

Н. Т. Повало–Швейковский

**Статистические методы в теории
турбулентности**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
Н11

Н11 **Н. Т. Повало–Швейковский**
Статистические методы в теории турбулентности / Н. Т. Повало–Швейковский – М.: Книга по Требованию, 2015. – 102 с.
ISBN 978-5-458-58148-6

ISBN 978-5-458-58148-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2015
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2015

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ВВЕДЕНИЕ

Еще лет десять назад теоретическое исследование турбулентного движения велось с точки зрения решения регулярных, математически точно сформулированных гидродинамических задач. Границы области, занятой потоком, рассматривались как геометрически правильные поверхности, внутри которых и изучалось поле скоростей в вязкой жидкости на основании уравнений гидродинамики.

Основной вопрос, который ставился в то время, был вопрос об устойчивости ламинарного движения и об условиях возникновения турбулентного режима. Делались попытки дать ответ на него, исходя из уравнений гидродинамики и изучая влияние малых возмущений, механически закономерных — вихревых или волновых.

Неудача попыток решения вопроса, делавшихся на основании этих предпосылок, и более точные экспериментальные измерения привели к мысли о чисто случайном, беспорядочном характере пульсации скоростей и о необходимости исследования турбулентного движения с точки зрения статистической механики. Обстоятельный обзор воззрений, господствовавших в то время, можно найти в статье Кармана [1].

В дальнейшем теоретическое исследование турбулентности пошло в двух направлениях: статистики пульсаций и скоростей, с одной стороны, и исследования распределения средних скоростей в потоке — с другой.

Статистика скоростей строилась на основе обычных методов физической статистики, приложимых к рядам статистически независимых явлений. Работы А. А. Фридмана и Бюргерса показали, что такой подход к решению вопроса не может привести к объяснению основных особенностей турбулентного движения — распределения скоростей в установившемся турбулентном потоке и закона сопротивления.

Более удачным оказался второй путь — полуэмпирического изучения осредненных скоростей. Начиная с чисто эмпирического подхода и построения эмпирических формул распределения скорости — по данным наблюдения и опытному материалу Блязиуса (закон одной седьмой), этот путь исследования скоро привел к установлению общих закономерностей в турбулентном потоке. Эти закономерности были выведены из принципа подобия Прандтлем и Карманом, но оказались легко объяснимыми с точки зрения переноса количеств движения скоростями пульсации. Чисто эмпирическое обоснование теории и полученных формул у Прандтля уступило место более рациональному объяснению у Кармана. Теория переноса количества движения, впервые выдвинутая еще Буссинеском и затем развитая О. Рейнольдсом, Дж. Тэйлором и В. Шмидтом, стала все более выдвигаться в качестве теоретического основания для объяснения выводов, полученных из принципов подобия и проверенных наблюдением. Элементарная теория длины пути перемешивания Прандтля сослужила хорошую службу при обработке экспериментальных данных с точки зрения теории переноса количества движения.

Теория переноса связывает распределение средних скоростей в определенный момент времени с распределением в начальный момент при нестационарном движении — в виде зависимости, выражаемой линейным функционалом.

Мало того, самая операция осреднения выражается линейным интегральным преобразованием, и потому по теореме Ф. Рисса само понятие осреднения приводит к выражению средних скоростей в виде линейных функционалов. Таким образом, если исходить из того физического представления о природе турбулентности, к которому приводят теории Прандтля, Кармана и Дж. Тэйлора, то естественным методом для изучения турбулентности должен явиться метод линейных функционалов.

Статистика стохастически связанных рядов является частным приложением общей теории линейных функционалов. Применение этой теории к статистике было впервые сделано Башелье, который и вывел основные уравнения статистики связанных рядов для одного частного случая теории вероятностей в 1912 г. В 1915 г. эти уравнения были применены Смолуховским в более общем виде к некоторым задачам математической физики. Затем этими же уравнениями пользовались Планк, Эйнштейн и Фокер. Наконец, в 1931 г. А. Н. Колмогоров придал уравнениям Башелье наиболее общий вид. С этих пор теория линейных функционалов стала основой статистики связанных рядов (в условиях, определенных А. А. Марковым) и в свою очередь обогатилась теорией уравнений Башелье — Колмогорова.

