Огюстен Луи Коши

Дифференциальное и интегральное исчисление

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
О-36

Огюстен Луи Коши
О-36 Дифференциальное и интегральное исчисление / Огюстен Луи Коши – М.: Книга по Требованию, 2013. – 256 с.

ISBN 978-5-458-26029-9

Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении, преподаваемых в Королевской Политехнической школе

ISBN 978-5-458-26029-9

ЕГО СІЯТЕЛЬСТВУ

ГРАФУ АЛЕКСАНДРУ АЛЕКСАНДРОВИЧУ

ТОРМАСОВУ,

въ знакъ искренней дружбы и признательности

посвящаетъ Переводчикъ.

ОТЪ ПЕРЕВОДЧИКА.

Издавая нынѣ книгу: *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal*, соч. *Коши*, переведенную мною на Русскій языкъ нѣсколько лѣтъ тому назадъ, я имѣлъ въ виду познакомить моихъ соотечественниковъ съ произведеніемъ автора, коего труды на ученомъ поприщѣ, уже ознаменованы важными открытіями въ Анализѣ. Г. Коши, въ изложеніи правилъ дифференціальнаго и интегральнаго изчисленія, уклоняется отъ способовъ предшествовавшихъ ему писателей, и почти всегда преимущество остается на его сторонѣ. По сей-то причинѣ, да будетъ мнѣ дозволено изъявить желаніе, чтобъ сей переводъ былъ принятъ за руководство въ Учебныхъ Заведеніяхъ.

Я знаю, что Г. Коши издалъ новѣйшее сочиненіе о дифференціальномъ изчисленіи; но въ составъ онаго вовсе не входитъ интегральное. Я было намѣревался поручить кому-либо перевести подъ моимъ руководствомъ сію книгу, и замѣнить первые 20ть уроковъ симъ новымъ переводомъ. Но дабы оный могъ вполнѣ соотвѣтствовать интегральному изчисленію, надлежало-бы сдѣлать значительныя измѣненія въ текстѣ сочинителя, что, по моему мнѣнію, переводчикъ не долженъ дозволять себѣ ни въ какомъ случаѣ. Къ тому жь, сіе новое сочиненіе не содержитъ въ себѣ никакихъ значительныхъ улучшеній противъ перваго.

Если читатели удостоятъ сію книгу своего вниманія; то я обязуюсь издать продолженіе интегральнаго изчисленія, коего переводъ будетъ сдѣланъ подъ моимъ надзоромъ. Сіе продолженіе не было еще издано на Французскомъ языкѣ, а находится только въ рукописи, которую, по дружескимъ сношеніямъ, я успѣлъ пріобрѣсти.

ПРЕДУВѢДОМЛЕНІЕ ОТЪ СОЧИНИТЕЛЯ.

Сіе сочиненіе, составленное по порученію Ученаго Совѣта Королевской Политехнической школы, заключаетъ въ себѣ краткое изложеніе читанныхъ мною въ сей школѣ лекцій о дифференціальномъ и интегральномъ изчисленіи. Все сочиненіе будетъ состоять изъ двухъ частей, сообразно съ раздѣленіемъ курса, продолжающагося два года. Нынѣ издаю первую часть, содержащую сорокъ уроковъ; первые двадцать составляютъ дифференціальное изчисленіе, а послѣдніе — интегральное. Излагаемые здѣсь способы, во многомъ различествуютъ отъ тѣхъ, которые приняты въ другихъ сочиненіяхъ о томъ же предметѣ.

Главною моею цѣлью было, соединить строгость въ доказательствахъ (которую всегда старался сохранить въ моемъ *Cours d'Analyse*) съ простотою, происходящею отъ непосредственнаго разсматриванія безконечно-малыхъ количествъ. По сей-то причинѣ, я вовсе не употреблялъ разложенія функцій въ безконечные ряды, когда сіи ряды были расходящіеся; также, я отнесъ Тейлорову формулу къ интегральному изчисленію; ибо сія формула вообще справедлива только въ такомъ случаѣ, когда рядъ входящій въ оную, содержитъ конечное число членовъ, съ дополнительнымъ опредѣленнымъ интеграломъ. Я знаю, что знаменитый авторъ *Аналитической Механики*, принялъ сію формулу за основаніе своей теоріи *производныхъ функцій*. Но не смотря на глубокое уваженіе, должное имени сего великаго мужа, почти всѣ математики признаютъ нынѣ, что употребленіе рядовъ расходящихся, можетъ, во многихъ случаяхъ, привести къ выводамъ ошибочнымъ; прибавлю даже, что разлагая нѣкоторыя функціи посредствомъ Тейлоровой теоремы, находимъ ряды, которые, хотя и кажутся сходящимися, однако же не выражаютъ разлагаемой функціи (*смот.* конецъ 38^го^ урока). Впрочемъ, надѣюсь, что читатели сей книги, удостовѣрятся въ томъ, что правила, относящіяся къ дифференціальному изчисленію, и главныя приложенія онаго, могутъ быть изложены безъ пособія безконечныхъ рядовъ.

