

Огюстен Луи Коши

**Дифференциальное и интегральное
исчисление**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
О-36

О-36 **Огюстен Луи Коши**
Дифференциальное и интегральное исчисление / Огюстен Луи Коши – М.: Книга по Требованию, 2013. – 256 с.

ISBN 978-5-458-26029-9

Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении, преподаваемых в Королевской Политехнической школе

ISBN 978-5-458-26029-9

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ЕГО СІЯТЕЛЬСТВУ

ГРАФУ АЛЕКСАНДРУ АЛЕКСАНДРОВИЧУ

ТОРМАСОВУ,

въ знакъ искренней дружбы и признательности

посвящаетъ Переводчикъ.

О Т Ъ П Е Р Е В О Д Ч И К А .

Издавая нынѣ книгу: *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal*, соч. Коши, переведенную мною на Русскій языкъ нѣсколько лѣтъ тому назадъ, я имѣлъ въ виду познакомить моихъ соотечественниковъ съ произведеніемъ автора, коего труды на ученомъ поприщѣ, уже ознаменованы важными открытіями въ Анализѣ. Г. Коши, въ изложеніи правилъ дифференціального и интегрального изчисленія, уклоняется отъ способовъ предшествовавшихъ ему писателей, и почти всегда преимущественно останавливается на его сторонѣ. По сей-то причинѣ, да будетъ мнѣ дозволено изъявить желаніе, чѣмъ сей переводъ былъ принятъ за руководство въ Учебныхъ Заведеніяхъ.

Я знаю, что Г. Коши издалъ новѣйшее сочиненіе о дифференціальномъ изчисленіи; но въ составъ онаго вовсе не входилъ интегральное. Я было намѣревался поручить кому-либо перевести подъ моимъ руководствомъ сію книгу, и замѣнить первые 20^{ты} уроковъ симъ новымъ переводомъ. Но дабы оный могъ вполне соответствовать интегральному изчисленію, надлежало-бы сдѣлать значительныя измѣненія въ текстѣ сочинителя, что, по моему мнѣнію, переводчикъ не долженъ позволять себѣ ни въ какомъ случаѣ. Къ тому жь, сіе новое сочиненіе не содержитъ въ себѣ никакихъ значительныхъ улучшеній противъ перваго.

Если читатели удостоятъ сію книгу своего вниманія; то я обязуюсь издавать продолженіе интегрального изчисленія, коего переводъ будетъ сдѣланъ подъ моимъ надзоромъ. Сіе продолженіе не было еще издано на Французскомъ языкѣ, а находится только въ рукописи, которую, по дружескимъ сношеніямъ, я успѣлъ приобрести.

ПРЕДУВЪДОМЛЕНИЕ ОТЪ СОЧИНИТЕЛЯ.

Сіе сочиненіе, соспавленное по порученію Ученаго Совѣта Королевской Политехнической школы, заключаепть въ себѣ краткое изложеніе чипанныхъ мною въ сей школѣ лекцій о дифференціальномъ и интегральномъ изчисленіи. Все сочиненіе будетъ состоять изъ двухъ частей, сообразно съ раздѣленіемъ курса, продолжающагося два года. Нынѣ издаю первую часть, содержащую сорокъ уроковъ; первые двадцать соспавляютъ дифференціальное изчисленіе, а послѣдніе — интегральное. Излагаемые здѣсь способы, во многомъ различеспвуютъ отъ тѣхъ, которые приняты въ другихъ сочиненіяхъ о томъ же предметѣ.

Главною моею цѣлью было, соединить спрогоспъ въ доказательспвахъ (которую всегда спарался сохранишь въ моемъ *Cours d'Analyse*) съ проспопою, происходящею отъ непосредспвеннаго разспаприванія безконечно-малыхъ количеспвъ. По сей-по причинѣ, я вовсе не упопрелялъ разложенія функцій въ безконечные ряды, когда сіи ряды были расходящеся; также, я опнесъ Тейлорову формулу къ интегральному изчисленію; ибо сія формула вообще справедлива только въ такомъ случаѣ, когда рядъ входящій въ оную, содержитъ конечное число членовъ, съ дополнителнымъ опредѣленнымъ интеграломъ. Я знаю, что знаменитый авпоръ *Аналитической Механики*, принялъ сію формулу за основаніе своей теоріи *производныхъ функцій*. Но не спопря на глубокое уваженіе, должное имени сего великаго мужа, почти всѣ математики признаютъ нынѣ, что упопреленіе рядовъ расходящихся, можетъ, во многихъ случаяхъ, привеспи къ выводамъ ошибочнымъ; прибавлю даже, что разлагая нѣкоторыя функцій посредствомъ Тейлоровой теоремы, находимъ ряды, которые, хопя и кажутся сходящимися, однако же не выражаютъ разлагаемой функцій (спот. конецъ 38го урока). Впрочемъ, надѣюсь, что читатели сей книги, удосповѣрятся въ томъ, что правила, относящіяся къ дифференціальному изчи-