Вполне естественно, что теория переноса, т. е. в конечном счете статистика связанных рядов, каковой являются ряды состояний турбулентного движения в различные моменты времени, привела к выводам, согласным с данными наблюдения, т. е. дала те результаты, к которым тщетно стремилось статистическое исследование, основанное на обычных методах рассмотрения стохастически независимых событий.

Цель настоящей статьи — связать воззрения Прандтля и Кармана на физическую природу турбулентности и делаемые ими выводы с общей теорией уравнений Башелье — Колмогорова. Наибольшие затруднения представляет при этом предельный случай стационарного распределения средних скоростей. В то же время случай стационарного прямолинейного потока являлся единственным хорошо изученным в экспериментальном отношении примером турбулентного движения. Это обстоятельство объясняет, почему статистика связанных рядов так мало до сих пор применялась при изучении турбулентности.

Наибольшее развитие методы обычной статистики получили в работах Бюргерса, а потому мы и начинаем с краткого изложения основных предпосылок его теории, с тем чтобы показать, почему, по нашему мнению, эти предпосылки не могут привести к выводам, согласным с наблюдаемой действительностью.

Формулы Кармана не вполне точны, вывод их, сделанный автором, возбуждает некоторые сомнения. Тем не менее, их связь с уравнениями Башелье — Колмогорова настолько очевидна, а их совпадение с данными опыта настолько значительно, что мы позволили себе подробно остановиться на их разборе, тем более, что они стали за последнее время классическими.

Начиная с 1933 г., появился ряд статей и сообщений Маттиоли, в которых он рассматривает перенос турбулентным перемешиванием не только количества движения, но и момента количества движения „молей“, или тех конечных масс, беспорядочное движение которых обуславливает явление турбулентности.

Маттиоли выводит два основных уравнения для турбулентного движения жидкости в круглой трубе. Вывод их основан на чрезвычайно сомнительных предпосылках и приводит к тому, что во втором уравнении появляется некоторая сила трения. Эта „таинственная“, по выражению Кармана (Доклад на съезде прикладной математики в Кембридже.) сила не может быть получена из уравнений Навье — Стокса при помощи осреднения с теми предпосылками и правилами осреднения, которые приняты были до сих пор в теории турбулентности.

Применяя полученные уравнения для вывода закона сопротивления и распределения средних скоростей, Маттиоли делает еще новый ряд голословных предположений и в результате получает все те же формулы Кармана.

Казалось бы, таким образом, что вся теория Маттиоли и его уравнения, в лучшем случае, совершенно бесполезны.

В последнее время, однако, закончена большая работа Г. А. Гуржиенко [2], работа, по своим результатам одна из наиболее ценных. Гуржиенко, исходя из уравнений Маттиоли, но поставив при их интегрировании естественные пограничные условия, определяемые пограничным ламинарным слоем у стенок трубы, получил законы распределения скоростей и сопротивления, с большой степенью точности совпадающие с данными измерений.

Задача, поставленная Маттиоли, сводилась к тому, чтобы учесть одновременно действие как турбулентности, так и вязкости. Допущенные им парадоксальные предпосылки (например предпосылка о переменном коэффициенте вязкости у стенок) и неверные пограничные условия ему были необходимы только для того, чтобы воспроизвести приближенные логарифмические формулы Кармана и все связанные с этими формулами неточности. Отказ от этих неестественных гипотез приводит, как оказывается, к значительно более точному воспроизведению действительно наблюдаемых закономерностей. Таким образом, учет влияния вязкости достигается уравнениями Маттиоли. Справедливость этих уравнений подтверждается опытными измерениями почти во всех подробностях. Естественно поэтому искать их рациональное объяснение, исходя из принципов более надежных, чем те, из которых отправляется сам Маттиоли.

