

А.С. Чеботарев

**Способ наименьших
квадратов с основами теории
вероятностей**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
А11

А.С. Чеботарев
А11 Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей / А.С. Чеботарев – М.: Книга по Требованию, 2022. – 475 с.

ISBN 978-5-458-33152-4

Книга составлена по программе курса "Способа наименьших квадратов", читаемого автором в Московском геодезическом институте. Может служить пособием для студентов геодезических вузов, а также руководством для инженеров, производящих вычисления по уравновешиванию геодезических работ, производимых в целях картографирования все территории Союза и отдельных местностей, при проектировании инженерно-технических сооружений.

ISBN 978-5-458-33152-4

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2022

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2022

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

прежде всего — учебное пособие и притом для студентов второго курса. Этим определяется в значительной мере характер и расположение теоретического материала, этим определяется и подбор примеров. Методика преподавания этого трудного для усвоения предмета наложила свой отпечаток на структуру и содержание курса.

Способ наименьших квадратов является дисциплиной производственного характера. Поэтому в настоящем руководстве мною собрано то существенное, что необходимо для геодезического производства, с тем чтобы советскому инженеру-геодезисту не было необходимости при своей текущей работе обращаться к различным иностранным источникам.

При этом я не ставил себе задачей исчерпать в данном руководстве все разнообразие методов и приемов, которые в настоящее время находят применение в производстве в различных учреждениях при уравнительных вычислениях. Я ограничился несколькими типичными образцами в расчете, что лицо, усвоившее содержание настоящего курса, в состоянии будет самостоятельно изучить и усвоить все другие приемы, которые применяются для решения того или иного конкретного случая в геодезическом производстве.

Проф. А. Чеботарев

Часть первая

Теория ошибок измерений

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Общие соображения об измерениях

Вне нас, независимо от нас существуют предметы, происходят явления в окружающей нас природе. Об этих предметах, об этих явлениях мы узнаем при помощи наших органов чувств.

Познавая, мы различаем количественную и качественную стороны предмета, явления. При изучении количественной стороны мы производим счет и измерения.

Счет производится тогда, когда мы имеем дело с совокупностью отдельных предметов. Так, мы считаем, когда хотим определить число студентов во втузе, число книг в шкафу и т. д.

Измерение — процесс более сложный, в котором счет входит как его составная часть.

Измерить [(ausmessen (messen); to measure (to define); mesurer (tirer des mesure)]¹ *какую-нибудь величину — значит найти отношение этой величины к другой, однородной с ней величине, принимаемой за единицу меры.*

Измерение считается *прямым* или *непосредственным* [unmittelbar (direct); direct; direct (immediate)], когда измеряемая величина *сравнивается непосредственно* со своей единицей меры. Примером прямого измерения является измерение длины линии при помощи стальной ленты или мерного бруса, определение объема тела при помощи градуированного сосуда, определение сопротивления проводника при помощи мостика Уитстона и т. д.

Измерение называют *непрямым* или *посредственным* [mittelbar (indirect); indirect; indirect (mediate)] в том случае, когда искомый результат получается вычислением при помощи одной или нескольких других измеренных величин, находящихся с определяемой величиной в некоторой функциональной зависимости. Так, *посредственным* измерением будет определение площади треугольника по измеренным двум сторонам и углу между ними.

Существует и несколько иное, более узкое понимание термина „прямое“ измерение.

Результат измерения выражается числом. Поэтому при измерении всегда будет иметь место уравнение:

$$Q = NU,$$

1

¹ Для облегчения пользования пособиями на иностранных языках здесь, как и в дальнейшем, приведены важнейшие термины параллельно с русскими на трех языках в такой последовательности: немецкий, английский, французский

где Q — есть измеряемая величина,

U — единица меры,

N — численное значение величины Q , получаемое в результате измерения.

Численное значение измеряемой величины зависит от единицы меры, примененной при измерении.