Я счёлъ за нужное, доказать въ интегральномъ изчисленіи существованіе *интеграловъ* или *первообразныхъ функцій*, прежде нежели изслѣдовалъ ихъ различныя свойства. Для сего, надлежало дать понятіе объ *интегралахъ взятыхъ между данными предѣлами* или объ *опредѣленныхъ интегралахъ*. Но какъ сіи послѣдніе могутъ имѣть, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, величины безконечныя, или неопредѣленныя: то необходимо было разыскать условія, при которыхъ сіи самые интегралы имѣютъ одну величину, конечную, и совершенно опредѣленную. Простѣйшій способъ для разрѣшенія сего вопроса, состоитъ въ разсматриваніи *близкопредѣльныхъ опредѣленныхъ интеграловъ*, о которыхъ говорено въ 25мъ урокѣ. Также, между безконечнымъ числомъ значеній интеграла, коего величина неопредѣленна, существуетъ одна примѣчательная величина, которую я назвалъ *главною величиною*. Разсматриваніе близкопредѣльныхъ интеграловъ и главныхъ величинъ интеграловъ, весьма полезно при рѣшеніи многихъ задачъ. Оно приводитъ къ многоразличнымъ формуламъ, посредствомъ которыхъ можно вывести величины разныхъ опредѣленныхъ интеграловъ, что уже показано мною въ разсужденіи представленномъ въ Институтъ въ 1814 году. Въ 34мъ и 39мъ урокахъ помѣщена подобная формула, которая и приложена къ разысканію величинъ многихъ опредѣленныхъ интеграловъ, изъ коихъ нѣкоторыя были уже извѣстны.

ОГЛАВЛЕНIЕ.

Стран.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИЗЧИСЛЕНIЕ.

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНІЕ УРОКОВЪ

преподаваемыхъ

въ Королевской политехнической школѣ

Г. А. Л. КОШИ.

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ ИЗЧИСЛЕНІЕ.

УРОКЪ ПЕРВЫЙ.

О перемѣнныхъ величинахъ, ихъ предѣлахъ, и величинахъ безконечно-малыхъ.

Перемѣннымъ или измѣняемымъ количествомъ называется такое количество, которое послѣдовательно переходитъ чрезъ многія величины различныя между собою. Постоянное же количество есть то, коего величина остается одна и та же. Ежели величины, приписываемыя какому либо перемѣнному количеству приближаются болѣе и болѣе къ величинѣ опредѣленной, такъ что наконецъ разнствуютъ отъ оной столь мало сколько угодно, то сія послѣдняя величина называется *предѣломъ* всѣхъ прочихъ. Такъ, на примѣръ, площадь круга есть предѣлъ, къ коему площади вписанныхъ правильныхъ многоугольниковъ приближаются тѣмъ ближе, чѣмъ болѣе увеличивается число ихъ сторонъ; равнымъ образомъ, радіусы векторы проведенные изъ центра Гиперболы къ ея точкамъ удаляющимся болѣе и болѣе отъ сего центра, составляютъ съ осью x углы имѣющіе предѣломъ уголъ, составленный ассимптотою съ тою же осью, и проч. .... Для краткости мы будемъ означать предѣлъ, къ которому стремится данная перемѣнная величина, поставляя передъ оной буквы *пр*.

Иногда предѣлы, къ коимъ приближаются перемѣнныя выраженія представляются въ неопредѣленномъ видѣ; не смотря на сіе, онѣ имѣютъ однако же совершенно опредѣленныя величины, которыя можно найти посредствомъ различныхъ пріемовъ. Такъ, напримѣръ, предѣлы къ коимъ безпрестанно приближаются два перемѣнныя выраженія

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}, \quad (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

по мѣрѣ того, какъ α стремится къ нулю, представляются въ неопредѣленныхъ видахъ $\frac{0}{0}$, $1^{\pm\infty}$; не смотря на сіе, оба сіи предѣла имѣютъ величины опредѣленныя, которыя можно вычислить слѣдующимъ образомъ:

Очевидно, что для весьма малыхъ численныхъ величинъ α, будемъ имѣть слѣдующія неравенства

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

Слѣдовательно отношеніе $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$, заключающееся всегда между двумя количествами $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} = 1$, и $\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} = \cos\alpha$, изъ коихъ первое служитъ предѣломъ второму, будетъ само имѣть предѣломъ единицу.

Теперь будемъ искать предѣлъ къ коему стремится выраженіе $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, по мѣрѣ того, какъ α приближается къ нулю. Предполагая сперва что α есть количество положитель-