С разрешения Г. А. Гуржиенко, мы приводим полученные им результаты.

Для выяснения смысла уравнений Маттиоли и разрешения кажущегося противоречия их с уравнениями Навье — Стокса можно и в этом случае, как нам думается, обратиться к соответствующему уравнению Башелье — Колмогорова для переноса вихрей в турбулентном потоке в трубе. Попытку подобного объяснения мы и излагаем в качестве гипотезы, объясняющей успешный результат интегрирования уравнений Маттиоли.

Теория Маттиоли получает значение и интерес только после работы Г. А. Гуржиенко, показывающей, что с этой теорией мы переходим к исследованию новых, еще неизвестных, явлений и к открытию новых закономерностей.

Одновременно с работами Маттиоли вышла в свет небольшая книжка Гебелейна [3], имевшая кратковременный успех.

Физические предпосылки теории Гебелейна настолько не вяжутся со всеми теми фактами, которые нам теперь известны, и настолько расходятся с простой логикой, что мы не сочли уместным излагать ее результаты. Гебелейн исходит из мысли, что поле изотропных пульсаций скорости внутри потока испытывает постоянное воздействие анизотропных импульсов пограничных вихрей у стенок. Анизотропно распределенные количества движения, получаемые от этих вихрей, непрерывно налагаются на изотропное поле пульсаций, причем это последнее сохраняет будто бы свою изотропию. В работе Гебелейна мы имеем воспроизведение вывода уравнений Колмогорова в том виде, в каком он им сделан для перераспределения поля вероятностей. Такая постановка вопроса суживает поле возможных приложений уравнений Колмогорова и теории перераспределения. Полная сумма вероятностей всегда равна единице. Вероятности перераспределяются и не имеют источников. Применяя уравнения распределения к полю количеств движения, мы должны учитывать источники возникающих вновь количеств движения, т. е. действие механических сил. Гебелейн искусственно вносит действие сил в уравнения Колмогорова, извращая в то же время физический смысл отдельных его членов. Несмотря на ряд интересных соображений, высказываемых автором, его работа не дает ничего нового для объяснения явлений турбулентности.

В этой работе Гебелейн устанавливает закон, никем еще не указанный, а именно: „среднее квадратичное значение скоростей пульсации пропорционально корню четвертой степени абсолютного среднего значения вектора вихря в данной точке“.

Теоретический вывод закона сбивчив и неубедителен. Фактическое его подтверждение измерениями Никурадзе, приводимое автором, основано на

неточности графических методов дифференцирования. Эту неточность легко установить, прибегая к более точным методам численного дифференцирования функций, заданных таблицей их значений. По устранении этих погрешностей оказывается, что новый закон сильно расходится с данными Никурадзе.

В настоящей работе было принято в качестве основной предпосылки положение — искать в уравнениях Башелье — Колмогорова разгадку явления турбулентности. Это положение сводится к тому, что поле средних скоростей однозначно определяется начальными и пограничными условиями и является полем векторов непрерывных и дифференцируемых.

Пульсации скорости при этом являются той частью поля истинных скоростей, которая носит чисто случайный характер, имеет на средние скорости только статистически определяемое влияние и не удовлетворяет условиям математической регулярности, которыми мы определяем средние скорости.

Статистическая теория турбулентности до сих пор еще находится в периоде своего зарождения. Самые методы статистического осреднения, которые в данном случае должны применяться, еще не вполне разработаны и твердо не установлены. Настоящая статья является только попыткой ответить на некоторые вопросы и поэтому невольно грешит несистематичностью и тем более не может претендовать на полноту изложения. Так, мы оставили совершенно без рассмотрения теории А. А. Фридмана, Келлера и Изаксона, основанные на совершенно формальном применении правил осреднения. Эти правила выводятся из некоторого числа различным образом формулируемых постулатов, из которых одни определяют формально оператор осреднения как линейный оператор, а другие заключают в скрытой форме недоказанные физические предпосылки, как, например, постулат о равенстве нулю моментов третьего порядка.