Если возьмем вместо U единицу меры U' , то в результате измерения получим вместо N число N' , причем

$$Q = N' U'.$$

При этом будет иметь место соотношение:

$$\frac{N'}{N} = \frac{U}{U'}. \quad 2$$

§ 2. Ошибки измерений

Громадный опыт, произведенный человечеством по части измерений в самых различных областях науки и техники, убеждает нас в том, что получить в результате измерений совершенно точное значение числа N (формула 1) нельзя. Уже одно то обстоятельство, что измеряемая величина Q и единица меры U являются, за сравнительно редкими исключениями, величинами несоизмеримыми, говорит о том, что числовое значение N измеряемой величины чаще всего не может быть выражено конечным числом цифр. Но не в этом суть дела.

Основная причина заключается в несовершенстве наших органов чувств. Так, на-глаз мы можем определять расстояния с весьма небольшой точностью. В опытах Иордана¹ с оценкой на-глаз одного и того же расстояния неопытными в этом деле лицами получились следующие результаты в метрах: 130; 300; 110; 80; 160; 150; 170; 49; 200; 200.

Точное же расстояние было 137,2 м.

А при геодезических измерениях глаз играет чрезвычайно важную роль.

Чтобы повысить точность наших измерений, мы применяем различные инструменты.

Приводим результаты одной из работ с весьма точными современными инструментами, именно результаты измерений вспомогательного Питсбургского базиса² (табл. 1).

Таблица 1

| № измер. | Длина базиса, м | № измер. | Длина базиса, м |
|----------|-----------------|----------|-----------------|
| 1 | 146,308 76 | 6 | 146,308 62 |
| 2 | 146,308 64 | 7 | 146,308 87 |
| 3 | 146,308 56 | 8 | 146,308 62 |
| 4 | 146,308 53 | 9 | 146,308 79 |
| 5 | 146,308 50 | 10 | 146,308 73 |

¹ Zeitschr. für Vermessungswesen, 1898, S. 341.

² Hammer. Die längste Triangulierungsgrundlinie. Zeitschr. f. Vermessungswesen 1908, S. 590.

Мы видим, что в приведенных результатах десяти измерений, несмотря на всю тщательность произведенной работы (ввиду ее весьма ответственного характера), все же две последние цифры численных значений величины измеряемого базиса менялись.

Опыт показывает, что так происходит со всякими измерениями. Как бы мы старательно и искусно не производили самые измерения, какие бы точные инструменты для этого не применяли, тем не менее, повторяя измерения многократно, мы убедимся в том, что в ряду измеренных значений данной величины первые несколько цифр слева будут общими у всех численных значений этой измеренной величины, а последние цифры результатов измерений будут у каждого измеренного значения свои.

Таким образом, результаты измерений не являются абсолютно точными; они содержат *ошибки* [Fehler (m); error; erreur (f)].

Чем более совершенные инструменты применяются при измерениях, чем искуснее наблюдатели, чем тщательнее производятся самые измерения, чем более благоприятны внешние условия для измерений, тем больше общих цифр получается в ряду повторных измерений, тем меньше ошибки будут содержать результаты измерений, тем эти измерения будут *точнее*.

Здесь весьма уместно отметить, что число, составленное из общих цифр ряда многократных измерений одной и той же величины (например 146,308 м для вышеприведенного Питсбургского вспомогательного базиса), характеризует самый объект измерения.

Этим ряд измеренных значений существенно отличается от ряда наудачу написанных чисел.

Чем больше цифр в общей части численных значений измеряемой величины, тем точнее определяется тот или иной признак измеряемого объекта.

При современном состоянии науки и техники обеспечиваются в результате геодезических измерений:

при обыкновенных технических работах 2 — 3 цифры,
 при точных работах 4 — 5 „
 при работах высокой точности 6 — 7 „

При подсчете числа цифр в общей части ряда измеренных значений величины нужно учитывать только значащие цифры, не принимая в расчет предшествующих нулей. Так, если имеем ряд измеренных значений:

Таблица 2

| № по пор. | Измерения в км |
|-----------|-------------------|
| 1 | 0,000 468 37 |
| 2 | 0,000 468 45 |
| 3 | 0,000 468 59 |
| 4 | 0,000 468 41 |

то числа этого ряда имеют три общих значащих цифры (число 468), что соответствует геодезическим измерениям, производимым для обыкновенно-

венных технических целей. Нули же перед значащими цифрами указывают на то, сколь велика избранная единица меры по сравнению с измеряемой величиной. В данном случае целесообразнее было за единицу меры взять миллиметр.