сленію, и главныя приложенія онаго, могутъ быть изложены безъ пособія безконечныхъ рядовъ.

Я счёлъ за нужное, доказать въ интегральномъ изчисленіи существованіе *интеграловъ* или *первообразныхъ функций*, прежде нежели изслѣдовалъ ихъ различныя свойства. Для сего, надлежало дать понятіе объ *интегралахъ взятыхъ между данными предѣлами* или объ *опредѣленныхъ интегралахъ*. Но какъ сіи послѣдніе могутъ имѣть, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, величины безконечныя, или неопредѣленныя: то необходимо было разыскать условія, при которыхъ сіи самыя интегралы имѣютъ одну величину, конечную, и совершенно опредѣленную. Простѣйшій способъ для разрѣшенія сего вопроса, состоитъ въ разсмаприваніи *близкопредѣльныхъ опредѣленныхъ интеграловъ*, о которыхъ говорено въ 25^{мъ} урокъ. Также, между безконечнымъ числомъ значеній интеграла, коего величина неопредѣленна, существуетъ одна примѣчательная величина, которую я назвалъ *главною величиною*. Разсмаприваніе близкопредѣльныхъ интеграловъ и главныхъ величинъ интеграловъ, весьма полезно при рѣшеніи многихъ задачъ. Оно приводитъ къ многоразличнымъ формуламъ, посредствомъ которыхъ можно вывести величины разныхъ опредѣленныхъ интеграловъ, что уже показано мною въ разсужденіи предсказанномъ въ Инспитуптѣ въ 1814 году. Въ 34^{мъ} и 39^{мъ} урокахъ помѣщена подобная формула, которая и приложена къ разысканію величинъ многихъ опредѣленныхъ интеграловъ, изъ коихъ нѣкоторыя были уже извѣстны.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	Стран.
<i>Отъ переводчика</i>	I
<i>Предувѣдомленіе отъ сочинителя</i>	III
ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ ИЗЧИСЛЕНІЕ.	
УРОКЪ 1-й. <i>О переменныхъ величинахъ, ихъ предѣлахъ, и величинахъ безконечно-малыхъ</i>	3
УРОКЪ 2-й. <i>О непрерывныхъ и прерывныхъ функціяхъ. Геометрическое изображеніе непрерывныхъ функцій</i>	8
УРОКЪ 3-й. <i>О производныхъ функціяхъ одной переменной</i>	13
УРОКЪ 4-й. <i>Дифференцированіе функцій одной переменной</i>	18
УРОКЪ 5-й. <i>Дифференціалъ суммы нѣсколькихъ функцій равенъ суммѣ ихъ дифференціаловъ. Слѣдствія выводимыя изъ сего правила. Дифференціалы мнимыхъ функцій</i>	23
УРОКЪ 6-й. <i>Употребленіе дифференціаловъ и производныхъ функцій при рѣшеніи нѣкоторыхъ задачъ. Наибольшая и наименьшая величина функцій одной измѣняемой. Величины дроби представляющихся въ видѣ $\frac{0}{0}$</i>	28
УРОКЪ 7-й. <i>О выраженіяхъ представляющихся въ неопредѣленномъ видѣ $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0, и проч. Взаимная зависимость между отношеніемъ конечныхъ разностей и производной функціей</i>	34
УРОКЪ 8-й. <i>Дифференціалы функцій нѣсколькихъ переменныхъ. Частныя производныя функцій и частныя дифференціалы</i>	39
УРОКЪ 9-й. <i>Объ употребленіи частныхъ производныхъ при дифференцированіи сложныхъ функцій. Дифференціалы неявныхъ функцій</i>	44

VI

Стран.