До сих пор эти формальные методы еще не привели ни к каким новым заключениям, имеющим практический интерес ¹.

¹ Содержание настоящей работы было доложено на заседании Института механики МГУ 23 мая 1935 г. Основной постулат заимствован из работ М. А. Великанова, которому автор приносит благодарность за советы и указания при совместном обсуждении вопроса.

1. РАБОТА БЮРГЕРСА

Многими авторами высказывалась мысль, что лучшим подходом к изучению установившегося турбулентного движения жидкости является применение методов статистической механики. Наиболее обстоятельным исследованием в этом направлении после Рейнольдса является работа Бюргерса [4].

В этой работе Бюргерс последовательно применяет имеющиеся методы классической статистики к распределению значений функции тока ψ в поле скоростей плоскопараллельного движения. Для этого он покрывает поле скоростей прямоугольной сетью прямых, параллельных осям координат, с квадратными ячейками и изучает распределение значений ψ в N узлах этой сети. Эти N значений принимаются им в качестве координат N -мерного пространства, которое и рассматривается им в виде аналогии фазового пространства обыкновенной кинетической теории материи.

Единственным затруднением является определение статистического веса элемента объема этого пространства. В виду диссипативного характера турбулентного движения теорема Лиувилля, к которой обычно прибегают в статистической механике, не применима. Бюргерс пытается заменить эту теорему аналогичными ей выводами и этим обосновать равновероятность *a priori* всех элементов объема пространства значений ψ , хотя такое утверждение и приводит к совершенно неприемлемому выводу, а именно: все значения функций тока ψ , даже сколь угодно большие в какой-либо точке поля скоростей, остаются равновероятными. Мало того, сведение непрерывного поля скоростей к совокупности N значений ψ могло бы иметь смысл только в том случае, когда можно было бы, увеличивая число N до бесконечности, получать сколь угодно близкое приближение к непрерывному полю скоростей. Делая, однако, N бесконечным, мы должны при этом ввести в рассмотрение метрику N -мерного пространства значений ψ .

Известно, что в пространстве бесконечного числа измерений определение объема элементов пространства является в значительной степени произвольным. При метрике декартовых прямоугольных координат (а таковую Бюргерс и рассматривает) определение объема, площадей и прочих мер зависит существенно образом от порядка нумерации координат [5]. Таким образом, при беспредельном увеличении числа N и речи не может быть о чем-либо аналогичном теореме Лиувилля для пространства значений ψ .

Помимо указанной, чисто методической, неправильности неприемлемо по существу и самое применение оснований классической статистики. Классическая статистика в том виде, по крайней мере, как ею пользуется Бюргерс, имеет дело со стохастически независимыми объектами, связанными в случайные, несвязные ряды. Отдельные же мгновенные состояния движения являются рядами статистически связными, и применение к ним предельных теорем (например Фоулера) незаконно. Цель исследования турбулентного движения — установить эту связь, а не определить наиболее вероятные распределения скоростей из множества независимых между собой состояний движения.

Указанные причины делают и самые выводы Бюргерса очень сомнительными, что и объясняет систематическое несовпадение его вычислений с данными опытного наблюдения.

2. РАБОТЫ ДЖ. ТЭЙЛОРА, ПРАНДТЛЯ И КАРМАНА

От указанных недостатков свободны работы другого направления, имеющие целью изучение распределения скоростей, получающегося в результате переноса количества движения беспорядочным турбулентным движением. И в этом направлении также основные положения были высказаны еще Рейнольдсом.