При измерениях необходимо учитывать два обстоятельства.

1. Единица меры, при помощи которой производятся измерения, должна быть в течение процесса измерения практически неизменна. Большой степенью неизменности обладают естественные единицы меры — период обращения земли вокруг своей оси и длина световой волны луча определенного цвета. Весьма хорошо, как показал опыт, сохраняют свои размеры основные эталоны метрической системы мер — метр и килограмм.

Случаи изменения рабочих единиц меры имеют изредка место на практике. Так, подобный случай произошел летом 1934 г. при научно-исследовательских работах Геодезической экспедиции Московского геодезического института, когда 24-метровая инварная лента за время работы укоротилась на 0,47 мм. Подобный же случай отмечает немецкий геодезист Гаст¹ при своих работах в 1908 г. в Аргентине, когда 96-метровая стальная лента изменила свою длину между 28 марта и 18 июля на 7,1 мм.

В силу этого единицы меры сравниваются при точных измерениях с нормальными мерами до и после процесса измерения и, кроме того, принимаются меры к наблюдению за неизменностью единицы меры в процессе самого измерения.

2. Когда мы говорим о *точном, истинном* значении измеряемого объекта, то предполагаем, что размеры этого объекта практически неизменны в течение всего процесса измерения.

При геодезических измерениях это условие обычно соблюдается весьма хорошо: расстояние между хорошо закрепленными на земле пунктами, разность отметок двух марок, угол, определяемый тремя закладными центрами, и др. служат тому хорошим примером.

С другой стороны, бывают случаи, когда приходится измерять объект, быстро изменяющийся, например зенитное расстояние или азимут звезды. Здесь приходится говорить о размерах измеряемого объекта, соответствующих определенному моменту.

К объектам такого же рода относится и магнитное склонение, которое, помимо обычных суточных колебаний, подвержено еще так называемым возмущениям, связанным с соответствующими явлениями на солнце. Табл. 3 наблюдений магнитного склонения, произведенных 15 марта 1898 г. в Бохуме², иллюстрирует явление этого рода.

Мы видим, что в течение суток произошло несколько „скачков“ магнитной стрелки. Например, в полночь в течение 15 минут стрелка сместилась на 27'.

Если известен закон, по которому происходит изменение измеряемого объекта с течением времени, то ряды измерений такого объекта, произведенных в различные моменты времени, можно привести к одному моменту.

¹ P. Hast. Das polygonometrische Triangulierungsverfahren der argentinischen Landesaufnahme. Zeitschr. für Vermessungswesen, № 16 — 17, 1910.

² I. Magnetische Declination in Bochum. Zeitschr. f. Vermess. 1898. S. 344.

Таблица 3

| Время наблюдения | Склонение | Время наблюдения | Склонение |
|---------------------------------|--------------|---------------------------------|--------------|
| 8 ^h | + 2' | 22 ^h 40 ^m | - 37' |
| 10 ^h | + 8' | 23 ^h 40 ^m | - 4' |
| 12 ^h | + 8' | 24 ^h | - 15' |
| 14 ^h | + 14' | 24 ^h 15 ^m | - 42' (min.) |
| 15 ^h 45 ^m | + 36' (max.) | 2 ^h | - 17' |
| 16 ^h 0 ^m | + 31' | 2 ^h 20 ^m | + 18' |
| 18 ^h | + 1' | 3 ^h 10 ^m | - 11' |
| 20 ^h | 0' | 4 ^h | 0' |
| 22 ^h | - 8' | 6 ^h | + 13' |

Таким образом, хотя абсолютно неизменных объектов измерения в природе нет, тем не менее всегда можно найти такой промежуток времени, в течение которого размеры измеряемого объекта в пределах точности измерений можно считать практически неизменяющимися, постоянными. Для одних объектов этот промежуток времени определяется многими годами, для других — малыми долями секунды. Такой практически неизменяющийся в течение определенного промежутка времени размер измеряемого объекта мы и будем в дальнейшем называть *точным, истинным* значением величины этого объекта.