Урокъ 10-й. Теорема однородныхъ функций. Наибольшия и наименьшия величины функций нѣсколькихъ переменныхъ	49
Урокъ 11-й. Объ употребленіи неопредѣленныхъ множителей при разысканіи наибольшихъ и наименьшихъ величинъ	55
Урокъ 12-й. Дифференціалы и производныя функции разныхъ порядковъ выражений заключающихъ одну переменную. Объ измѣненіи переменнаго независимаго количества	61
Урокъ 13-й. Дифференціалы разныхъ порядковъ функций многихъ переменныхъ	67
Урокъ 14-й. Способы облегчающіе изысканіе полныхъ дифференціаловъ функций многихъ переменныхъ. Символическія выраженія для сихъ дифференціаловъ	73
Урокъ 15-й. Объ отношеніяхъ существующихъ между функциями одной переменной, ихъ производными и дифференціалами разныхъ порядковъ. Объ употребленіи сихъ дифференціаловъ при разысканіи наибольшихъ и наименьшихъ величинъ	79
Урокъ 16-й. Объ употребленіи дифференціаловъ разныхъ порядковъ при разысканіи наибольшихъ и наименьшихъ величинъ функций многихъ переменныхъ	84
Урокъ 17-й. Объ условіяхъ, кои должны быть выполнены для того, чтобы полный дифференціалъ не перемѣнялъ знака, тогда, какъ измѣняются величины дифференціаловъ переменныхъ независимыхъ количествъ	90
Урокъ 18-й. Дифференціалы какой-либо функции многихъ переменныхъ величинъ, изъ коихъ каждая есть линейная функция другихъ переменныхъ независимыхъ количествъ. Разложеніе цѣлыхъ функций на вещественные множители первой и второй степени	96
Урокъ 19-й. Объ употребленіи производныхъ функций и дифференціаловъ разныхъ порядковъ при разложеніи функций	103

УРОКЪ 20-й. *Разложене рациональныхъ (соизмѣримыхъ) дробей* 108

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИЗЧИСЛЕНИЕ.

УРОКЪ 21-й. *Объ опредѣленныхъ (междупредѣльныхъ или частныхъ) интегралахъ* 113

УРОКЪ 22-й. *Формулы опредѣляющія тожныя, или приближенныя величины междупредѣльныхъ интеграловъ* . . 119

УРОКЪ 23-й. *Разложене опредѣленнаго интеграла на нѣсколько другихъ. Мнимые опредѣленные интегралы. Геометрическое значене вещественныхъ опредѣленныхъ интеграловъ. Разложене функции находящейся подъ знакомъ \int на два множителя, изъ коихъ одинъ удерживаетъ постоянно одинъ и тотъ же знакъ* . 125

УРОКЪ 24-й. *О частныхъ интегралахъ, величины коихъ суть или безконечныя, или неспредѣленные. Главныя величины неопредѣленныхъ интеграловъ* 130

УРОКЪ 25-й. *О близкопредѣльныхъ частныхъ интегралахъ* 135

УРОКЪ 26-й. *О неопредѣленныхъ интегралахъ* 141

УРОКЪ 27-й. *Различныя свойства неопредѣленныхъ интеграловъ. Способы служащія для опредѣленія оныхъ* . . . 147

УРОКЪ 28-й. *О неопредѣленныхъ интегралахъ заключающихъ въ себѣ алгебраическія функции* 153

УРОКЪ 29-й. *Объ интегрированіи и приведеніи въ простѣйшій видъ двучленныхъ дифференціаловъ; о нѣкоторыхъ другихъ дифференціальныхъ выраженіяхъ такого же рода* 159

УРОКЪ 30-й. *О неопредѣленныхъ интегралахъ заключающихъ въ себѣ неопредѣленно-степенныя, логарифмическія, тригонометрическія и круговыя функции* 164

УРОКЪ 31-й. *О разысканіи величинъ, и о приведеніи въ простѣйшій видъ неопредѣленныхъ интеграловъ, въ коихъ функция находящаяся подъ знакомъ \int есть произведеніе двухъ множителей равныхъ нѣкоторымъ степенямъ синуса и косинуса переменнй* . . . 170

VIII

Стран.