Эта мысль получила дальнейшее свое развитие сравнительно недавно. В небольшой статье, получившей в 1915 г. премию Адамса, Дж. Тэйлор [6] дал теорию переноса завихренности в турбулентном движении идеальной жидкости; затем эта же мысль была высказана Прандтлем, исследовавшим перенос количества движения методами кинетической теории газов, и, наконец, в последнее время, исходя из соображений подобия, Карман дополнил теорию некоторыми очень существенными выводами, которые позволяют сопоставить теорию с результатами опытных измерений.

Мы не будем входить в рассмотрение соображений и выводов указанных авторов и ограничимся только короткой передачей основных положений. Наша цель иная. Нам думается, что полученные результаты могут быть с небольшими дополнительными предпосылками рационально выведены из современной теории связанных статистических рядов, — теории, которая сама является простым применением к вопросам статистики общей теории линейных функционалов.

Дж. Тэйлор рассматривает в упомянутой работе 1915 г. и в статье 1932 г. [7] плоскопараллельный поток в плоскости (x, z) с составляющими истинных скоростей: $u = \bar{u} + u'$ и w , давлением p , плотностью жидкости ρ и завихренностью η :

$$\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

Здесь $\bar{u}$ — средняя скорость, полученная путем осреднения по координате x ; u' — скорость пульсации в направлении оси X ; w — в направлении оси Z . Среднее движение предполагается прямолинейным, направленным вдоль оси X . Движение при отсутствии внешних сил определяется в случае идеальной жидкости уравнением:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2w\eta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2 + w^2}{2} \right). \quad (2.1)$$

Завихренность может быть разбита на сумму: средней завихренности $\bar{\eta}$ и вихревой пульсации η' . Мы имеем, очевидно,

$$\bar{\eta} = \frac{1}{2} \frac{d\bar{u}}{dz}. \quad (2.2)$$

Что касается пульсации η' , то для ее выражения Дж. Тэйлор прибегает к приближенному расчету, заимствованному из элементарной кинетической теории газов. Из слоя жидкости, параллельного оси X , благодаря скорости пульсации w переносится завихренность. Если l — расстояние этого слоя от рассматриваемой точки, то разность значений средней завихренности в слое и в рассматриваемой точке будет равна:

$$\pm l \cdot \frac{d\bar{\eta}}{dz} = \pm \frac{1}{2} l \frac{d^2 \bar{u}}{dz^2}. \quad (2.3)$$

Знак зависит от направления скорости w . Принимая для l всегда положительное значение, мы найдем, что заносимая пульсацией дополнительная завихренность будет равна в среднем $-\frac{1}{2} l \cdot \frac{d^2 \bar{u}}{dz^2}$ при $w > 0$ и будет равна $+\frac{1}{2} l \cdot \frac{d^2 \bar{u}}{dz^2}$ при $w < 0$. Полагая осредненное движение потока независимым от

координаты x (на основании самого определения осреднения вдоль координаты x , которое принимает Дж. Тэйлор), мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2 + w^2}{2} \right) = 0. \quad (2.4)$$

Осредняя почленно уравнение (2.1), мы получаем в результате:

$$\bar{l}\bar{w} \cdot \frac{d^2 \bar{u}}{dz^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0. \quad (2.5)$$

Таково уравнение, из которого и исходит Дж. Тэйлор. При этом коэффициент $\bar{l}\bar{w}$ имеет положительное значение.

Прандтль, пренебрегая изменением количества движения ρu на единицу объема, которое происходит под влиянием пульсации давления, рассматривает уравнение для переноса количества движения, прибегая к той же картине переноса из слоя на расстоянии l .