Обозначим истинное значение величины через X , измеренное значение этой величины — через a , разность между X и a — через Δ , тогда

$$X - a = \Delta. \quad 3$$

Здесь Δ и будет истинной ошибкой измеренного значения a .

§ 3. Промахи в измерениях

От ошибок, о которых говорилось в предыдущем параграфе, нужно отличать такие уклонения результатов измерений от точного значения, которые совершенно недопустимы для данного инструмента и метода работы.

Так, не исключена возможность: а) сделать просчет целой ленты при измерении линии, отсчитать остаток не с того конца, принять цифру шесть за девять; б) при измерении угла — навести трубу не на ту точку, пропустить при отсчете градус или полградуса, спутать номера счетных приборов; в) при нивелировании — забыть привести перед отсчетом по рейке пузырек уровня на середину, взять не ту цифру с рейки, пропустить пяток сантиметровых пашек, отсчитать не по той нити; г) при вычислении — сделать просчет при подсчетах, произвести не то действие, поставить не на месте запятую и т. д.

Все такого рода случаи при измерениях называются *промахами* или *грубыми ошибками* [grobe Fehler (m); mistake; faute (f)].

Всякий промах при измерениях и вычислениях свидетельствует о некотором недостатке внимания при работе. Промахи хотя и редко бывают, но все же они возможны и при хорошей работе. Чаще они случаются при вычислениях. Но во всяком случае работа измерений и вычислений

должна быть поставлена так, чтобы всякий промах был своевременно обнаружен и исключен из результатов измерений. Для этой цели применяется метод контрольных измерений или вычислений.

Как правило, всякий контроль является действительным контролем лишь тогда, когда он проводится инструментом или методом, отличающимся от того инструмента или метода, которым производилось контролируемое измерение или вычисление.

Так, при многократном измерении углов лимб после каждого приема вращают на некоторый угол. При измерении линий хорошо применить для контроля мерный прибор другой длины, если же контрольное измерение производится тем же прибором, то имеет смысл при втором измерении линии AB (фиг. 1) начать это измерение немного отступя, например, от точки C , и заметить при измерении положения точек B и A . Этим устраняется возможность допущения вторичного же самого промаха при отсчитывании остатка. При нивелировании хорошо иметь двустороннюю рейку с разными шкалами на обеих сторонах и с разными нулями.



Фиг. 1.

В дальнейшем мы будем предполагать, что результаты измерений грубых ошибок не содержат.

§ 4. Типы рядов измерений

Ряды измерений одной и той же величины можно разделить на два типа по характеру переменной части численных значений результатов измерений, входящих в эти ряды.

Примером рядов измерений первого типа могут служить ряды, приведенные в табл. 4 (наблюдения широты Парижской обсерватории) и табл. 5 (высота астрономического столба Берлинской обсерватории над контрольным репером).

Таблица 4¹

| № по пор. | z | φ | № по пор. | z | φ |
|-----------|-----|---------------|-----------|-----|-------------|
| 1 | 0° | 48° 50' 10",9 | 5 | 40° | 48° 50' 13" |
| 2 | 10° | 11",8 | 6 | 53° | 13",3 |
| 3 | 22° | 11",9 | 7 | 63° | 13",5 |
| 4 | 31° | 12",1 | 8 | 74° | 14",3 |

Под z здесь разумеется зенитное расстояние звезды в момент наблюдения.

Примером рядов второго типа может служить вышеприведенный ряд измерений Питсбургского базиса.

Характерной особенностью рядов измерений первого типа является то, что в них при последовательном переходе от одного измерения к другому наблюдается определенно выраженная правильность изменения результатов измерения.

¹ H. Faye — R. Bourgeois. Cours d'Astronomie et de Géodésie. 1926, I, p. 236. В книге Фая даны дополнения широты до 90° (Colatitude)