УРОКЪ 32-й.	<i>Переходъ отъ неопредѣленныхъ интеграловъ къ опредѣленнымъ</i>	176
УРОКЪ 33-й.	<i>Дифференцированіе и интегрированіе подъ знакомъ \int. Интегрированіе дифференціальныхъ выраженій, заключающихъ въ себѣ нѣсколько переменныхъ независимыхъ величинъ</i>	182
УРОКЪ 34-й.	<i>Сравненіе обоихъ родовъ простыхъ интеграловъ, получаемыхъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ чрезъ двойное интегрированіе</i>	188
УРОКЪ 35-й.	<i>Дифференцированіе опредѣленныхъ интеграловъ относительно къ переменной входящей въ функцію находящуюся подъ знакомъ \int, между предѣлами интегрированія. Интегралы высшихъ порядковъ для функций содержащихъ одну переменную</i>	194
УРОКЪ 36-й.	<i>Преобразование какихъ ни-есть функций переменной x или $x + h$ въ цѣлыя функции переменной x или h, съ дополнительнымъ опредѣленнымъ Интеграломъ. Другія выраженія для сихъ самыхъ Интеграловъ</i>	199
УРОКЪ 37-й.	<i>Тейлорова и Маклоренова теоремы. Разпространеніе сихъ теоремъ на функции нѣсколькихъ переменныхъ</i>	204
УРОКЪ 38-й.	<i>Правила относящіяся къ сходящимся рядамъ. Приложеніе сихъ правилъ къ Маклореновой теоремѣ</i>	209
УРОКЪ 39-й.	<i>О неопредѣленно-степенныхъ и логарифмическихъ мнимыхъ выраженіяхъ. Употребленіе сихъ выраженій при разысканіи величинъ опредѣленныхъ и неопредѣленныхъ Интеграловъ</i>	215
УРОКЪ 40-й.	<i>Интегрированіе посредствомъ рядовъ</i>	221
	<i>Прибавленіе согинителя</i>	227
	<i>Примѣганія переводчика</i>	241



КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ УРОКОВЪ

преподаваемыхъ

въ Королевской политехнической школѣ

Г. А. Л. КОШИ.

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ ИЗЧИСЛЕНІЕ.

УРОКЪ ПЕРВЫЙ.

*О переменныхъ величинахъ, ихъ предѣлахъ, и величинахъ
безконечно - малыхъ.*

Переменнымъ или изменяемымъ количествомъ называется такое количество, которое послѣдовательно переходитъ чрезъ многія величины различныя между собою. Постоянное же количество есть то, коего величина остается одна и та же. Если величины, приписываемыя какому либо переменному количеству приближаются болѣе и болѣе къ величинѣ определенной, такъ что наконецъ разнесутся отъ оной столь мало сколько угодно, то сія послѣдняя величина называется *предѣломъ* всѣхъ прочихъ. Такъ, на примѣръ, площадь круга есть предѣлъ, къ коему площади вписанныхъ правильныхъ многоугольниковъ приближаются шѣмъ ближе, чѣмъ болѣе увеличивается число ихъ сторонъ; равнымъ образомъ, радіусы векторы проведенные изъ центра Гиперболы къ ея почкамъ удаляющимся болѣе и болѣе отъ сего центра, составляютъ

съ осью x углы имѣющіе предѣломъ уголъ, составленный ассимпшопною съ шюю же осью, и проч. Для краткости мы будемъ означать предѣлъ, къ которому спремится данная переменная величина, поставляя передъ оной буквы *пр*.

Иногда предѣлы, къ коимъ приближаются переменныя выраженія представляющія въ неопредѣленномъ видѣ; не смотря на сіе, онѣ имѣють однако же совершенно опредѣленныя величины, копорыя можно найти посредствомъ различныхъ приѣмовъ. Такъ, напримѣръ, предѣлы къ коимъ безпреспанно приближаются два переменныя выраженія

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

по мѣрѣ того, какъ α спремится къ нулю, представляющія въ неопредѣленныхъ видахъ $\frac{0}{0}$, $1^{\pm\infty}$; не смотря на сіе, оба сіи предѣла имѣють величины опредѣленныя, копорыя можно вычислить слѣдующимъ образомъ:

Очевидно, что для весьма малыхъ численныхъ величинъ α , будемъ имѣть слѣдующія неравенства

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} > \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha}.$$

Слѣдовательно отношеніе $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$, заключающееся всегда между двумя количествами $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = 1$, и $\frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} = \cos \alpha$, изъ коихъ первое служишь предѣломъ второму, будетъ само имѣть предѣломъ единицу.

Теперь будемъ искать предѣлъ къ коему спремится выраженіе $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, по мѣрѣ того, какъ α приближается къ нулю. Предполагая сперва что α есть количество положитель-