Он полагает $u = \bar{u} + u'$, где

$$u' = \mp l \frac{d\bar{u}}{dz}.$$

Исходя из уравнения движения в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (uw) = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} + u^2 \right)$$

и производя почленно осреднение по времени, Прандтль получает уравнение:

$$\frac{d}{dz} \left(\bar{l}\bar{w} \cdot \frac{d\bar{u}}{dz} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}^2 = 0. \quad (2.6)$$

Различие уравнений Дж. Тэйлора и Прандтля сводится, по существу, к различному определению обоими авторами операции осреднения. Дж. Тэйлор рассматривает средние значения по координате x , а потому, естественно, он и делает заключение, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{u^2 + w^2} \right) = 0.$$

Рассматривая же средние значения по времени, как то делает Прандтль, такого вывода в общем случае сделать нельзя. Если же допустить, что ход пульсации вдоль оси X и по времени t имеет совершенно случайный, не систематический характер, можно приравнять среднюю по времени и среднюю по координате x . Но в таком случае, если считать справедливым как способ Прандтля учета пульсации скорости, так и способ Дж. Тэйлора определения пульсации вихря, с необходимостью придется принять коэффициент $\bar{l}\bar{w}$ постоянным и независимым от z . Самый учет пульсации, взятый из элементарной кинетической теории газов, основан на предпосылке, что переносимое количество (завихренность η или количество движения ρu) на протяжении l свободного переноса не изменяется. Если принять такую точку зрения, то ясно, что завихренность переносится с массой идеальной жидкости, рассматриваемой Дж. Тэйлором, в то время как количество движения не может оставаться неизменным и будет находиться под действием пульсации давления. Делать из этого вывод, что турбулентные пульсации вызываются переносом завихренности, а не переносом количеств движения, преждевременно, так как такое упрощенное представление о переносе, пригодное при исследовании движения молекул, может быть введено в гидродинамику только с большими оговорками в качестве простого грубого приближения. Мы, например, увидим, что предпосылка сохранения общего количества той физической величины, которая переносится, вовсе не обязательна для составления уравнений переноса.

Принимая осреднение по оси X и по времени t равнозначными, мы видим, что уравнения Прандтля и Дж. Тэйлора равносильны в том случае, когда значение для u , данное Прандтлем: $u = \bar{u} + l \frac{d\bar{u}}{dz}$, дает для завихренности η значение, указанное Дж. Тэйлором:

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{d\bar{u}}{dz} + l \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2} \frac{d\bar{u}}{dz} \right), \quad (2.7)$$

так как оба эти уравнения являются просто осреднениями того же уравнения Эйлера. Это условие приводит к равенству

$$l = \text{const.}$$

Таким образом, оба уравнения равносильны, поскольку можно считать путь переноса постоянным¹.

В Английской национальной физической лаборатории были, по предложению Дж. Тэйлора, произведены эксперименты в аэродинамической трубе с явлением переноса завихренности за обтекаемым цилиндрическим препятствием на том расстоянии от препятствия, на котором устанавливается плоскопараллельное движение. Эти эксперименты подтвердили справедливость уравнения Дж. Тэйлора и некоторые предпосылки относительно коэффициента $l\omega$ переноса, которые были сделаны Прандтлем и о которых мы будем говорить ниже. Опыты подтверждают как теорию Дж. Тэйлора, так и теорию Прандтля с одинаковой степенью точности. Для переноса тепла мы имеем, разумеется, другое уравнение, а потому естественно, что кривые распределения скоростей и температур не совпадают, что ни в какой мере не служит к опровержению теории Прандтля, как то ошибочно, как нам думается, полагал Дж. Тэйлор.

Карман в дополнение к этим предпосылкам дал еще очень ценное соотношение между средней скоростью $\bar{u}$ и средним значением длины $\bar{l}$ пробега массы жидкости при пульсации ω в плоскопараллельном потоке:

$$\bar{l} = \frac{\frac{d\bar{u}}{dz}}{\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}}. \quad (2.8)$$

Вывод этого соотношения сделан Карманом из соображений подобия, мало убедительных. Однако это соотношение позволяет установить связь между распределением средних скоростей $\bar{u}$ вдоль координатной оси Z и касательными напряжениями внутреннего турбулентного трения. Опытами Никурадзе эта зависимость была в значительной мере подтверждена.

