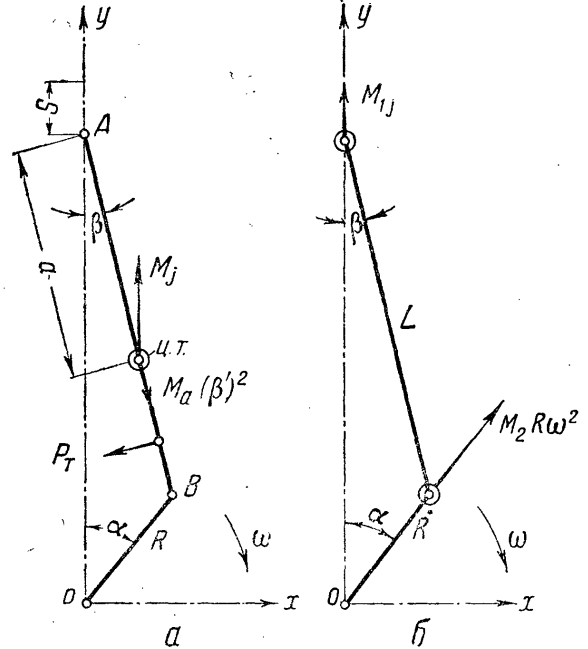
Из треугольника AOB

$$\sin \beta = \frac{R}{L} \sin \alpha. \quad (33)$$

Взяв первую и вторую производные по времени и обозначая $\alpha' = \omega$, имеем:

$$\beta' = \frac{R}{L} \omega \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}; \quad (34)$$

$$\beta'' = \frac{R}{L} \omega \frac{-\omega \sin \alpha \cos \beta + \beta' \sin \beta \cos \alpha}{\cos^2 \beta}.$$



Фиг. 11.

Принимая во внимание уравнение (34), имеем окончательно:

$$\beta'' = \frac{R}{L} \omega^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha \sin \beta}{\cos^3 \beta} \frac{R}{L} - \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \right). \quad (35)$$

Величина j найдется, как вторая производная пути поршня S по времени

$$\left. \begin{aligned} S &= R + L - (R \cos \alpha + L \cos \beta); \\ S' &= R\omega \sin \alpha + L\beta' \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Учитывая соотношение (34), имеем:

$$S' = R\omega \left(\sin \alpha + \cos \alpha \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \right); \quad (37)$$

$$\begin{aligned} j = S'' &= R\omega \left(\omega \cos \alpha - \omega \sin \alpha \frac{\sin \beta}{\cos \beta} + \cos \alpha \frac{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} \beta' \right) = \\ &= R\omega^2 \left(\cos \alpha - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta} + \frac{R}{L} \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^3 \beta} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Подставляя найденные значения β' , β'' и j в уравнения (30), (31) и (32), получим:

$$\begin{aligned} Ma \left(\frac{R}{L} \omega \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right)^2 \sin \beta - \\ - Ma \frac{R}{L} \omega^2 \left[\frac{\cos^2 \alpha \sin \beta}{\cos^3 \beta} \frac{R}{L} - \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \right] \cos \beta = M_{\text{вп}} R \omega^2 \sin \alpha. \end{aligned} \quad (30')$$

Вынося за скобку в левой части уравнения величину $Ma \frac{R}{L} \omega^2$, делим обе части уравнения на $R\omega^2$ и после очевидного приведения подобных членов находим значение массы M_2 , удовлетворяющее уравнению (30)

$$M_{\text{вп}} = \frac{a}{L} M. \quad (29')$$

Величина M_1 определится из уравнения (31)

$$M_{\text{п}} = M - \frac{Ma(\beta')^2 \cos \beta + P_t \sin \beta + M_{\text{вп}} R \omega^2 \cos \alpha}{j}. \quad (31')$$

Воспользовавшись отношениями (34), (26), (35), (29') и (38), имеем:

$$M_{\text{п}} = M - \frac{Ma \frac{R^2}{L^2} \omega^2 \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \cos \beta + Ma \frac{R}{L} \omega^2 \cdot \left(\frac{\cos^2 \alpha \sin \beta}{\cos^3 \beta} \cdot \frac{R}{L} - \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \right) \sin \beta + Ma \frac{R}{L} \omega^2 \cos \alpha}{R\omega^2 \left(\cos \alpha - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta} + \frac{R}{L} \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^3 \beta} \right)}.$$

Вынося в числителе за скобку величину $Ma \frac{R}{L} \omega^2$, после приведения подобных членов получаем в скобках в числителе и в знаменателе одинаковые выражения.

После сокращений имеем:

$$M_{\text{п}} = M - \frac{a}{L} M = M \frac{a-L}{L}. \quad (29'')$$

Теперь посмотрим, удовлетворяют ли уравнению (32) найденные значения $M_{\text{п}}$ и $M_{\text{вп}}$.

Вообще уравнение (32) можно представить так:

$$\begin{aligned} Mja \sin \beta - J_A \beta'' - M_{\text{вп}} R \omega^2 L \sin(\alpha + \beta) = \\ = Ma [j \sin \beta - R \omega^2 \sin(\alpha + \beta)] - J_A \beta'' = \Delta. \end{aligned} \quad (32)$$

Если значения $M_{\text{п}}$ и $M_{\text{вп}}$ удовлетворяют уравнению (32), то $\Delta = 0$, в противном случае $\Delta \neq 0$.