Уравнения Дж. Тэйлора и Прандтля были подтверждены на опыте с незначительными, однако, отклонениями для небольших чисел Рейнольдса. Эти отклонения объясняются вязкостью, которая создает силы внутреннего трения, исчезающе малые при больших числах Рейнольдса по сравнению с силами турбулентного трения. Для малых чисел Рейнольдса по той же причине наблюдалось небольшое расхождение также с теорией Кармана.

Мы ставим себе целью вывести более общие уравнения и попытаться при их помощи дать объяснение значения и смысла соотношения Кармана.

Рассматриваемая задача турбулентности является частным случаем более общей задачи, а именно: исследования перераспределения по времени значений аддитивной функции от элементов объема в пространстве. При таком распределении по времени мы одновременно будем рассматривать распределение изучаемой функции и в пространстве. Такой функцией элементов объема могут быть: масса жидкости, количество движения, тот или иной вид энергии. При

¹ Независимость длины l от ординаты z , как впоследствии установил Тольмин, характеризует явления „свободной турбулентности“, т. е. турбулентного движения в потоке, не направляемом твердыми стенками, который рассматривался Дж. Тэйлором.

изучении перераспределения такой функции с течением времени мы сделаем некоторые предпосылки о связи распределений в данный момент с распределением в начальный момент. Ниже мы точно выразим эти предпосылки. Мы рассмотрим сначала простейший случай перераспределения вдоль одной только координаты. Этот случай обнимает собой задачи Дж. Тэйлора и Кармана. Обобщение на случай распределения в двух- и трехмерном пространстве сделать очень просто, так как такое обобщение, кроме усложнения формул, по существу не вносит ничего нового. Мы имеем в виду общие уравнения распределения, которые были впервые даны Башелье в его курсе теории вероятностей, читанном в Сорбонне в 1911—1912 гг., и их дальнейшее развитие в аналитической теории статистики А. Н. Колмогорова. В виду того, что вся теория установившегося турбулентного движения в той постановке, которую ей дали Дж. Тэйлор и Прандтль, самым близким образом связана с теорией А. Н. Колмогорова, мы считаем нелишним сделать отступление для вывода уравнений этой теории. Эти уравнения дадут возможность не только осветить значение результатов, полученных Карманом, но и обобщить всю теорию на значительно более широкий класс задач и случаев турбулентного движения. Вместе с тем мы выясним истинную природу той функции осреднения, при помощи которой мы можем определить средние скорости, с одной стороны, и пульсации — с другой.

На полную строгость выводов мы в настоящей статье претендовать не можем. Изложение всей теории линейных функционалов заняло бы слишком много места. Отсылаем для подробностей к двум статьям А. Н. Колмогорова [8, 9], а также к книжке Ф. Рисса [10] и к статьям Л. А. Люстерника [11] и И. Радона [12] в „Успехах математических наук“.

3. ОСНОВНОЙ ПОСТУЛАТ

При исследовании турбулентного движения мы будем исходить из следующего основного постулата, по существу высказанного еще Рейнольдсом.

В турбулентном движении поле скоростей (и вихрей) может быть разбито на два поля: поле скоростей (и вихрей) регулярных, или средних, и поле случайных, беспорядочных отклонений, или пульсаций скоростей (или вихрей).

Мы называем скорости (или вихри) регулярными, или средними, при соблюдении следующих условий:

1) если распределение этих скоростей (или вихрей) однозначно зависит в поле скоростей от их начального распределения в начальный произвольный момент времени и одновременно от значения этих скоростей (или вихрей) на границе поля скоростей при заданном в поле распределении сил;

2) если распределение этих скоростей в пространстве и их последовательность по времени непрерывны, а также если их производные по времени и производные по координатам до третьего порядка включительно существуют и непрерывны.

Второе поле „пульсаций“ скоростей (или вихрей) состоит из чисто случайных, беспорядочно распределенных по времени и в пространстве, отклонений истинной скорости (или вихрей) от значений регулярных, средних, скоростей (или вихрей)¹.

Этот постулат служит для определения того поля турбулентных скоростей, к которому применима излагаемая ниже теория.

В реальном потоке жидкости на ряду с явлениями закономерного характера, которые определяются общими условиями потока (например, начальным распределением скоростей, пограничными условиями и пр.), мы всегда наблюдаем ряд явлений чисто случайного характера. Таковы все возмущения, по-

¹ Мы ниже увидим, что утверждение постулата относительно пограничных условий равносильно предпосылке о конечной скорости турбулентного переноса количества движения или вихрей (см. раздел 21).

являющиеся под влиянием случайного вида неровностей стенок, или же возмущения, привходящие извне.

Каждая неровность стенки, взятая в отдельности, имеет совершенно случайную форму. Волна, ею вызываемая в потоке, распространяется в жидкости в виде некоторой поверхности разрыва того или другого порядка [13]. Не останавливаясь на этом частном случае возможных возмущений, который мы привели только для примера, можно вообще сказать, что в реальном потоке всегда имеются распространяющиеся случайные возмущения, которые приводят к нарушению закономерности и к распространению поверхностей разрыва непрерывности движения. Пока эти возмущения по своему возникновению затухают и не ведут к изменению скоростей всего поля движения, мы говорим, что движение имеет ламинарный характер. Когда же случайные возмущения вносят систематическое возмущение в распределение скоростей, мы говорим о турбулентном движении жидкости, в котором суммарное действие случайных возмущений само получает статистическую закономерность, чем и объясняется вносимое ими изменение распределения скоростей, наиболее часто наблюдаемых в потоке.

Для отделения элемента случайного от закономерного и должно служить статистическое осреднение, т. е. определение математического ожидания.

Для возможности осреднения мы должны дать критерий случайного и тем определить в применении к полю скоростей понятие вероятности. В виду невозможности эмпирического мерила вероятности мы вынуждены прибегнуть к постулату, определяющему тот устойчивый, закономерный характер средних значений (получаемый исключением элемента случайного), который отвечает требованиям постулата.

Далее мы должны еще определить те элементы, статистическое сравнение которых позволяет установить равновероятность и дать меру вероятностей.

Поверхности разрыва непрерывности движения, которые беспорядочно распространяются в потоке под влиянием случайных возмущений, ограничивают небольшие массы жидкости конечного объема, внутри которых скорости удовлетворяют уравнениям Навье — Стокса, пока не пройдет поверхность разрыва. Движение этих масс, названных Рейнольдсом „молями“, и составляет характерную особенность турбулентного движения.

Таким образом, ни скорости в различных точках поля в определенный момент времени, ни последовательность по времени скоростей в одной точке не представляют собой множеств совершенно независимых событий. Они не представляют собой также и рядов, связанных между собой абсолютной закономерностью. Элементами случайности являются движения отдельных молей. По примеру Рейнольдса, мы можем сравнивать между собой скорости центра тяжести отдельных молей.

При беспорядочном перемещении внутри потока отдельные массы жидкости, или моли, переносят с собой количество движения и завихренность. Количество движения и завихренность перераспределяются благодаря такому беспорядочному перемешиванию молей в поле скоростей.

Рассмотрим поле скоростей в два различные момента времени: начальный t_0 и другой какой-либо последующий момент t . В каждый бесконечно малый элемент dV объема в момент t перераспределяемое количество, которое назовем P (например количество движения), может поступить из различных элементов объема dV_0 поля скоростей в момент t_0 . Вероятность перехода перераспределяемого количества из dV_0 в dV будет зависеть от моментов t_0 и t и координат элементов dV_0 и dV . Математическое ожидание поступившего в dV количества представится в виде суммы произведений всех элементов $P(t_0) \cdot dV_0$ начального поля на вероятность f перехода из dV_0 в элемент dV . С переносом самого исследуемого количества (например количества движения) в каждом элементе dV и для каждого момента t времени определяется математическое ожидание этого количества:

$$\sum [P(t_0) \cdot f \cdot dV_0].$$